*LLULL, vol. 22, 1999, 589-653*

# LES LIVRES ARITHMÉTIQUES DES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE DANS LE TRAITE D'AL-MU'TAMAN DU XI$^e$ SIÈCLE

AHMED DJEBBAR
Université Paris-Sud

*RESUMEN*

*El presente trabajo estudia el primer capítulo del* Kitāb al-Istikmāl, *obra del siglo XI escrita por al-Mu'taman Ibn Hūd, matemático andalusí que fue rey de Zaragoza entre 1081 y 1085. Reconocida ya la singular importancia del* Istikmāl *en la tradición matemática andalusí y magrebí, sus diferentes capítulos vienen siendo objeto de análisis en la última década.*

*ABSTRACT*

*This paper studies the first chapter of* Kitāb al-Istikmāl, *a work of the 11st century by al-Mu'taman Ibn Hūd, a mahematician from al-Andalus who was the king of Zaragoza between 1081 and 1085. Different chapters of this remarkable work in the arabic mathematical tradition have already been studied in the last decade, while other works are still in progress.*

Palabras clave: Matemáticas, Aritmética, Ciencia Arabe, Edad Media, Al-Andalus, España, Zaragoza, *Elementos*, Euclides, al-Mu'taman Ibn Hūd, *Istikmāl*.

## Introduction

L'étude présentée ici concerne le premier chapitre du *Kitāb al-istikmāl,* un ouvrage du XI$^e$ siècle écrit par al-Mu'taman Ibn Hūd, un mathématicien d'al-Andalus qui a été roi de Saragosse entre 1081 et 1085 [DJEBBAR, 1984-1993; HOGENDIJK, 1986]. L'importance de l'ouvrage d'al-Mu'taman pour l'Histoire de la tradition mathématique d'al-Andalus et du Maghreb a été déjà signalée [DJEBBAR, 1990] et certains de ses chapitres ont déjà fait l'objet d'une série d'études dont certaines sont encore sous presse ou en préparation [HOGENDIJK, 1990a; 1990b; 1991; 1993; 1994].

*Recibido el 8 de julio de 1999*

Le chapitre arithmétique de *l'Istikmāl* est intitulé *La première espèce du premier genre parmi les deux genres des sciences mathématiques, sur la connaissance des propriétés des nombres séparément et en relation <les uns avec les autres>*. Ce chapitre précède quatre autres qui sont consacrés à la Géométrie et qui composent avec lui le premier genre [HOGENDIJK, 1994].

La première espèce est divisée en quatre sections correspondant aux différents points de vue selon lesquels les propriétés des nombres devaient être appréhendées et étudiées: des propriétés intrinsèques, des propriétés découlant des nombres, en tant qu'ils sont rapportés les uns aux autres, ou en tant qu'ils sont semblables aux lignes aux surfaces et aux volumes, ou en tant qu'ils sont rapportés à leurs parties. Il faut tout de suite préciser, à propos de cette division, qu'elle n'est pas spécifique au chapitre arithmétique de *l'Istikmāl* [DJEBBAR, 1996].

## Abreviations

$D_i$ = Définition n° i. $A_i$ = Axiome n° i. $N_i$ = Notion commune n° i.

[E: IX; 21] = Proposition 21 du Livre IX des *Eléments* d'Euclide (selon la numérotation de Heiberg [HEATH, 1956; VITRAC, 1994]).

[I-T: IX; 5] = Proposition 5 du livre IX de la traduction arabe des *Eléments* d'Euclide par Isḥāq Ibn Ḥunayn, révisée par Thābit Ibn Qurra.

[Th: I; 1] = Proposition 1 du Livre I des *Eléments* dans le manuscrit Oxford Thurston 11.

[Ms. SP: I; 1] = Proposition 1 du Livre I des *Eléments* dans le manuscrit St Pétersbourg n° C 2145.

[Ms. RH: I; 1] = Proposition 1 du Livre I des *Eléments* dans le manuscrit Rabat Hasaniya n° 1103.

[Ms. TM: I; 1] = Proposition 1 du Livre I des *Eléments* dans le manuscrit Téhéran Majlis n° 200.

[TU: I; 1] = Proposition 1 du Livre I des *Eléments* dans la Rédaction d'aṭ-Ṭusī.

[IS: I; 1] = Proposition 1 du Livre I des *Eléments* dans la Rédaction d'Ibn Sīnā.

[N: I; 3] = Proposition 3 du Chapitre I de l'*Introduction Arithmétique* de Nicomaque.

[T; 5] = Proposition 5 de l'*Epître sur les Nombres amiables* de Thābit Ibn Qurra.

[R: I; $D_5$] = Définitions 5 du Chapitre I du Livre des *Rasā'il* des Ikhwān aṣ-Ṣafā' relatif à la Théorie des nombres.

[M: I; 1] = Proposition 1 de la section I (de la Première Espèce) du Kitāb al-Istikmāl d'al-Mu'taman.

[S: I; 1] = Proposition 1 de la section I (de la Première Espèce) du Kitāb al-Ikmāl d'Ibn Sartāq.

