

Modelado Preliminar de un Codificador Optoelectrónico para la Transferencia de Datos Sobre el Momento Angular Orbital de la Luz

Preliminary Optoelectronic Encoder Modeling for Data Transfer Through the Orbital Angular Momentum of Light

CARLOS FERNANDO DÍAZ MEZA

Ingeniero Electrónico UIS

*GOTS, Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
mark177@hotmail.com*

CRISTIAN HERNANDO ACEVEDO CÁCERES

Físico UIS

*GOTS, Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
cristian_rvd@yahoo.com*

YEZID TORRES MORENO

Profesor Titular - UIS

*GOTS, Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
ytorres@uis.edu.co*

JAIME GUILLERMO BARRERO PÉREZ

Profesor Titular - UIS

*CEMOS, Grupo de Investigación en Control, Electrónica, Modelado y Simulación, Escuela de Ingenierías Eléctrica,
Electrónica y Telecomunicaciones
Universidad Industrial de Santander
jbarrero@uis.edu.co*

Fecha recibido: 30/04/2012

Fecha de aprobación: 15/06/2012

RESUMEN

El presente texto expone un modelo preliminar para un codificador optoelectrónico que busca explotar la propiedad del momento angular orbital de la luz para la transferencia de datos. La implementación de esta tecnología proporciona una serie de ventajas en la criptografía cuántica, en el aumento de ancho de banda e incluso en el almacenamiento de arreglos. Se presenta una arquitectura a nivel de capa física en forma de diagrama de bloques, luego se desarrolla la teoría matemática en la que se basa el codificador, donde se utiliza la aproximación paraxial de la onda que se propaga en cavidades resonantes tipo Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss. Se analizan tres posibles técnicas para la generación de la magnitud física y la posterior inserción del dato, se selecciona la más versátil y se muestran las principales particularidades tanto del haz incidente como del haz que emerge del codificador.

PALABRAS CLAVE: Momento angular orbital, Codificación de datos, Modo láser Hermite-Gauss, Modo láser Laguerre-Gauss, Carga topológica.

ABSTRACT

This paper presents a preliminary model for optoelectronic encoder that use the property of orbital angular momentum of light to data transfer. The implementation of this technology provides some advantages in quantum cryptography, increasing bandwidth even storing arrangements. This architecture is showed in blocks diagram and

a brief mathematical theory to explain the encoder is presented, it uses the wave's paraxial approximation when propagates out of resonant cavities like Hermite-Gauss or Laguerre-Gauss. Three possible techniques allow the generation of the physical quantity of interest, topological charge of the beam, and the subsequent insertion of the data to transmit, selecting the most versatile and showing the main characteristics of both, the incident beam and the beam emerging from the encoder.

KEYWORDS: Orbital angular momentum of light, Encode data, Hermite-Gauss modes, Laguerre-Gauss modes, Topological charge.

1. INTRODUCCIÓN

La luz es una manifestación de radiación electromagnética que diariamente se encuentra presente de forma directa o indirecta en todas las actividades conocidas por el ser humano; ésta proporciona energía, forma imágenes, aísla o activa circuitos eléctricos, controla el tránsito vehicular, establece comunicaciones e incluso sostiene toda la cadena alimenticia entre otras dinámicas.

El recurso más común empleado es la intensidad y/o el contenido cromático de la luz. Sin embargo existen otras propiedades de esta onda electromagnética visible, que pueden ser explotadas actualmente para resolver distintas problemáticas y generar diversas aplicaciones desde el campo de la ingeniería.

El momento angular orbital de la luz es una propiedad física debida a la rotación del frente de onda de un haz luminoso sobre su eje de propagación, diferente a la rotación del fotón sobre sí mismo, conocida como spin [1-2]. La cual recientemente se está utilizando para atrapar y trasladar átomos, transferir cantidad de movimiento [3] e incluso ofrecer la posibilidad de codificar información.

Esta última aplicación es una idea que aporta un potencial muy alto en cuanto a la eficiencia y seguridad de la transmisión de datos, ya que las comunicaciones vía fibra óptica o espacio libre, que se llevan a cabo asociando un bit a la intensidad de un haz luminoso, es decir un uno si hay luz o un cero si no existe [4], desperdician potencia, ancho de banda y no ofrecen un alto grado de confidencialidad en la transferencia de información, ya que el sistema puede ser fácilmente infiltrado mediante un separador de haz o usando la propagación de la onda evanescente.

Por ello, muchos organismos militares, científicos e incluso industriales, se encuentran actualmente interesados en una tecnología de información

emergente conocida como comunicación MAO (En inglés OAM de *orbital angular momentum*) la cual se sustenta en la posibilidad de codificar datos en esta magnitud cuantizada distinta de la intensidad y propia de una onda electromagnética.

2. BREVE PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La problemática se centra básicamente en la necesidad que tienen todos los sistemas de telecomunicaciones en desarrollar tecnologías a nivel de capa física, que permitan incrementar la tasa de transmisión de datos y la confidencialidad e integridad de la información [5].

