Liber Abaci
Leonardo Pisano´s Book of Calculation

Francisco Falconi Magaña*

INTRODUCCIÓN

Liber Abaci es el libro que Leonardo Pisano escribió en 1202 con el fin de difundir en Europa los números hindúes y las operaciones que con ellos se realizaban, sin necesidad de utilizar el ábaco y los números romanos. El libro está dividido en quince capítulos, en los cuales se plantean y resuelven diversos problemas relacionados con la actividad mercantil de aquella época. El principal objetivo de este escrito es compartir con el lector breves comentarios acerca de este famoso libro en cuanto se refiere al ámbito comercial de Europa en la Edad Media y su relación con el quehacer matemático de Leonardo Pisano, mejor conocido como Fibonacci. Los datos biográficos e históricos se tomaron, por supuesto, del Liber Abaci, en esta que es la primera traducción del latín al inglés moderno, realizada por Lawrence E. Sigler, editada en 2002 por Springer-Verlag e impresa en Estados Unidos de Norteamérica. Qué mejor que tomar esta información del propio Fibonacci a través de su traductor. Sin embargo, el comentario principal va sobre el método que Leonardo utiliza para calcular la suma de una serie de números.

Uno de los libros de Matemáticas más importantes del siglo XIII en Europa es Liber Abaci, escrito por Leonardo Pisano, mejor conocido como Fibonacci entre los matemáticos y científicos. Fibonacci nació en 1170 en Pisa y murió en 1250. Escribió Liber Abaci en 1202. Una segunda versión apareció en 1228, pero esta que aquí se comenta es la primera traducción que se hace del manuscrito original en latín a lenguaje moderno, a inglés para ser más preciso.

El gran mérito de tan famoso autor fue el de introducir en Europa el conocimiento de los números hindúes (0 a 9) y los procedimientos de cálculo aritmético que se realizaban con estas cifras.

Leonardo comenzó su instrucción matemática en Bugia, centro comercial localizado en la costa bárbara de África, en el territorio perteneciente al imperio occidental musulmán. Posteriormente continuó sus estudios en lugares como Egipto, Siria, Provenza y Bizancio, a los cuales viajaba en plan de negocios. De los científicos árabes fue que aprendió los números hindúes, el sistema posicional y los algoritmos para las operaciones aritméticas.

En la segunda mitad del siglo X los números hindúes apenas empezaban a conocerse en España, a través de los árabes; pero en tiempos de Leonardo no eran de uso general. Fue entonces que observó claramente las ventajas de las nuevas matemáticas y se decidió a escribir su obra enciclopédica, Liber Abaci, con el propósito de difundir en Italia lo que en esa época era considerado como la mejor matemática del mundo.

Antes de que estos conocimientos llegaran a Europa los cálculos se realizaban con el ábaco, y las respuestas se escribían con números romanos, lo cual dificultaba mucho los procedimientos. Por eso, el sistema posicional escrito y los nuevos métodos para efectuar las operaciones aritméticas tuvieron pronto gran aceptación. Sin embargo, los procedimientos escritos de cálculo, álgebra y matemáticas prácticas continuaron llamándose ábaco, por costumbre, en la Edad Media. Así, una persona que calculaba con números hindúes sin utilizar el ábaco era un maestro d’abbaco, y su técnica era conocida como ábaco. Por esta razón fue que Leonardo tituló a su libro: Liber Abaci.

*Profesor Investigador de la División Académica de Informática y Sistemas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México. Correo electrónico: falconimag@hotmail.com o francisco.falconi@ujat.mx.

Además de enseñar todos los métodos necesarios de aritmética y álgebra, Fibonacci incluye en Liber Abaci un caudal de aplicaciones matemáticas a toda clase de situaciones en el comercio y los negocios, conversiones de unidades de monedas, peso y contenido, métodos de trueque, formación de sociedades y asignación de utilidades, aleación de monedas, inversión de dinero, interés simple y compuesto. Los problemas de comercio proporcionan una valiosa idea del mundo medieval, ya que en esa época los estados marítimos italianos de Pisa, Génova, Venecia y Amalfi estaban involucrados en intensa rivalidad comercial por todo el mundo mediterráneo, incluyendo Bizancio y los territorios musulmanes. Curiosamente, la mayor parte de la matemática era aplicada a situaciones comerciales. Leonardo presenta además en su libro muchos problemas con el único afán de mostrar el poder y la belleza de sus matemáticas, los cuales son notables por la selección de vívidas y atrayentes imágenes, así como por su ingenuidad en la solución.

Otro hecho interesante es que en el texto no se incluyen números con punto decimal. Es probable que en esa época aún no se utilizaba y todas las operaciones se efectuaban con enteros y fracciones del tipo a/b, escritas además de manera muy sui generis. Por ejemplo, la siguiente notación:

(1 4)/(2 7)

significa: cuatro séptimos más un medio de un séptimo. Y había por supuesto fracciones compuestas mucho más complejas, como la siguiente:

(2 4 6 8)/(3 5 7 9) 0

que equivale a: ocho novenos, y seis séptimos de ocho novenos, y cuatro quintos de seis séptimos de ocho novenos, y dos tercios de cuatro quintos de seis séptimos de ocho novenos del todo. Y el número π:

(6 1 4 1)/(10 10 10 10) 3

que se leía como: tres enteros, y un décimo, y cuatro décimos de un décimo, y un décimo de cuatro décimos de un décimo, y seis décimos de un décimo de cuatro décimos de un décimo, que en lenguaje moderno equivale a tres enteros más un décimo más cuatro centésimos más un milésimo más seis diezmilésimos.

