

La Modelación en las matemáticas avanzadas para la ingeniería

Yoana Acevedo Rico

yoana.acevedo@upb.edu.co

Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga

RECIBIDO EL 15 DE JULIO DE 2015 - ACEPTADO EL 21 DE JULIO DE 2015

Resumen

En este artículo se socializará una experiencia de formación de ingenieros. La población son estudiantes de ingeniería de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga inscritos en el curso de Ecuaciones Diferenciales. Se implementa una estrategia didáctica centrada en la modelación matemática, para este caso, el estudiante inicia con la situación problemática real hasta un modelo matemático de ecuaciones diferenciales de primer o segundo orden que describa dicha situación, comparando si las predicciones ofrecidas por el modelo y los datos obtenidos experimentalmente son cercanos, para de esta forma buscar una resolución a dicha situación. Los modelos seleccionados deben tener aplicación a una ingeniería o a una problemática que pueda solucionarse interdisciplinariamente. Las fases del proceso de modelación (situación problemática-formulación matemática-obtención de soluciones-verificación del modelo) permiten realizar un acompañamiento del mismo, así como evaluarlo. El docente-investigador realiza un análisis a partir de las observaciones obtenidas

durante el proceso y los productos obtenidos al finalizar la experiencia, adicionalmente se hace un análisis al rendimiento de los estudiantes en tres pruebas escritas. Los datos recolectados a través de las observaciones durante experiencia evidencian cambio de hábitos de estudio, reflejado en una mayor organización del tiempo, mayor habilidad en la toma de apuntes, mayor atención y concentración en clase, entre otros. En las pruebas escritas se encontró un mayor rendimiento en la resolución de problemas.

Palabras claves: modelación matemática, universidad, enseñanza, ecuaciones diferenciales

1. Introducción

Según los datos estadísticos de rendimiento académico 2010-2013 del Departamento de admisiones, registro y control de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga es preocupante el bajo rendimiento de sus estudiantes en las asignaturas de matemáticas del ciclo básico de la Escuela de Ingeniería. Este panorama lleva a sus docentes a hacer una revisión al diseño tanto metodológico como de

evaluación de las asignaturas de matemáticas ofrecidas en el ciclo básico de Ingeniería.

Se toma el caso específico de la asignatura Ecuaciones Diferenciales, siendo esta, una asignatura del cuarto semestre, con estudiantes que finalizan dicho ciclo. Y se plantean cambios en dos aspectos: la aplicabilidad de la asignatura en la Ingeniería y el seguimiento y acompañamiento por parte del docente en el trabajo independiente del estudiante (aprovechamiento del tiempo y la adquisición de hábitos de estudio), que le permitan a éste, ser protagonista activo de su proceso de aprendizaje.

Teniendo en cuenta lo anterior, se diseña una estrategia didáctica basada en la modelación matemática, en la que los modelos se utilizan para estructurar y promover el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Considerando la modelación como un contexto de aprendizaje en el que se invita a los estudiantes a cuestionar e investigar situaciones referidas a la realidad a través del uso de las matemáticas, que les brinda una oportunidad para discutir tanto el papel de éstas en la sociedad como la naturaleza de los modelos matemáticos. Cualquier representación de la situación a través de las matemáticas se considera un modelo matemático (Barbosa, 2003 y 2006). Mostrando a las matemáticas como una actividad humana y, como tal, se desarrolla a partir de modelos originados de situaciones en un contexto específico real. Los modelos funcionan entonces como puentes que conducen hacia una mayor comprensión de las matemáticas con la finalidad de que su conocimiento progrese y evolucione. (Freudenthal, 1991).

Es así como se implementa dicha estrategia en la asignatura ecuaciones diferenciales con estudiantes de ingeniería ambiental, mecánica, industrial y civil, con ocho horas (semanales) de trabajo independiente. Durante el semestre, deben desarrollar dos proyectos con modelos de ecuaciones diferenciales de primer orden y

superior, los problemas seleccionados deben ser aplicación a una carrera (proyectos con grupos de una misma carrera) o una problemática que deba ser abordada de manera interdisciplinaria (proyectos con grupos de diferentes carreras).

2. Método

La problemática que aborda esta experiencia de aula surge de la reflexión sobre la práctica educativa que constituye el eje de la profesión del docente, con la intencionalidad de mejorar el rendimiento académico en la asignatura ecuaciones diferenciales y potencializar las capacidades de los estudiantes a través de la modelación matemática. Es desde estos parámetros que se define una metodología de investigación mixta, enmarcada desde los dos paradigmas, cuantitativo, validando la implementación de la estrategia a través de la comparación de los resultados obtenidos en dos pruebas escritas y cualitativo por el continuo acercamiento entre el docente-investigador y el objeto de estudio a través de la observación realizadas en la implementación de la propuesta.