La figura 1 señala los componentes que hacen parte de la anterior capa, los cuales se clasifican a nivel general como codificador, canal y decodificador de datos.

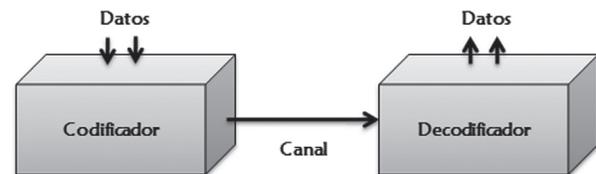


Figura 1. Componentes de la capa física de un sistema de telecomunicaciones estándar. Fuente Autores.

Según lo anterior, el principal objetivo de éste artículo es entonces plantear el modelo preliminar de un sistema optoelectrónico para la codificación de datos usando el momento angular orbital de la luz, tal como se representa en la figura 2.

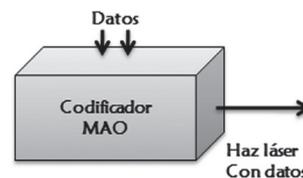


Figura 2. Modelo de codificador sobre el MAO. Fuente Autores.

3. CODIFICACIÓN SOBRE EL MOMENTO ANGULAR ORBITAL

Básicamente el codificador propuesto se compone por una fuente de luz coherente casi monocromática y una estructura de transformación del modo fundamental TEM₀₀ a modos tipo Laguerre-Gauss, igual al esquema propuesto en la figura 3.

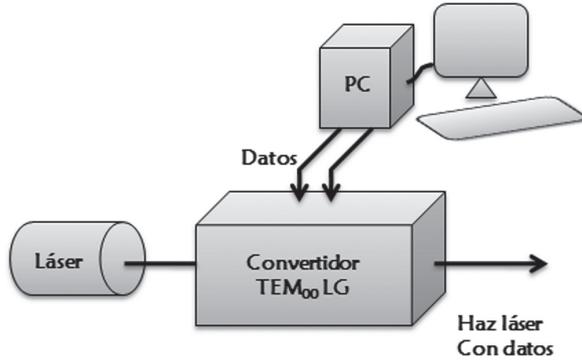


Figura 3. Esquema general del codificador optoelectrónico. Fuente Autores.

El haz láser se puede definir como una onda electromagnética con una coherencia y potencia definida, la cual se propaga a lo largo de un medio con una distribución espacial de intensidad que depende de su cavidad resonante [6]; la descripción matemática de su campo irradiado es solución de la ecuación escalar de Helmholtz:

$$\nabla^2 E(\vec{r}) + k^2 E(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

donde el Laplaciano en coordenadas cartesianas se escribe como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

El campo escalar E se puede representar de forma fasorial como el producto de una envolvente transversal a la dirección de propagación z y un término exponencial complejo [7-8] (representa las coordenadas de un punto en el plano (x, y)), de la siguiente manera.

$$E(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{-jkz} \quad (3)$$

Si se considera que las variaciones de la configuración espacial del haz, son mínimas con respecto a la distancia de propagación, el frente de onda $A(\vec{r})$ del campo cumple con la aproximación paraxial de Helmholtz [9]:

$$\nabla_{\perp}^2 A(\vec{r}) - j2k \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

El subíndice T significa que el operador actúa sólo sobre el frente de onda.

Las expresiones matemáticas de los haces Hermite-Gauss (HG) y Laguerre-Gauss (LG) son soluciones de la ecuación (4). Sus diferencias se sustentan en el hecho de que las HG se formulan en coordenadas cartesianas y las LG en coordenadas cilíndricas, llevando junto consigo el término $e^{-jl\phi}$, el cual representa el momento angular orbital específico que posee el haz [10-12].

La solución para los haces tipo HG está dada por:

$$A(x, y, z)_{nm} = \frac{C_o \cdot w_o}{Z_r \cdot w(z)} \cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w(z)}} \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{w(z)}\right) \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2} \cdot y}{w(z)}\right) \cdot e^{-j\left[l\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)} + \tan^{-1}\left(\frac{z}{R}\right) + (n+m+1)\right]} \quad (5)$$

$$C_o = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(l+p)!}} \quad (6)$$

La solución que describe los haces de tipo LG es:

$$A(r, \phi, z)_{lp} = \frac{C_1 \cdot w_o}{Z_r \cdot w(z)} \cdot e^{-\frac{r^2}{w(z)}} \cdot L_p^l\left(\frac{2r^2}{w(z)}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot r}{w(z)}\right)^l \cdot e^{-j\left[l\frac{kr^2}{2R(z)} + \tan^{-1}\left(\frac{z}{R}\right) + (l+p+1)\right]} \cdot e^{-j\phi} \quad (7)$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(l+p)!}} \quad (8)$$

Donde los parámetros n , m y l , p son los índices de las configuraciones modales del láser, w_o es la cintura del haz, $z_r = \pi w_o / \lambda$ es el rango de Rayleigh, H_n el polinomio Hermite generalizado de orden n y es L_p^l el polinomio Laguerre generalizado de orden lp [12].