<...>: Les mots et phrases entre guillements simples ont été ajoutés par nous.

≈: Nous signifions, par ce symbole, que certaines définitions ou propositions d'al-Mu'taman qui ne correspondent à aucune définition ou proposition des Livres VII, VIII, IX des *Éléments,* sont à rapprocher de définitions ou de propositions d'autres Livres des *Éléments.* dont nous mentionnons la référence entre crochets.

## Première section: *Sur les propriétés premières existant dans les nombres*

### *Contenu de la section*

La première section commence par une présentation du système décimal suivie d'un ensemble de notions communes, d'axiomes et de définitions. Les notions communes, au nombre de 9, sont exactement celles du Livre I des *Eléments,* à l'exception de la neuvième, qui concerne l'égalité arithmétique et qui se substitue à celle du Livre I sur l'égalité géométrique basée sur la coïncidence des figures [VITRAC, 1990, p. 178][1]. Sur les 15 définitions données par al-Mu'taman, 10 sont tirées du Livre VII des *Eléments* [VITRAC, 1994, pp. 248-268], trois autres s'apparentent à des définitions de *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque de Gérase, même si elles s'en distinguent parfois au niveau de la formulation. Les deux qui restent semblent avoir été ajoutées par al-Mu'taman[2]. Quant aux axiomes, ils sont au nombre de deux et ils correspondent à des axiomes énoncés par Nicomaque[3].

Les propositions de la première section sont au nombre de 47.8 d'entre elles regroupent les 10 premières propositions du Livre II des *Eléments* ou plutôt une extension de ces propositions au domaine des entiers[4]. L'idée d'arithmétiser les 10 propositions du Livre II n'est pas nouvelle dans la tradition mathématique arabe. On la trouve, en particulier, dans le commentaire d'an-Nayrīzī (IX^e^-X^e^ s.) aux *Eléments* [ms. Leiden Or. 399/1, ff. 25a-31b] et dans les *Rasā'il* des Ikhwān aṣ-Ṣafā' (X^e^ s.). Dans le chapitre de cette encyclopédie, intitulé *Section sur des questions du second Livre des Eléments d'Euclide,* les auteurs énoncent, sans démonstration, les 10 propositions et ils les illustrent, à chaque fois, par des exemples numériques.

Dans cette opération de *traduction* arithmétique des propositions du Livre II, les termes géométriques de *droite, segment* et *rectangle* sont remplacés respectivement par *nombre, partie* et *produit* [Ikhwān aṣ-Ṣafā' non datée, pp.

72-75; GOLDSTEIN, 1964, pp. 154-157; BRENTJES, 1984, pp. 249-253]. C'est ce que fait également al-Mu'taman.

En ce qui concerne l'ordre d'exposition des 10 propositions, al-Mu'taman respecte l'agencement d'Euclide, mais les propositions sont insérées dans une présentation plus large qui amène l'auteur à regrouper les trois premières propositions en une seule (la proposition 9, suivie de deux corollaires), et à les compléter par 4 nouvelles propositions qui forment, avec la proposition 9, un groupe homogène dans la mesure où elles traitent toutes des propriétés du produit: commutativité et distributivité par rapport à l'addition ou à la soustraction[5].

Les propositions de la première section de la première espèce de *l'Istikmāl* qui n'ont pas de lien direct avec le Livre II des *Eléments*, et qui sont au nombre de 39, peuvent être regroupées en trois catégories: 19 d'entre elles correspondent à 22 propositions du Livre VII et 11 correspondent à 12 propositions du Livre IX. Quant aux 9 propositions restantes, leur origine n'est pas évidente et on ne peut avancer que des hypothèses prudentes et provisoires à leur sujet.

Une présentation et une analyse de cette catégorie de propositions seront insérées dans un article en préparation mais, d'ores et déjà, nous pouvons dire que certaines d'entre elles ne semblent être rattachées à aucun résultat antérieur connu. Ces propositions peuvent donc avoir été empruntées à des traités Mathématiques arabes qui ne nous sont pas parvenus, mais elles peuvent être, tout aussi bien, attribuées à al-Mu'taman lui-même qui aurait été amené à les établir pour les besoins de la cohérence interne de la section, en particulier au niveau de sa structure déductive. Cette remarque s'applique d'ailleurs à d'autres propositions des section II et III de la première espèce et même à certaines propositions de la partie géométrique de *l'Istikmāl* [HOGENDIJK, 1991].

A ces remarques d'ordre général, nous pouvons ajouter quelques remarques plus précises: la proposition 27 n'a pas d'équivalent dans les *Eléments* parce qu'elle se base sur une classification des nombres pairs qui n'a pas été envisagée par Euclide dans son traité. C'est là une illustration de la démarche d'al-Mu'taman consistant à intégrer, dans un seul chapitre, des *Éléments* provenant des différentes traditions arithmétiques qui sont parvenus en Andalus. Il s'agit là, en l'occurrence, de la tradition néo-pytagoricienne transmise aux Arabes à travers *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque qui était accessible, dès le IX^e^ siècle, grâce aux traductions de Ḥabīb Ibn Biḥrīz et de Thābit Ibn Qurra [BRENTJES, 1989; 1990a; 1990b].