Como puede suponerse, el número de operaciones necesarias para calcular cantidades de dinero, de peso de granos y azúcar, de capacidad de recipientes de vino, de aceite y otros líquidos, se volvía excesivo. Sin embargo, esto no impidió que Leonardo expusiera en su libro el uso de razones y proporciones, la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, así como su famosa serie ejemplificada con la crianza de conejos.

Un dato más que vale la pena mencionar es el procedimiento que Fibonacci aplica para calcular la suma de una serie de números. En el capítulo XII se lee: Cuando usted quiera sumar una serie de números que se incrementan en un número determinado, ya sea uno, dos, tres o cualquier otro, entonces multiplique la mitad de los números de la serie por la suma del primero y el último, o multiplique la mitad de la suma del primero y el último por la cantidad de números de la serie, y tendrá la proposición. Para obtener la cantidad de números de la serie, como explica allí mismo, Leonardo resta el primer número de la serie del último, divide este resultado entre el incremento y al cociente le suma 1. En notación moderna esto podría escribirse como:

[(s_n-s_1)/I]+1=n (1) y (n/2)(s_1+ s_n) (2)

en donde s1 es el primer número de la serie, sn es el enésimo, I es el incremento constante y n es la cantidad de números de la serie.

El primer ejemplo que presenta Fibonacci es la suma de los números 7 hasta 31, que se incrementan cada vez en 3. Esto es: 7+10+13+16+19+22+25+28+31. Aplicando las fórmulas (1) y (2) se obtiene:

[(31-7)/3]+1=9, y (9/2) (7+31)=171

Este resultado puede verificarse si la suma se realiza paso a paso. Después de esta serie, el autor incluye las siguientes como ejemplos:

1+2+3+ … +58+59+60
2+4+6+ … +56+58+60
3+6+9+ … +54+57+60

cuyas sumas pueden obtenerse con las mismas fórmulas (1) y (2).

Conviene analizar ahora por qué la fórmula (1) de Fibonacci proporciona la cantidad de términos de la serie. Si s es el primer número de una serie con las características anteriores e I el incremento constante, entonces cualquiera de ellas puede representarse formalmente como:

s+(s+I)+(s+2I)+(s+3I)+…+(s+kI) (3)

Luego, si se sustituyen el primero y el último término de esta expresión en la fórmula (1) se obtiene:

$[(s+kI)-s]/I = k$ (4)

pero k representa aquí el número de incrementos, que empieza precisamente a partir del segundo término de la serie, en el cual el coeficiente de **I** es 1. El coeficiente de **I** en el tercer término es 2, y así sucesivamente. En conclusión, cuando se cuenta 1 incremento se tienen 2 términos, cuando se cuentan 2 incrementos se tienen 3 términos, y cuando se cuentan k incrementos se deberán tener k+1 términos. Por esta razón es que a la k de la expresión (4) se le debe sumar 1 para obtener n, que es la cantidad de números de la serie que se van a sumar.

Si se realiza la suma de la fórmula (1) se obtiene:

$[(s_n-s_1)+I]/I=n$ (5)

Ahora, en la serie 1 anterior (1+2+3+…+58+59+60) puede verse que $s_1=I=1$. Sustituyendo estos valores en (5) se obtiene:

$[(s_n-1)+1]/1=n$

y simplificando esta igualdad resulta que $s_n = n$. Así, la fórmula (2) también se transforma y finalmente se tiene que

$n/2(s_n + s_1) = n/2(n+1)$

la cual es ni más ni menos que la conocida fórmula de Gauss, comprendida, como un caso especial, en la fórmula que Fibonacci expuso en su libro en el año 1202.

En Liber Abaci pueden leerse otras curiosidades interesantes, como las diversas unidades monetarias de la época: el denario, unidad de moneda de Pisa, la libra, el sueldo, que en latín eran denarius, libra y soldus. Veinte sueldos equivalían a una libra, y doce denarios eran un sueldo. De denarius se deriva la palabra dinero, y de soldus resultan sueldo (como pago de un salario) y soldado (quien recibe un sueldo). El besante era el bizantus, unidad monetaria de Bizancio. El massamutino era una moneda de oro de la dinastía Almohad de España. Hay más monedas y unidades de peso y de volumen, cuyas raíces idiomáticas nos ilustran un tanto sobre las costumbres y usos de la Europa medieval y nos permiten ver las derivaciones de muchas palabras que se utilizan en la actualidad en el mundo de los negocios.

Por todo lo anterior la lectura de Liber Abaci es muy recomendable, sobre todo para aquellos interesados en la historia de las matemáticas.

SEMBLANZA DEL AUTOR

Francisco Falconi Magaña es profesor investigador de la DAIS, UJAT. Fue redactor y traductor de la Revista IMCYC en la Ciudad de México, D.F., durante seis años. Asimismo, tradujo libros para la Editorial Diana y algunos artículos para el CONACYT.

REFERENCIAS

Sigler, L. E. 2002. Fibonacci's Liber Abaci – Leonardo Pisano's Book of Calculation (traducido al inglés moderno por Laurence E. Sigler). Springer-Verlag, Estados Unidos de América. 636 p.