Los polinomios de Hermite y de Laguerre toman la forma explícita [13] representada como:

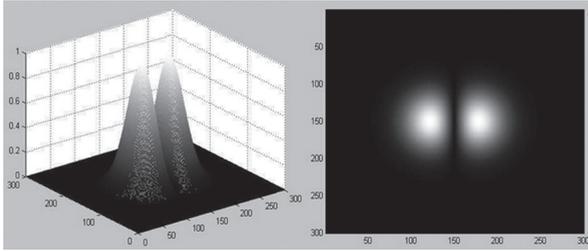
$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^s (2x)^{n-2s} \frac{n!}{(n-2s)!s!} \quad (9)$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, \dots \quad (10)$$

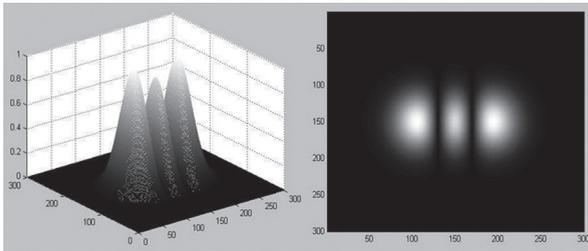
$$L_p^l(r^2) = \sum_{m=0}^p (-1)^m \frac{(l+p)! (r^2)^m}{(p-m)! (l+m)! m!} \quad (11)$$

$$L_2^0(r^2) = 0.5 ((r^2)^2 - 4r^2 + 2), \dots \quad (12)$$

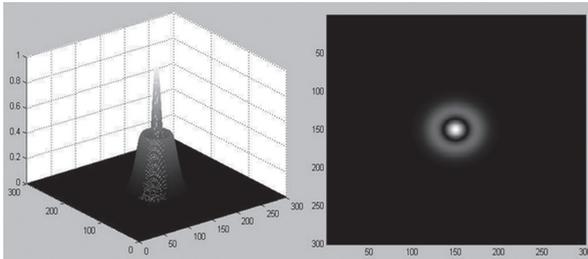
Algunas simulaciones de las configuraciones transversales del haz para los modos HG y LG se muestran a continuación en la figura 4.



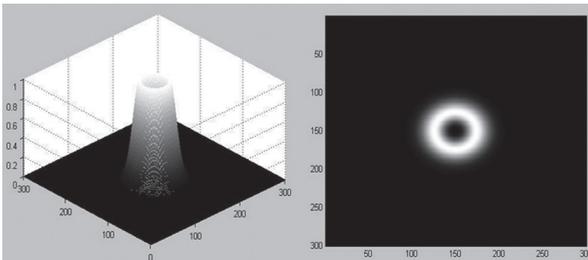
Modo HG, $n=1, m=0$



Modo HG, $n=2, m=0$



Modo LG, $l=0, p=1$



Modo LG, $l=3, p=0$

Figura 4. Distribuciones espaciales de intensidad. Fuente Autores.

Ahora, todas las distribuciones espaciales de luz de un haz láser describen también un perfil de intensidad a lo largo del eje de propagación, tal como se muestra en la figura 5.

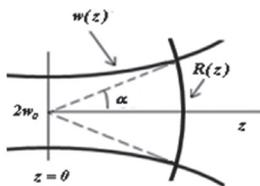


Figura 5. Corte longitudinal que describe la configuración espacial de un haz coherente. Fuente Autores.

Donde:

$$w^2(z) = w_0^2 + \alpha^2 z^2 \tag{13}$$

Representa el radio del haz en función de la distancia de propagación, w_0 es la cintura o “waist” del láser, $\alpha = \lambda / \pi w_0$ el ángulo de divergencia y la expresión dada por (14), el radio del frente de onda [14].

$$R(z) = z(1 + z_f^2 / z^2) \tag{14}$$

Ahora bien, cabe destacar que se debe mantener un criterio de ingreso al convertidor para que el haz láser de modo HG fundamental pueda ser transformado.

La onda incidente HG_{00} debe tener una alteración en el ángulo de apertura mínima para que su potencia no se disperse a lo largo del camino óptico y para justificar que sus variaciones transversales con respecto al eje de propagación sean despreciables, aún cuando el radio del haz $w(z)$ se expanda ligeramente.

Un colimador puede ser usado ya que permite que la divergencia sea la menor posible al ajustar el tamaño de la onda incidente a las dimensiones del convertidor, trasladando el rango Rayleigh z_r varias veces la distancia original (figura 6), conservando así las condiciones que dan lugar a la aproximación paraxial de onda proveniente de la ecuación escalar de Helmholtz [11,15-16].