Las técnicas e instrumentos de recolección de la información utilizados fueron: Observaciones - portafolio: que contiene las producciones escritas y evidencias de los avances de cada grupo de trabajo, semanalmente el docente-investigador realiza una consulta personal con los grupos de trabajo. Encuesta - Prueba escrita: tres pruebas escritas realizadas a los estudiantes, en la mitad y finalizando el semestre.

Para el desarrollo de cada proyecto se proponen cuatro fases de modelación a los estudiantes así: elegir la

situación problemática (propia de la ingeniería), formulación matemática (a través de un modelo de ecuaciones diferenciales), obtención de soluciones (a través del modelo matemático y experimentalmente), verificación del modelo (comparar los datos experimentales con los del modelo matemático).

Dichas fases sirven para el seguimiento y acompañamiento del docente-investigador en cada proyecto. Posteriormente se realiza un análisis a partir de las observaciones obtenidas durante las fases y los productos obtenidos al finalizar la experiencia. Los proyectos realizados por los estudiantes son materializados por dos productos: una exposición y un artículo que cumpla con los requisitos para su divulgación en una revista científica. Adicionalmente se hace un análisis al rendimiento de los estudiantes en tres pruebas escritas que se aplicaron en la mitad y al finalizar el semestre.

3. Análisis y Resultados

Análisis y resultados del portafolio (observaciones del maestro-investigador en los proyectos):

En cada proyecto encontramos las siguientes situaciones problema cuyo modelo matemático es una ecuación diferencial de primer orden o superior:

- Dinámica poblacional
- Decaimiento radioactivo
- Ley de Newton de enfriamiento y calentamiento
- Mezclas
- Drenado de un tanque

- Cadenas de Markov
- Circuitos
- Deflexión de una viga
- Sistemas dinámicos

El análisis de las observaciones realizadas durante la implementación de la propuesta didáctica se aborda de acuerdo a las fases en que se dividió dicha propuesta. Cabe señalar que por grupo se realizaron dos proyectos, uno de un modelo de ecuación diferencial de primer orden y otro de orden superior, el primer proyecto se desarrolló en las primeras 8 semanas y el segundo en 7 semanas. Finalizando cada uno de estos se realizó la exposición y la entrega del artículo.

A continuación se hará una descripción de cada fase, teniendo en cuenta que en cada proyecto los estudiantes pasaron por las 4 fases. Además se darán a conocer algunas observaciones realizadas por el maestro-investigador en los grupos.

--Primera fase— elegir la situación problemática (propia de la ingeniería). En esta fase los estudiantes realizan una consulta exhaustiva del estado del arte del modelo matemático, así como la problemática que desean abordar, a través de la base de datos académicas ofrecida por la Dirección general de investigaciones de la universidad, finalizando esta etapa, los estudiantes deben entregar un anteproyecto.

En esta fase se puede observar a través del portafolio, que la recopilación de la información es muy general, en algunos grupos se observa pocos avances y deben ser orientados por la docente. Finalizado el tiempo para esta fase la mayoría de los grupos completan sus investigaciones preliminares y realizan la entrega del anteproyecto.

--Segunda fase— formulación matemática

(a través de un modelo de ecuaciones diferenciales). En esta fase se debe modelar el problema a través de una ecuación diferencial, así como resolverla y hacer un análisis teórico de dicho modelo. Además, se debe decidir las variables a tener en cuenta durante la recolección de los datos experimentales.

En esta fase se puede observar a través del portafolio, que los modelos matemáticos debían ser ajustados para la recolección de los datos experimentales, puesto que el manejo de muchas variables llevan a un margen de error alto. Al finalizar esta etapa la gran mayoría de los grupos realizan la recolección de los datos y ajustan el modelo a su necesidad.

--Tercera fase— obtención de soluciones (a través del modelo matemático y experimentalmente). En esta fase se recolectan los datos experimentales y hace un análisis entre los datos encontrados y los datos obtenidos a través de la ecuación diferencial.

En esta fase se puede observar a través del portafolio, que los grupos realizaron la recolección de datos en los laboratorios de las asignaturas del ciclo profesional y recurrieron a la orientación de docentes especializados en esta área.

--Cuarta fase— verificación del modelo (comparar los datos experimentales con los del modelo matemático). Los estudiantes realizan el contraste entre los datos obtenidos

experimentalmente y los datos que arrojan el modelo matemático, sabiendo que ambos solucionan el problema, deben encontrar la diferencia entre estos datos.