Parmi les propositions ajoutées par al-Mu'taman, il y a celles qui complètent celles des *Eléments.* C'est le cas de [M; I, 2] sur la somme d'un pair et d'un impair[6], qui complètent [E; IX, 21 et 22], ou bien [M; I, 4, 5 et 6] sur les propriétés des suites arithmétiques. Il est possible que l'idée de ces propositions tire son origine du chapitre XXIII de *l'Introduction Arithmétique* sur la médiété arithmétique [KUTSCH, 1958, p. 96; BERTIER, 1978, p. 128]. Il y a enfin celles qui peuvent être considérées comme des généralisations de résultats établis par Euclide, comme c'est le cas pour [M; I, 2] qui généralise la proposition [M; I, 15], cette dernière étant elle-même une extension de [E; II, 5] au domaine des nombres[7].

Il nous reste à faire quelques remarques sur la manière dont al-Mu'taman a réécrit les propositions de cette première section qu'il a empruntées aux Livres VII et IX des *Eléments.* Pour la majorité de ces propositions, on constate qu'al-Mu'taman reproduit à la fois l'énoncé et la preuve d'Euclide. Mais, pour certaines d'entre elles, il fournit une preuve nouvelle. Cela a lieu lorsque Euclide utilise des outils ou des concepts qu'al-Mu'taman introduit dans les sections suivantes de son chapitre, comme c'est le cas, par exemple, dans [M; I, 10], ou bien lorsque il utilise le résultat d'une nouvelle proposition absente des *Eléments,* comme il le fait dans [M; I, 3b]. Mais, la situation la plus intéressante est celle où il semble vouloir éviter le raisonnement par l'absurde, comme dans [M; I, 34].

*<Definitions>*[8]

**[M: I; $D_1$]**

*L'un est ce par quoi chaque chose existante est nommée un du point de vue de son unification et de son individualisation.*

(1)- [M: I; $D_1$] ≈ [S: I; $D_1$] ≈ [E: VII; $D_1$][9].

(2)- al-Mu'taman ajoute l'expression: *min jihati ittiḥ ādihī wa infirādihī* [du point de vue de son unification et de son individualisation].

Cet ajout est à mettre en correspondance avec l'ajout d'Ibn Sīnā: *wa huwa maʿnā kawn ash-shay' ghayr dhī qisma bi l-ʿaql* [cela signifie que la chose est indivisible par l'intellect][10].

Il est également à mettre en correspondance avec le passage suivant des Ikhwān aṣ-Ṣafā':

"l'un est dit selon deux points de vue: ou bien au sens propre ou bien par convention. L'un au sens propre est la chose qui n'a pas de partie du tout et qui ne se divise pas. Et tout ce qui ne se divise pas est un de ce point de vue-là selon lequel il ne se divise pas. Et si tu veux, tu peux dire: l'un est ce qui ne contient pas autre <chose> que lui, en tant qu'il est un. Quant à l'un par convention, c'est tout ensemble dit un comme lorsqu'on dit une dizaine, une centaine, un millier. Et l'un est un par l'unité comme le noir est noir par la noirceur et l'unité est un attribut de l'un comme la noirceur est un attribut du noir"[11].

(3)- al-Mu'taman utilise, comme Ikhwān aṣ-Ṣafā', le terme *l'un* à la place du terme *l'unité* que l'on trouve habituellement dans la tradition arabe des Eléments[12]. Il remplace également l'expression *est dite* par l'expression *est nommée.*

(4)- Ibn Sartāq (f. 7a) reprend, mot pour mot, la formulation de cette définition donnée par Ibn Sīnā: *l'unité est ce par quoi toute chose est dite un.*

**[M: I; $D_2$]**
*Le* nombre *est la multitude assemblée <à partir> des uns.*

(1)- [M: I; $D_2$] ≈ [M: S; $D_2$] ≈ [E: VII; $D_2$][13]

(2)- al-Mu'taman substitue le mot *kathra (multitude)* au mot *jamā*ᶜ*a* [collection], comme l'avaient fait les Ikhwān aṣ-Ṣafā'[14]. Il substitue également le mot *mujtama*ᶜ*a [assemblée]* au mot *murakkaba [composée].*

(3)- Ibn Sartāq reprend la formulation d'al-Mu'taman en substituant le mot *waḥadāt [unités]* à *āḥād [uns],* pour être en conformité avec sa propre formulation de $D_1$.

2. Ibn Sartāq, en marge: *et tout nombre se nombre lui-même par un et un le nombre par lui.*

**[M: I; $D_3$]**
*Il y a douze termes pour les nombres, dont neuf pour les unités et trois <respectivement> pour les dizaines, centaines, milliers.*

1. Cette définition n'existe pas dans les *Eléments.*

2. al-Mu'taman inclut explicitement *un* parmi la suite des nombres entiers naturels.