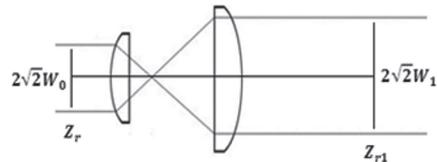


Figura 6. Esquema teórico del perfil expandido y colimado de la onda propagándose. Fuente Autores.

Una vez el campo electromagnético atraviesa la estructura óptica anteriormente descrita, se procede a modelar el convertidor optoelectrónico a configuraciones LG. En ese orden de ideas se tuvieron en cuenta tres formas básicas de generar estos tipos de perfiles transversales con un MAO específico.

3.1 Transformación de modos HG a LG por medio de convertidores astigmaticos

Esta técnica de generar un haz con MAO definido, se basa principalmente en explotar la naturaleza de la expresión físico-matemática de la expansión polinomial que relaciona a un modo LG en la base HG y viceversa [17-18] tal como se muestra a continuación.

$$A(x, y, z)_{p,l}^{LG} = \sum_{k=0}^q j^k B(n, m, k) A(x, y, z)_{q-k,k}^{HG} \quad (15)$$

$$q = n + m \quad (16)$$

$$B(n, m, k) = \sqrt{\frac{(q-k)!k!}{2^q n! m!}} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k [(1-t)^n (1+t)^m]}{dt^k} \right|_{t=0} \quad (17)$$

Donde el índice radial p y el acimutal l del haz LG generado corresponde a:

$$p = \min(n, m) \quad (18)$$

$$l = n - m \quad (19)$$

Cabe destacar que bajo las anteriores transformaciones, es factible decir entonces, que una configuración modal HG generadora con índices n, m , produce una distribución LG con índices l, p . La figura 7 indica la representación gráfica de lo anteriormente expresado.

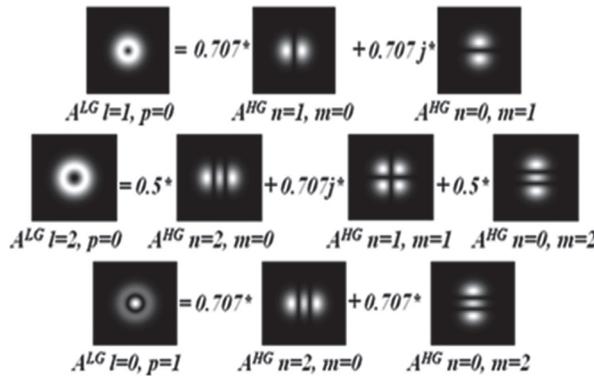


Figura 7. Ejemplos de la expansión polinomial de un haz LG. Fuente Autores.

Cuando un modo incidente HG se confina en una región astigmática, se modifica su fase de Gouy, de tal manera que se genera un desfase de $\pi/2$ entre las componentes transversales del haz, provocando que la sumatoria de sus contribuciones espaciales sea equivalente a la expresión dada por la ecuación (15).

No obstante si bien se genera experimentalmente una configuración LG de una buena calidad [17-19], se requieren de perfiles HG de un alto orden para obtener distintos campos con MAO entero definido, lo cual representa un costo en el montaje del codificador, pues se debe intervenir mecánicamente el láser al interior de su cavidad resonante para producir una distribución espacial de luz de este tipo, provocando así que la velocidad de transición de un dato a otro sea muy lenta.

3.2 Generación de modos LG por medio de una lámina de fase

Este segundo tratamiento se basa en enviar el modo fundamental HG_{00} , sobre una lámina transparente en forma de disco especialmente diseñada para redistribuir la configuración del campo electromagnético. Aquí se puede obtener un modo con MAO específico l , para una placa en espiral con una muesca de altura s [20]:

$$l = \frac{s(n-1)}{\lambda} \quad (20)$$

Donde n es el índice de refracción del material de la lámina y λ la longitud de onda incidente.

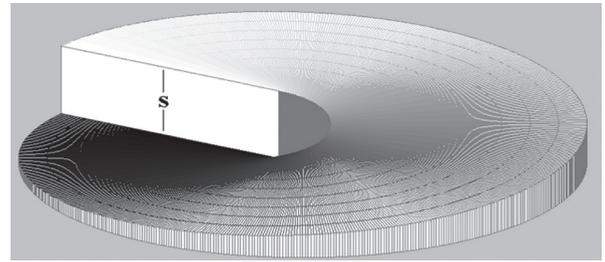


Figura 8. Plato fase con paso s . Fuente Autores.

La distribución espacial de luz emergente puede expresarse como:

$$A(x, y)_{resultante} = A(x, y, 0)_{n=0, m=0}^{HG} * e^{j l \varphi(x, y)} \quad (21)$$

Su representación en campo lejano exhibe un vórtice característico expuesto en la figura 9, el cual es función de la altura s de la muesca del plato fase, revelado en la figura 9.