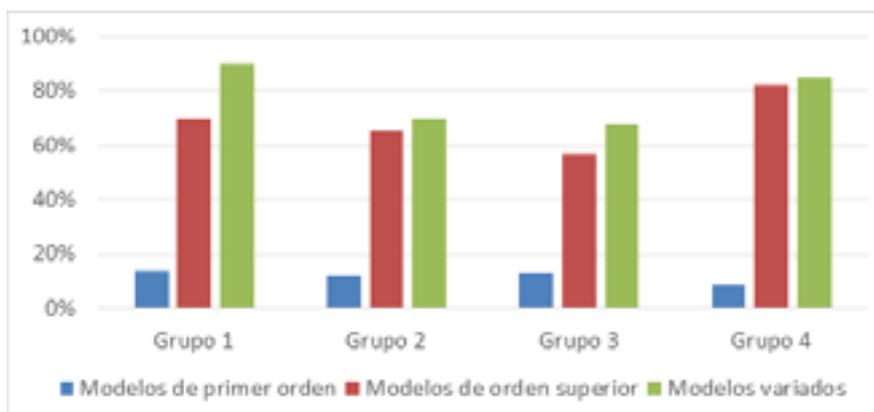
En esta fase se puede observar a través del portafolio, que algunos grupos realizaron nuevamente la recolección de datos, ya que los valores no se ajustaban, en otros casos las ecuaciones diferenciales seleccionadas no modelaban el problema de manera confiable.

En la socialización cada grupo es evaluado por todos los grupos y el docente, se evalúa el proceso y las metas alcanzadas por cada grupo tanto a nivel colectivo como individual. Se realizaron dos socializaciones, una por cada modelo. En general, se obtuvieron proyectos de muy alto nivel, tanto en la aplicabilidad a una situación propia de la ingeniería como los procedimientos matemáticos utilizados.

Análisis y resultados de la encuesta (tres pruebas escritas):

Las pruebas escritas median los niveles de aprendizaje de modelación matemática y resolución de problemas, aplicando ecuaciones diferenciales de primer orden (1 prueba), orden superior (2 prueba), y diversos (3 prueba). Las pruebas fueron realizadas en las semanas 8, 15 y 16. A continuación se muestran los resultados de las tres pruebas realizadas por los estudiantes. Ver Tabla 1.

Tabla 1. Resultados de las tres pruebas escritas



Según la tabla se observa en los cuatro grupos, que los estudiantes obtuvieron mejores resultados a medida que avanzaban en los proyectos.

4. Conclusiones

- Se observó motivación e interés en la asignatura, así como mayor disposición y trabajo en equipo en los proyectos realizados.
- En la gran mayoría de los proyectos, los estudiantes utilizaron laboratorios de sus asignaturas del ciclo profesional, así como la colaboración de profesores especializados en los diferentes temas tratados, para apoyarlos y orientarlos en sus proyectos, encontrando una mayor aplicabilidad de la asignatura en su carrera.
- Se evidenció un mayor rendimiento de los estudiantes en las últimas pruebas, se observa mayor entendimiento de los modelos y afianzamientos de los procedimientos matemáticos.
- Hubo mayor aprovechamiento en las horas de trabajo independiente de los estudiantes, reflejándose una mayor asistencia a las horas de asesorías y cumplimiento en la entrega semanal del portafolio.
- Se evidenció cambio de hábitos de estudio en los estudiantes, reflejado en una mayor organización del tiempo, mayor habilidad en la toma de apuntes, mayor atención y concentración en clase.
- Se encuentran proyectos que han servido para iniciar a los estudiantes en el semillero de investigación en ciencias básicas que hay en la universidad.

- Se hacen necesarias réplicas de esta estrategia didáctica en todas las asignaturas del ciclo básico, y realizar proyectos integradores por semestres.

5. Referencias Bibliográficas

- Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a sociocritical and discursive perspective, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (3), pp. 293-301.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics Education*. China Lectures, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, vol. 9, núm. 46, enero-marzo, pp. 75-87 Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México
- Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga. (2014). Estadísticas rendimiento académico 2010-2013. Departamento de admisiones, registro y control.

ANEXOS

A continuación se presenta un resumen de algunos proyectos realizados por los estudiantes:

1. PROBLEMA DE DINÁMICA POBLACIONAL DEL NÚMERO DE EMPRESAS QUE SE REGISTRARON EN LA CÁMARA DE COMERCIO DE BUCARAMANGA

Este proyecto fue realizado por estudiantes de Ingeniería industrial

Resumen: A través de datos obtenidos en la Cámara de Comercio de Bucaramanga, se hace un análisis de la cantidad de empresas del sector manufacturero y subsector prendas de vestir, que se registran cada año en dicha entidad durante los años 2008-2014. Con los registros de los datos que se obtuvieron se

calculó la constante de dinámica poblacional, permitiendo encontrar una ecuación diferencial que modelara el fenómeno. Una vez encontrada la ecuación diferencial se evaluó año tras año y se realizó una comparación entre los datos encontrados y los datos del registro. Se evidenció que los datos obtenidos no se acercan a los suministrados. Posteriormente se utiliza otra ecuación diferencial (logística) para modelar el fenómeno, y aunque se obtienen datos más próximos a los reales, no es significativa la diferencia del margen de error. Finalmente, se concluye que el fenómeno no se puede modelar debido a que los datos no presentan ninguna tendencia. Se recomienda investigar registros más actualizados que tengan en cuenta variables como la renovación de matrícula, la liquidación, la situación socio-económica y la aprobación de reformas tributarias de las empresas.