3. Ibn Sartāq a supprimé cette définition.

**[M: I; $A_1$]**
*Un nombre est soit pair soit impair.*

1. Cet énoncé n'existe pas dans les *Eléments.*

2. Nicomaque: *Le pair et l'impair sont la première division du nombre* [BERTIER, 1978, p. 60].

2. Il n'existe pas chez les Ikhwān aṣ-Ṣafā'.

3. Ibn Sartāq a supprimé cet énoncé.

**[M: I; $D_4$]**
*Le pair est celui qui se divise en deux parties <entières> égales.*

1. [M: I; $D_4$] ≈ [S: I; $D_3$] ≈ [E: VII; $D_6$][15].

2. $D_3$, $D_4$, $D_5$ ne sont pas exposés par al-Mu'taman dans la Section 1 car elles concernent en fait la Section 2 qui traite des *propriétés des nombres en tant qu'ils sont rapportés les uns aux autres.*

**[M: I; $D_5$]**
*L'impair est celui qui ne se divise pas en deux parties <entières> égales. Ses deux parties les plus proches de l'égalité sont telles que l'une excède l'autre de un ou est déficiente par rapport à l'autre de un.*

1. [M: I; $D_5$] ≈ [S: I; $D_5$] ≈ [E: VII; $D_7$][16] + *l'une de ses deux parties, la plus proche des deux parties égales, excède l'autre partie de un ou en est déficiente de un.*

2. al-Mu'taman tronque la définition d'Euclide et la complète. Son complément diffère de toutes les autres formulations connues de la tradition arabe.

3. Ibn Sartāq a une formulation différente: *l'impair est celui qui ne se divise en deux parties égales que si s'interpose l'unité.*

**[M: I; $D_6$]**
*Le pairement-pair est celui qui se divise en deux parties égales, ainsi que ses parties et les parties de ses parties et ce jusqu'à un.*

1. [M: I; $D_6$] = [S: I; $D_6$] = [N] ≠ [E: VII; $D_8$][17]

2. La formulation est proche de celle des Ikhwān aṣ-Ṣafā'[18].

3. La formulation d'Ibn Sartāq est proche de celle d'Ibn Sinā: *le pairement-pair est celui que nombre un pair à l'aide d'un pair et rien d'autre.*

**[M: I; $D_7$]**
*Le pairement-impair est celui qui se divise en deux parties égales, sans plus.*

Remarques:

1. [M: I; $D_7$] = [S: I; $D_7$] = [N] ≠ [E: VII; $D_9$][19]

2. al-Mu'taman adopte la formulation de Nicomaque et des Ikhwān aṣ-Ṣafā'.

3. La formulation d'Ibn Sartāq est différente et beaucoup plus longue.

**[M: I; $D_8$]**
*Le pairement-pair-impair est celui qui se divise en deux parties égales, ainsi que ses parties, et ainsi de suite, jusqu'à un nombre impair.*

1. [M: I; $D_8$] = [S: I; $D_8$] = [N]

2. Elle n'existe pas dans les *Eléments*[20].

3. La formulation d'Ibn Sartāq est proche de celle d'Ibn Sīnā.

**[M: I; $D_9$]**
*Un nombre mesure un nombre plus grand si ce dernier est égal à un certain nombre de fois le plus petit.*

1. [M: I; $D_9$] ≈ [M: I; $D_9$] ≈ [E: V; $D_1$+ $D_2$][21]

2. La formulation d'Ibn Sartāq est différente: *Tout nombre est une partie de l'autre s'il le nombre par un ou par plus <que un>.*

3. Cette définition complète [E: VII; $D_3$] dans laquelle le concept de *mesurer* n'est pas défini.

**[M: I; $A_2$]**
*Un nombre est soit premier soit composé.*

1. Cet énoncé n'existe pas dans les *Eléments.*

2. Ibn Sartāq ne le mentionne pas.

**[M: I; $D_{10}$]**
*Un nombre est premier s'il n'est pas mesuré par un nombre autre que un.*

1. [M: I; $D_{10}$] = [S: I; $D_{10}$] = [E: VII; $D_{12}$][22]

2. al-Mu'taman ajoute: *un nombre autre que un.* Il semble donc inclure implicitement *un* parmi les nombres.

3. La formulation d'Ibn Sartāq exclut *un* des nombres: *le <nombre> premier est celui qui n'est nombré que par lui et un.*

**[M: I; $D_{11}$]**
*Un nombre composé est celui qui est divisible par un nombre autre que un.*

1. [M: I; $D_{11}$] = [E: VII; $D_{14}$][23]

2. al-Mu'taman ajoute: *un nombre autre que un.*

3. La formulation d'al-Mu'taman est, mot pour mot, celle d'Ibn Sīnā.

4. La formulation d'Ibn Sartāq est différente. Il appelle le nombre composé *le second.*

**[M: I; $D_{12}$]**
*Les nombres dont chacun est dit premier pour l'autre sont ceux qui ne sont nombrés par aucun autre nombre que un.*

1. [M: I; $D_{12}$] = [E: VII; $D_{13}$][24]

2. al-Mu'taman ajoute: *autre nombre que un.*

3. Ibn Sartāq utilise le terme *Mutabāyin* à la place de *awwal ᶜinda l-ākhar* [premier pour l'autre]. Sa formulation est proche de celle d'Ibn Sinā.