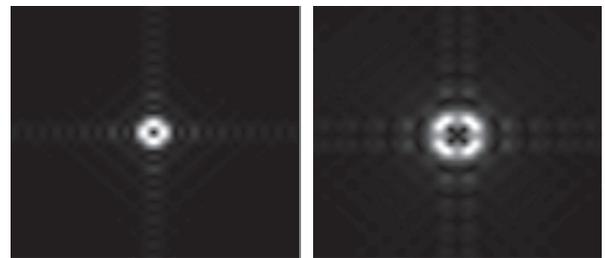


Figura 9. Modos simulados para la lámina de fase. Fuente Autores

Aunque esta técnica capaz de generar un haz con MAO definido es relativamente más sencilla de realizar a nivel experimental que un convertidor astigmático de alto orden, hay que considerar que la construcción de las placas requiere de pericias especializadas para moldear

la altura de la estructura en el orden de las longitudes de onda. Además se debe tener en cuenta la aplicación a desarrollar, pues si en este caso se necesita transferir un dato de por lo menos tres bits, la configuración está en la necesidad de producir otros haces con distinto MAO y por lo tanto se debe modificar continuamente la altura s de la lámina o cambiar de manera mecánica la misma, lo cual actualmente lleva a descartar esta arquitectura para el codificador.

3.3 Producción optoelectrónica por medio de un holograma generado por computador

Este procedimiento consiste en generar haces con MAO definido a partir de un patrón holográfico digital tipo ‘fork’, es decir en forma de tenedor mostrado en la figura 10, el cual le introduce el termino de fase $e^{jln\varphi}$, a los órdenes de difracción resultantes por el paso del campo electromagnético incidente HG fundamental, sobre la rejilla holográfica constituida por elementos discretos muy pequeños (pixeles) [21-22], cuya función de transmitancia se expresa como:

$$T(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n(k_a x - l\varphi(x,y))) \quad (22)$$

Donde n , representa la cantidad de ordenes de difracción, k_a la periodicidad espacial de las franjas cosenoidales y l , la carga topológica del holograma.

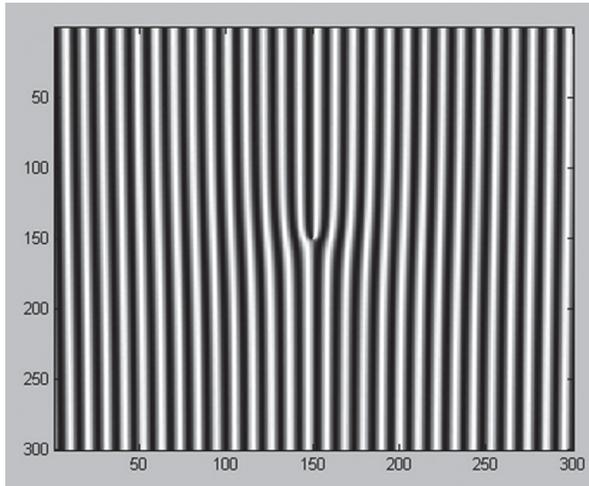


Figura 10. Patrón holográfico de la función de transmitancia con carga topológica $l = 1$. Fuente Autores

Según el desarrollo anterior, el campo emergente de la interacción del holograma y la distribución espacial HG_{00} se expresa matemáticamente como:

$$[A(x,y,0)_{00}^{HG}] \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n(k_a x - l\varphi(x,y))) \quad (23)$$

y su representación bidimensional es tal como se manifiesta en la figura 11.

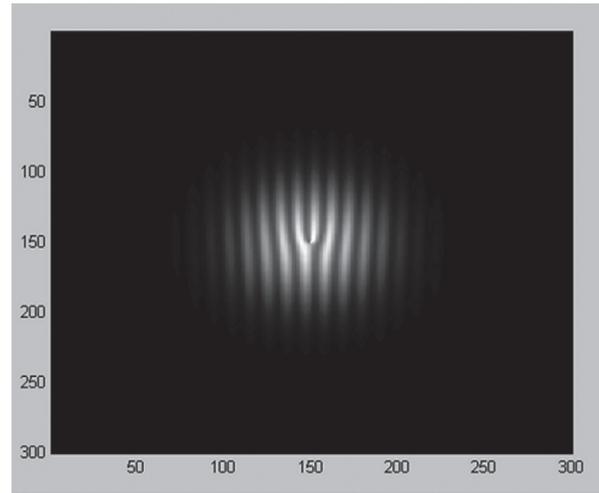


Figura 11. Intensidad del campo electromagnético emergente, ecuación (23). Fuente Autores.

Para definir los órdenes de difracción del campo lejano se determina la transformada de Fourier de la distribución resultante [23], representada en la figura 12.