2. DRENADO DE UN TANQUE CON APLICACIÓN AL FILTRADO DE AGUA LLUVIA

Este proyecto fue realizado por estudiantes de Ingeniería ambiental

Resumen: En este proyecto se presenta los resultados obtenidos en la modelación matemática del drenado de un tanque con un sistema de filtro que ayudará a eliminar las partículas coloidales encontradas en el agua lluvia para su reutilización. Se realizaron veinte tomas de datos que permitieron hallar la velocidad de flujo o de salida del agua al pasar por 3 tanques y dos sistemas de filtrado. Se compararon los datos obtenidos empíricamente y los obtenidos teóricamente a través de la Ley de Torricelli. Se recomienda utilizar el pluviómetro para hallar con exactitud la medición de la precipitación de agua caída, obteniendo así datos más cercanos a los teóricos.

3. LEY DE NEWTON DE ENFRIAMIENTO APLICADO EN TEJAS

Este proyecto fue realizado por estudiantes de Ingeniería civil

Resumen: En este proyecto se muestra experimental y analíticamente como la ley del enfriamiento de Newton permite evidenciar el mejor tipo de material para construir techos en unidades de vivienda de una sola planta. Se observó la variación de la temperatura de las tejas más utilizadas en el mercado: Zinc, Eternit® y Barro, a través del tiempo, con el propósito de determinar que teja se enfría en menos tiempo y comprobar la teja de mejor rentabilidad y confort para el usuario, ya que el material que tenga enfriamiento más rápido, brindará un ambiente más fresco y por consiguiente habrá una reducción del consumo de energía eléctrica al no tener que utilizar electrodomésticos como ventiladores y aires acondicionados en viviendas que se encuentran expuestas a temperaturas altas. Se logró identificar por medio de este procedimiento que la teja de Zinc mantiene un proceso de enfriamiento más rápido que los otros dos tipos de materiales comunes, disminuyendo así la temperatura interna más rápido. Los datos recolectados se realizaron con 30 retazos de dichas tejas y un termómetro laser, sometiendo a hornos de altas temperaturas dicho material. Se compararon datos experimentales con los teóricos proporcionados por la ecuación diferencial.

4. DEMOSTRACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO PARA CIRCUITOS RLC

Este proyecto fue realizado por estudiantes de Ingeniería eléctrica

Resumen: En este proyecto se muestra los resultados obtenidos experimental y teóricamente utilizando el modelo matemático de circuitos RLC. Inicialmente, se obtuvo una gráfica de la corriente y la carga, calculando

la solución de la ecuación diferencial para circuitos RLC, posteriormente, se obtienen las gráficas de la corriente y las carga generadas por las lecturas del Arduino, programado de tal forma que cumpla la función de un multímetro y estos datos se visualizaron mediante el software Processing, logrando una simulación de un osciloscopio. Finalmente, al analizar las gráficas obtenidas tanto de manera experimental como teórica de la corriente y la carga se concluye que el sistema de un circuito RLC es un sistema con oscilaciones subamortiguadas.

5. **MODELACIÓN DEL PROCESO DE TRANSFERENCIA DE MASA EN COLUMNAS DE LECHO FIJO DE LA BIOADSORCIÓN DEL Cr (VI) USANDO TRANSFORMADAS DE LAPLACE**

Este proyecto fue realizado por estudiantes de Ingeniería ambiental

Resumen: En este proyecto se presenta los resultados teóricos y experimentales en la modelación del proceso de transferencia de masa en columnas de lecho fijo como alternativa para la remoción de cromo(VI) en las industrias antes de ser enviadas al efluente y así poder cumplir con las normas estándares ambientales.. La bioadsorción es una tecnología alternativa para remover los metales pesados de las soluciones acuosas diluidas basadas en la capacidad de una biomasa de acumular en sus tejidos inertes los agentes contaminadores, la concentración de entrada es diferente a la concentración de salida en determinado tiempo t , ya que se remueve una parte del contaminante, después de un tiempo, cuando la masa captura el contaminante, la concentración de entrada es igual a la de salida. Utilizando la transformada de Laplace se modeló el proceso, obteniendo resultados similares a los experimentales.