**[M: I; $D_{13}$]**
*Les nombres composés sont ceux qui ont un nombre commun autre que un qui les nombre.*

1. [M: I; $D_{13}$] = [E: VII; $D_{15}$][25]

2. al-Mu'taman ajoute: *un nombre autre que un.*

3. Formulation d'Ibn Sartāq différente et très concise.

**[M: I; $D_{14}$]**
*Un nombre est dit "multiplié par un nombre" lorsqu'il est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur. Le résultat du produit est un nombre-plan dont les deux côtés sont les deux nombres multipliés.*

1. [M: I; $D_{14}$] = [S: I; $D_{14}$] = [E: VII; $D_{16}$] + [E: VII; $D_{17}$][26]

**[M: I; $D_{15}$]**
*Le nombre multiplié par le nombre de ses unités est un carré.*

1. [M: I; $D_{15}$] = [E: VII; $D_{19}$][27]

2. al-Mu'taman omet la deuxième formulation euclidienne qui définit le nombre carré comme celui qui est *contenu par deux nombres égaux.*

3. Ibn Sartāq utilise une terminologie algébrique: *s'ils sont égaux, c'est le carré et le māl et celui qui a une racine et chacun d'eux est sa racine.*

4. Ibn Sartāq ajoute: *le produit de la racine par le carré est le cube et son produit par lui est le māl-māl et ainsi de suite.*

***Définitions du Livre VII des* Eléments *non reprises par al-Mu'taman dans la Section 1***

1. [E: VII; $D_{10}$], [E: VII; $D_{18}$], [E: VII; $D_{20}$]: Elle ne sont reprises dans aucune version arabe des *Eléments* (que j'ai consultées).

2. [E: VII; $D_3$], [E: VII; $D_4$], [E: VII; $D_5$], [E: VII; $D_{20}$]: Elles sont reprises par al-Mu'taman dans la Section 2.

***Notions communes*[28]:**

**[M: I; $N_1$]**
*Les choses égales à une même chose sont égales.*

1. [M: I; $N_1$] = [S: I; $N_{3,a}$] = [E: I; $N_1$]

**[M: I; $N_2$]**
*Si on ajoute à des <choses> égales des <choses> égales, elles deviennent toutes égales.*

1. [M: I; $N_2$] = [S: I; $N_{5,a}$] = [E: I; $N_2$]

2. Ibn Sartāq regroupe $N_2$ et $N_3$ ainsi: *Si on ajoute à des <choses> égales ou si on leur retranche des <choses> égales, elles deviennent ou restent toutes égales.*

**[M: I; $N_3$]**
*Si on retranche de <choses> égales des <choses> égales, les restantes deviennent égales.*

1. [M: I; $N_3$] = [S: I; $N_{5,b}$] = [E: I; $N_3$]

**[M: I; $N_4$]**
*Si on ajoute à des <choses> inégales des <choses> égales, les restantes deviennent inégales.*

1. [M: I; $N_4$] = [S: I; $N_{6,b}$] = [E: I; $N_4$]

2. Ibn Sartāq la formule ainsi: *Si on ajoute à des <choses> égales des <choses> inégales ou si on ajoute à des <choses> inégales des <choses> égales, les restants et les résultats seront inégaux.*

**[M: I; $N_5$]**
*Si on retranche de <choses> inégales des <choses> égales, les restantes deviennent inégales.*

1. [E: I; $N_5$] = [S: I; $N_{6,a}$] = [E: I; $N_5$]

2. Ibn Sartāq la formule ainsi: *Si on retranche de <choses> inégales des <choses> égales ou si on retranche de <choses> égales des <choses> inégales, les restants et les résultats seront inégaux.*

**[M: I; $N_6$]**
*Celles qui sont le double d'une même chose sont égales.*

1. [M: I; $N_6$] = [S: I; $N_{3,b}$] = [E: I; $N_6$]

**[M: I; $N_7$]**
*Celles qui sont la moitié d'une même chose sont elles aussi égales.*

1. [M: I; $N_7$]= [E: I; $N_7$] 1 [S: I; $N_{3,c}$]

2. Ibn Sartāq regroupe en fait $N_1$, $N_6$ et $N_7$ dans la formulation suivante: *Les choses qui sont tout entière égales à une même chose, ou des multiples, ou une partie, ou des parties <d'elle>, sont égales.*

**[M: I; $N_8$]**
*Le tout est plus grand que la partie.*

1. [M: I; $N_8$] = [S: I; $N_2$] = [E: I; $N_9$]

**[M: I; $N_9$]**
*Si deux choses sont telles que chacune d'elles est supérieure à tout ce à quoi l'autre est supérieure et inférieure à tout ce à quoi l'autre est inférieure, alors elles sont égales.*

1. [M: I; $N_9$] = [S: I; $N_{3,b}$]

2. Cette notion commune n'existe pas dans les *Eléments*[29].

3. al-Mu'taman l'utilise dans les démonstrations de type archimédien qu'il expose dans sa partie géométrique [HOGENDIJK, 1991, pp. 268-269].