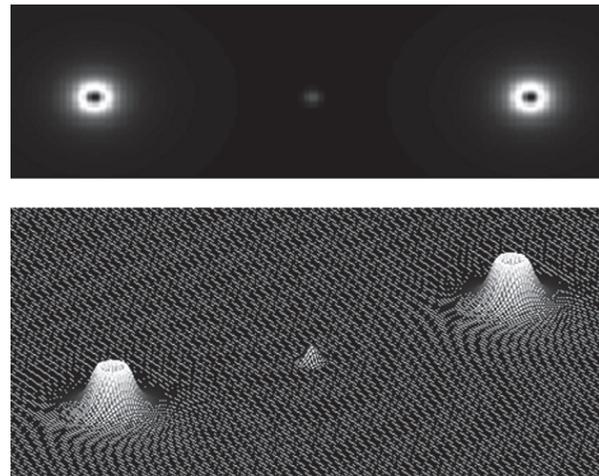


Figura 12. Campo lejano luego de atravesar el holograma digital. Fuente Autores.

Ahora bien, es factible proyectar los distintos tipos de rejillas sobre un modulador espacial de luz [24-26] y cambiar digitalmente un conjunto de N cargas topológicas predeterminadas en un periodo de tiempo relativamente corto, donde entonces a cada orden de difracción con momento angular orbital específico generado por el holograma, se le podría asignar un alfabeto binario correspondiente. La figura 13 manifiesta gráficamente lo anteriormente enunciado.

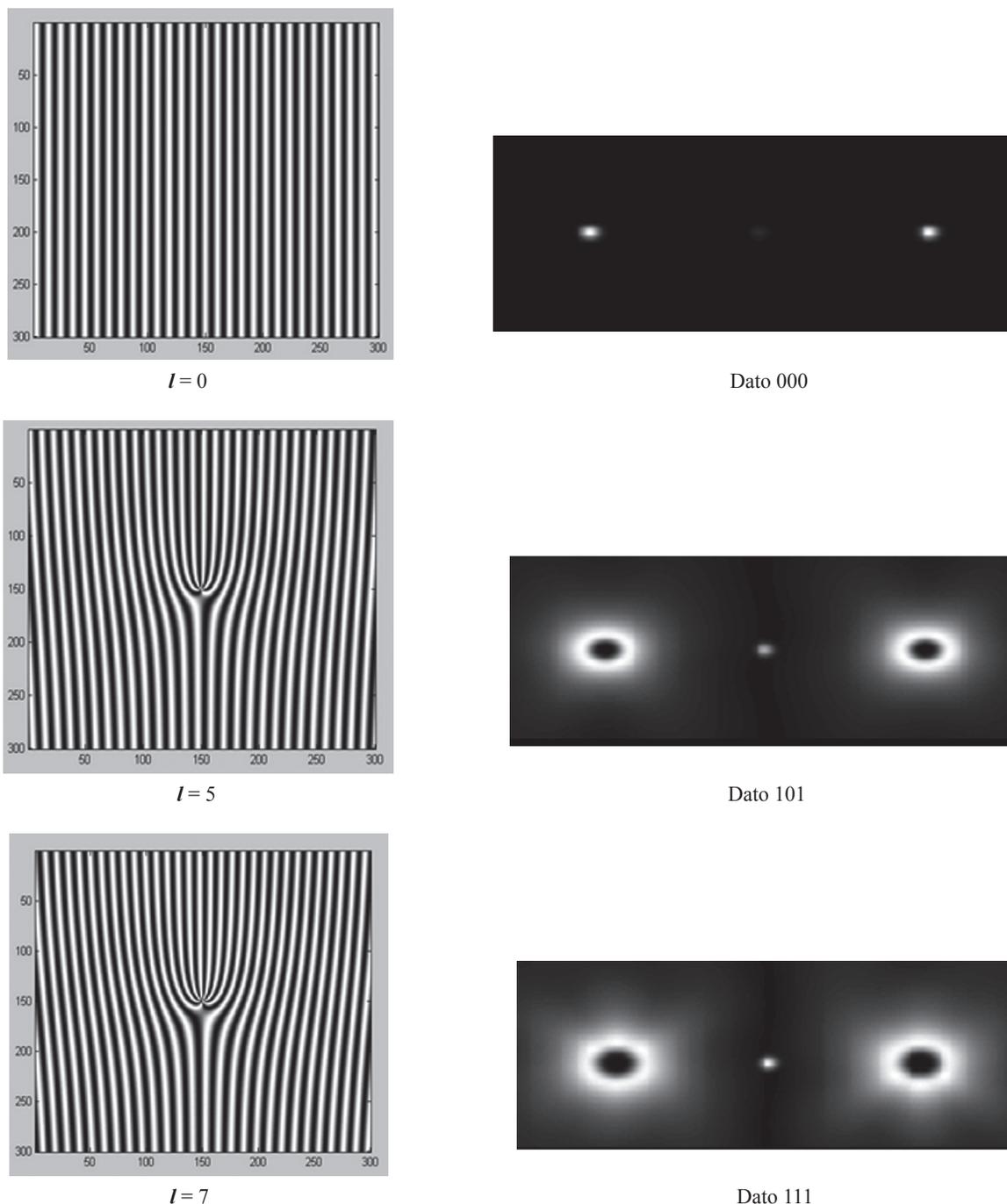


Figura 13. Alfabeto binario asignado a la intensidad de los distintos órdenes de difracción con MAO definido. Fuente Autores

No obstante, desde el punto de vista práctico es inconveniente modelar el sistema codificador con los órdenes de difracción trasladados espacialmente fuera del eje del haz incidente, por ello para corregir este efecto se modifica la rendija discreta a un holograma tipo ‘Blazed’, el cual consiste en multiplicar por un factor de fase equivalente a la carga topológica establecida por el patrón holográfico, así como se expresa en la ecuación (24).

$$T_{Blazed} = \left[\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cdot \cos(n(k_a x - l\varphi(x, y))) \right] \cdot e^{-j\Delta x^2} \quad (24)$$

Esto se hace con el fin de convolucionar el impulso desplazado en el espacio de Fourier dado por la componente de fase $e^{j\Delta x^2}$ con los órdenes de difracción generados y así producir la traslación del modo deseado

en campo lejano al eje óptico del láser, tal como se aprecia en la figura 14.

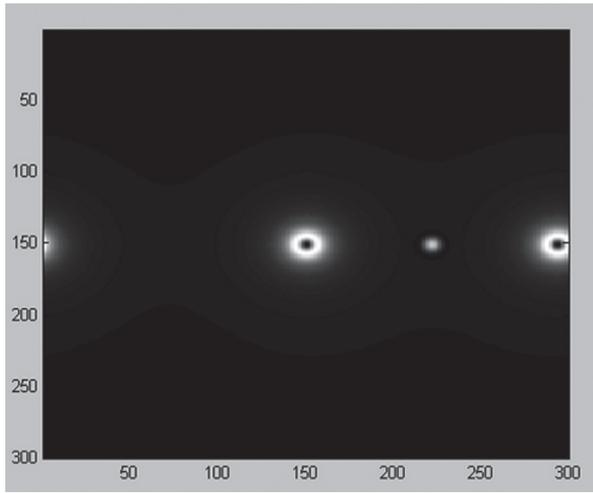


Figura 14. Distribución modal con MAO definido generada a partir del holograma tipo "Blazed" de carga topológica $l = 2$. Fuente Autores.

4. OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

De las tres técnicas simuladas capaces de producir un haz con MAO entero definido, se optó por implementar para el modelo del codificador, la descrita en la sección 3.3, ya que esta permite generar una diversidad suficiente de modos LG para asignar un alfabeto a partir de una sola configuración incidente HG fundamental, un sólo componente puede realizar la función de codificación y pensando en la construcción experimental, no es necesario modificar mecánicamente y de manera continua ninguna estructura.

Las variaciones de la transmitancia, del paso de franjas y la carga topológica del patrón holográfico de fase, producen efectos directos sobre la distribución espacial del campo electromagnético lejano.

El cambio del valor en los parámetros antes mencionados, afecta directamente la energía radiada de forma simétrica en todos los órdenes de difracción producidos, lo cual indica que es posible hallar un conjunto de valores que permitan redistribuir la intensidad por igual a todas las configuraciones del campo electromagnético transversal o por el contrario focalizarla toda en un único orden específico.

El paso interfranja en campo lejano permite controlar la distancia entre cada uno de los órdenes de difracción que tienen diferentes modos, su relación es inversa, ya

que a menor separación entre franjas holográficas se produce un mayor distanciamiento en las distribuciones espaciales que se propagan.

Las modificaciones realizadas a la carga topológica del holograma generado por computador da origen a distintos modos con vórtices propios característicos de los haces con momentos angulares orbitales definidos, producidos por la discontinuidad de fase propia de la rejilla holográfica discreta.

Por último, las distintas variaciones en el tamaño del vórtice óptico o en las discontinuidades de fase que porta el haz, codifican la información que va a ser transferida.

5. DIRECCIONAMIENTO DE TRABAJOS FUTUROS

Actualmente se está construyendo el dispositivo optoelectrónico del modelo propuesto con el fin de realizar el respectivo análisis teórico-experimental de los posibles datos reales a codificar.

A mediano y largo plazo se plantea la posibilidad de implementar dispositivos programables tales como un DSP o una FPGA dedicada a la proyección de los hologramas digitales sobre el modulador espacial de luz. También se propone la superposición de modos para la codificación y un eventual multiplexado de los datos además de un estudio sobre el comportamiento de la propiedad física en una fibra óptica, el MAO de orden fraccional [27] y la detección directa de la magnitud en cuestión.

6. AGRADECIMIENTOS

A la Vicerrectoría de Investigación y Extensión VIE, de la Universidad Industrial de Santander, por el financiamiento al presente proyecto a través del programa de apoyo a la consolidación de los grupos de investigación año 2012, titulado "Modelo optoelectrónico generador de momentos angulares orbitales enteros y/o fraccionales", código 5191/5803.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw and J.P. Woerdman, "Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre Gaussian laser modes", Physical Review A, Vol.45, No. 11, 1992, pp. 8185–8189.