***Propositions***

**[M: I; 1]**
*Si on ajoute des nombres entiers pairs, en nombre quelconque, la somme est un nombre pair.*

1. [M: I; 1] = [E: IX; 21]

2. La preuve est faite avec 3 grandeurs dans [M; I, 1] et avec 4 dans [E; IX, 21].

3. La preuve de [M; I, 1] est celle de [E; IX, 21], mais plus détaillée.

4. [M: I; 1] = [S: I; 1]: même énoncé (résumé), même preuve (très résumée), utilisant également 3 grandeurs.

**[M: I; 2]**
*Si on additionne un nombre pair et un nombre impair, la somme est un nombre impair.*

1. [M; I, 2] n'a pas d'équivalent dans [E; IX].

2. [M; I, 2] = [S: I; 1]: même énoncé, même preuve.

**[M: I; 3]**
*Si on ajoute des nombres impairs en nombre quelconque et:*
*a) si leur nombre est impair, leur somme sera impaire.*
*b) si leur nombre est pair, leur somme sera paire.*

1. [M: I; 3] = [E: IX; 22] + [E: IX; 23] (énoncé + preuve: identiques).

2. La preuve de [M; I, 3a] est identique à celle de [E; I, 22].

3. [M; I, 3b] utilise [M; I, 2] qui n'existe pas dans [E; IX].

4. La preuve de [S; I, 3a] est identique à celle de [M; I, 3a].

5. La preuve de [S; I, 3b] est différente, à la fois, à celle de [E: IX; 23] et à celle de [M; I, 3b][30].

**[M: I; 4]**
*Si* $a_1, a_2, a_3, a_4$, *sont des entiers vérifiant:* $a_1 - a_2 = a_3 - a_4$
*alors:* $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$
*[Inversement]:*
*Si* $a_1 > a_2$ *et* $a_3 > a_4$ *et si:* $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$
*alors:* $a_1 - a_2 = a_3 - a_4$

1. [M: I; 4] n'existe ni dans les *Eléments* ni dans *l'Introduction Arithmétique.*

2. [M: I; 4] = [S: I; 4]: même énoncé et même preuve.

3. Ni al-Mu'taman ni Ibn Sartāq ne font allusion à la méthode algébrique:
[a) $(a_1 - a_2 = a_3 - a_4) \Rightarrow (a_1 + a_4 = a_2 + a_3)$, par le jabr.
b) $(a_1 + a_4 = a_2 + a_3) \Rightarrow (a_1 - a_2 = a_3 - a_4)$, par le jabr].

**[M: I, 4, Corol]**
*Il s'en déduit que si* $a_1, a_2, a_3$, *a vérifient:* $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$,
*alors:* $a_1 + a_3 = 2a_2$

**[M: I; 5]**
*a) Si une suite de nombres* $a_1, ..., a_n$, *vérifie:* $a_{k+1} - a_k = a_{n-k+1} - a_{n-k}$ *pour tout k, alors:* $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$, *pour tout k.*

*b) [Inversement], si: $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$, pour tout k,*
*alors: $a_{k+1} - a_k = a_{n-k+1} - a_{n-k}$ pour tout k*

1. [M: I; 5] n'existe pas dans les *Eléments.*

2. [M: I; 5] = [S: I; 5]: même énoncé et même preuve.

**[M: I; 6]**

*Si une suite de nombres [$a_1$, ..., $a_n$] vérifie: $a_{k+1} - a_k = a_{n-k+1} - a_{n-k}$ pour tout k,*
*alors:*

$$\sum_{n}^{1} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

1. [M; I, 6] n'existe pas dans les *Eléments.*

2. Cette proposition est plus générale que celle sur les séries arithmétiques qui n'est ni énoncée ni évoquée par al-Mu'taman.

3. [M: I; 6] = [S: I; 6]: même énoncé et même preuve.

**[M: I; 7]**

*Le produit d'un nombre pair par un nombre [quelconque] est un nombre pair.*

1. [M: I, 7] = [E: IX, 28]

2. L'énoncé d'al-Mu'taman est plus général que celui d'Euclide, mais la preuve est identique.

3. [M: I, 7] = [S: I, 7]: même énoncé et même preuve.

**[M: I; 8]**

*Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.*

[M: I, 8] = [E: IX, 29]: énoncé et preuve identiques.

[M: I, 8] = [S: I, 8]: énoncé et preuve identiques.

**[M: I; 9]**

*Deux nombres quelconques <étant donnés>, si l'un des deux est divisé en un nombre quelconque de parties, le produit du nombre qui n'a pas été divisé* *par le nombre divisé est comme le produit du nombre qui n'a pas été divisé par les parties du nombre divisé.*

1. [M: I, 9] = [R: I; 1][31]

2. [M: I, 9] = [S: I, 9]

3. [M: I, 9] est la formulation arithmétique de [E: II, 1]. Elle est à comparer avec la formulation arithmétique de [E: V, 1][32].

**[M: I; 9, Corol 1]**
*Si a est divisé en parties, $a^2$ est égal à la somme des produits de a par chacune de ses parties.*

1. [M: I; 9, corol 1] = [E: IX; 2] = [R: I; 2][33]

2. [M: I; 9, corol 1] est la formulation arithmétique de [E: II, 2]

**[M: I; 9, Corol 2]**
*Si $a = a_1 + a_2$*
*alors: $a \cdot a_1 = (a_1)^2 + a_2 a_1$*

1. [M: I; 9, corol 2] = [E: IX; 3] = [R: I; 2][34]

2. [M: I; 9, corol 2] est la formulation arithmétique de [E: II, 3]

**[M: I; 10]**
*Pour tous nombres entiers [a, b], leur produit est multiplié de chacun d'eux autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre, et on a: $a \cdot b = b \cdot a$*

1. [M: I; 10] = [E: VII; 16]: énoncé identique et preuves différentes.

2. [M: I; 10] = [S: I; 10]

3. Al-Mu'taman et Ibn Sartāq évitent la preuve par les proportions utilisée par Euclide.

**[M: I; 11]**
*Soit $a_1$, $a_2$, $a_3$, trois nombres entiers quelconques.*
*Alors: $(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)$*

1. [M: I; 11] = [S: I; 11].

2. Ibn Sartāq ajoute: *De cela il découle que (ab)g = (ag)b, en considérant b à la place de a et vice-versa <dans la relation déjà démontrée: (ab)g = (gb)a>.*

**[M: I; 12]**
*Etant donné deux nombres entiers divisés en parties, le produit des deux nombres ést égal à la somme des produits des parties de l'un et de l'autre deux à deux.*

1. Cette proposition est à rapprocher de [M: I; 9] = [E: II; 1] = distributivité additive.

2. [M: I; 12] = [S: I; 12]. La formulation d'Ibn Sartāq est très résumée et elle suit la démarche suivantes:

$$ab = \sum_{i=1}^{i=n} ab_i = \sum_{i=1}^{i=n} b_i a = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{j=1}^{j=m} b_i a_j\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} a_j b_i$$

**[M: I; 13]**
*Soit a, b, g, d, des entiers [avec: $g < a$ et $d < b$],*
*alors: $(a-g)(b-d) = ab + gd - ad - bg$*

1. [M: I; 13] ≈ [E: V; 5] (= distributivité soustractive).

2. [M: I; 13] = [M: I; 13]. Mêmes notations.

3. Ibn Sartāq saute des étapes de la démonstration en utilisant, implicitement [M; I, 11] au lieu de [M; I, 9].

4. Ibn Sartāq ajoute cette phrase:

"Et c'est cela le fondement dans la multiplication des deux nombres qui ont un retranchement et dans ce qui l'a précédé pour les deux <nombres> qui ont une composition; leur démonstration par les lignes sera également donnée" [f. 8b].

5. Aucune allusion, ni chez al-Mu'taman ni chez Ibn Sartāq, au procédé algébrique de la tradition d'al-Khwārizmī pour démontrer cette proposition.

**[M: I; 14]**
*Si $a = a_1 + a_2$,*
*alors: $a^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + 2a_1 \cdot a_2$*

1. [M: I; 14] = [R: I; 4][35]

2. [M: I; 14] = [S: I; 14]: mêmes notations.

3. [M: I; 14] est une formulation arithmétique de [E: II; 4]

**[M: I; 15]**
*Si a est un nombre pair avec:* $a = a_1 + a_2$, *avec* $a_1 \neq a_2$ $[a_1 > a_2]$
*alors:*

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a_1 \cdot a_2 + \left(a_1 - \frac{a}{2}\right)^2$$

1. [M: I; 15] = [R: I; 5][36]

2. [M: I; 15] = [S: I; 15]: mêmes notations.

3. [M: I; 15] est une formulation arithmétique de [E: II; 5].

**[M: I; 16]**
*Si a est pair et b quelconque,*
*on a:*

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = (a + b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

1. [M: I; 16] = [R: I; 6][37]

2. [M: I; 16] = [S: I; 16]: mêmes notations.

3. [M: I; 16] est une formulation arithmétique de [E: II; 6].

**[M: I; 17]**
*Si:* $a = a_1 + a_2$
*alors:* $a^2 + (a_1)^2 = 2a \cdot a_1 + (a_1)^2$ *et* $a^2 + (a_1)^2 = 2a \cdot a_2 + (a_1)^2$

1. [M: I; 17] = [R: I; 7][38]

2. [M: I; 17] = [S: I; 17]: mêmes notations.

3. [M: I; 17] est une formulation arithmétique de [E: II; 7].

**[M: I; 18]**
*Si:* $a = a_1 + a_2$, *alors:* $(a + a_1)^2 = 4a \cdot a_1 + (a_2)^2$

1. [M: I; 18] = [R: I; 8][39]

2. [M: I; 18] = [S: I; 18]: mêmes notations.

3. [M: I; 18] est une formulation arithmétique de [E: II; 8].