- [2] A.T. O'Neil, I. MacVicar, L. Allen and M.J. Padgett, "Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum", *Physical Review Letters*, Vol.88, No. 5, 2002, pp. 053601_1–053601_4.
- [3] J. W. R. Tabosa and D. V. Petrov, "Optical pumping of orbital angular momentum of light in cold cesium atoms", *Physical Review Letters*, Vol. 83, No. 24, 1999, pp.4967-4970.
- [4] A. S. Tanenbaum, "Redes de computadoras", Cuarta edición, Editorial Pearson Prentice Hall, México, 2003, 893 pp.
- [5] O. Bouchet, H. Sizum, C. Boisrobert. F. de Fornel and P. Favennec, "Free space optics, propagation and communication", Series Editor ISTE, London, 2006, 219 pp.
- [6] B. Hitz, J.J Ewing, J. Hecht, "Introduction to Laser technology", Third Edition, IEEE PRESS, New York, 2001, 302 pp.
- [7] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Third Edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1998, 808 pp.
- [8] W. H. Hayt Jr, J. A. Buck, "Teoría electromagnética", Séptima edición, Editorial McGraw Hill, México, 2006, 541 pp.
- [9] M. C. España, "Comunicaciones ópticas, Conceptos esenciales y resolución de ejercicios", Única edición, Editorial Díaz de Santos, Madrid, 2005, 397 pp.
- [10] M. Moncada, C. Ramírez, "Transformación de un modo HG en un modo LG via conversores astigmáticos", *Revista Colombiana de Física*, Vol. 38, No. 1, 2006, pp.129-132.
- [11] G. Rodriguez, F. Sanchez, S. Martinez, "Ingeniería de haces láser, Propiedades, manipulación y aplicaciones", *Revista ingenierías*, Vol. 12, No. 44, 2009, pp.16-23.
- [12] K. Contreras, G. Baldwin, F. De Zela, "Observación de nuevos patrones modales en experimentos con modos láser Hermite-Gaussianos y Laguerre-Gaussianos", *Mosaico científico*, Vol. 2, No. 2, 2005, pp.47-51.
- [13] G. Arfken, "Mathematical methods for physicists", Third Edition, Academic Press Inc, Miami, 1985, 985 pp.
- [14] H. Kogelnik, T. Li, "Laser beams and resonators", *Proceedings IEEE*, Vol 54, No. 10, 1966, pp.1312-1329.
- [15] A. Siegman, "Lasers", Unique Edition, University Science Books, California, 1986, 1283 pp.
- [16] G. Smith, T. A. King, D. Wilkins, "Optics and photonics", Second edition, John Wiley & Sons Ltd, Manchester, 2007, 507 pp.
- [17] J. Courtial and M.J. Padgett, "Performance of a cylindrical lens mode converter for producing Laguerre-Gaussian laser modes", *Optics Communications*, Vol.159, No.1-3, 1999, pp.13-18.
- [18] M. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen and J.P Woerdman, "Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum", *Optics Communications*, Vol. 96, No.1-3, 1993, pp.123-132.
- [19] E. Santamato, "Photon orbital angular momentum: Problems and perspectives" *Fortschr. Phys.* Vol. 52, No 11-12, 2004' pp.1141-1153.
- [20] W. Beijersbergen, R.P.C Coerwinkel, M. Kristensen and J.P Woerdman, "Helical wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate", *Optics Communications*, Vol. 112, 1994, No. 5-6, pp.321-327.
- [21] L. Janicijevic, S. Topuzoski, "Fresnel and Fraunhofer diffraction of a Gaussian laser beam by fork-shaped gratings", *JOSA A*, Vol 25, No 11, 2008, pp.2659-2669.
- [22] N. R. Heckenberg, R McDuff, C. P. Smith, H. Rubinsztein-Dunlop and M. J. Wegner, "Laser beams with phase singularities", *Optics and Quantum electronics*, Vol. 24, No. 9, 1992, pp.S951-S962.
- [23] J.W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", second edition, Mc Graw Hill, second edition, New York, 1996, 441 pp.
- [24] A. Jain, "Development of an orbital angular momentum sorter for high-speed data transfer", Intel Talent Science search – Physics report, Herricks High School and Laser Teaching center, Stony Brook University, Stony Brook, New York, 2005.
- [25] G. Gibson, J. Courtial, M. Padgett, M. Vasnetsov, S. Barnett and Sonja Franke-Arnold, "Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum", *Optics Express*, Vol.12, No. 22, 2004, pp.5448-5456.
- [26] L. Allen, M. Padgett and M. Babiker, Chapter IV: The orbital angular momentum of light, *Progress in Optics XXXIX*, Elsevier Science B. V., Amsterdam, Netherlands, 1999, 383pp.
- [27] R.Torres, P.Pellat-Finet and Y.Torres, "Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties", *Signal Processing*, Vol.90, No.6, 2010, pp.1976-1984.