**[M: I; 19]**
*Si a est pair et* $a = a_1 + a_2$; $a_1 \neq a_2$ $[a_1 < a_2]$, *alors:*

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} - a_1\right)^2$$

1. [M: I; 19] = [R: I; 9][40]

2. [M: I; 19] = [S: I; 19]: mêmes notations.

3. [M: I; 19] est une formulation arithmétique de [E: II; 9].

4. Ibn Sartāq donne une preuve différente, plus courte, mais qui utilise les mêmes outils.

**[M: I; 20]**
*Si a est pair et b quelconque, alors:*

$$2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 = (a + b)^2 + b^2$$

1. [M: I; 20] = [R: I; 10][41]

2. [M: I; 20] = [S: I; 20]: mêmes notations.

3. [M: I; 19] est une formulation arithmétique de [E: II; 10].

4. Ibn Sartāq donne une preuve différente, plus courte, mais qui utilise les mêmes outils.

**[M: I; 21]**
*Si* $a = a_1 + a_2$, *avec:* $a_1 \neq a_2$ *et* $a = b_1 + b_2$, *avec:* $b_1 \neq b_2$ *[avec:* $a_1 < b_1 < b_2 < a_2$*], alors:* $a_1a_2 + (b_1 - a_1)(a - a_1 - b_1) = b_1b_2$

1. [M: I; 21] = [S: I; 21]: mêmes notations.

2. Ibn Sartāq donne une preuve différente, plus courte, mais qui utilise les mêmes outils. La formulation de l'énoncé est également différente (cela est possible car: $b_1 - a_1 = a_2 - b_2$).

3. Ibn Sartāq ajoute ceci:

a) Si on suppose BE > AE, elles ne se dépassent pas (?).
b) Si BE = AE, alors (si $a = a_1 + a_2$):

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(a_2 - \frac{a}{2}\right)^2 + a_1 a_2$$

et c'est la proposition 15.

c) Il est possible d'affirmer ceci (c'est à dire [S; I, 21]) pour inclure cela (c'est à dire [S; I, 15]), et ce en supprimant la contrainte [qayd] de la différence dernière [f. 9a].

**[M: I; 22]**
*Si b est pair, a impair et $b = g \cdot a$, alors g est pair.*

1. [M: I; 22] = [E: IX; 30] = [T: IX; 31].

2. Correspond à la preuve par l'absurde de IX; 30).

3. [M: I; 22] = [S: I; 22]: mêmes notations.

**[M: I; 23]**
*Si b est impair, a impair et $b = g \cdot a$, alors g est impair.*

1. [M: I; 23] = [T: IX; 31].

2. Cette proposition n'existe pas dans les *Eléments.*

3. [M: I; 23] = [S: I; 23]: mêmes notations.

**[M: I; 24]**
*Si $a = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$, alors a est pair ou pairement-pair seulement. D'autre part, si b divise a, b est soit pair soit pairement-pair. Et si: $a = n \cdot b$, n est pair ou pairement-pair seulement.*

1. [M: I; 24] ≈ [E: IX; 32].

2. [M: I; 24] = [S: I; 24]: mêmes notations, même démarche. Formulation plus courte.

**[M: I; 25]**
*Si a et b sont pairement-pairs, et $b < a$, alors b divise a.*

[M: I; 25] ≈ Réciproque de [E: IX; 32] ?
[M: I; 25] = [M: I; 25]: démarche semblable, mais formulation différente.

3. Ibn Sartāq introduit le concept de position [martaba] qui lui permet de résumer la preuve de la manière suivante:

Soit b < a et soit

$$g = \frac{a}{2},\ d = \frac{g}{2},\ e = \frac{d}{2} = 2$$

$$z = \frac{b}{2},\ h = \frac{z}{2} = 2$$

b < a ⇒ ordre(b) < ordre(a). Supposons ordre(b) = ordre(g). Donc b et g étant les mêmes multiplesde de 2 sont égaux. Or g nombre a. Donc b nombre a.

**[M: I; 26]**
*Si AB est tel que* $\frac{AB}{2}$ *est impair, alors AB est pairement-impair seulement. Et si AB = d·e alors d est nécessairement impair et e est pair-impair ou d est pair et e impair.*

1. [M: I; 26] ≈ [E: IX; 33].

2. [M: I; 26] = [S: I; 26]: même démarche (plus concise) et mêmes outils.

**[M: I; 27]**
*Si AB est p(p-i), et: AB = g·d,*
*alors:*
*a) Si g = (i) ⇒ d = p(p) ou d = p(p-i).*
*b) Si g = p(p) ⇒ d = (i) ou d = p(i) ou d = p(p-i).*
*c) Si g = p(p-i) ⇒ d = (i) ou d = p(i) ou d = p(p-i) ou d = p(p) ou d = (p).*
*d) Si g = p(i) ⇒ d = p(i) ou d = p(p) ou d = p(p-i).*
*e) Si g = (p) ⇒ d = d = p(p-i) ou d = p(i).*

1. [M: I; 27] n'existe pas dans les *Eléments*.

2. [M: I; 27] = [S: I; 27]: même démarche.

3. Ibn Sartāq améliore la formulation en la rendant, en introduisant des notations nouvelles: AK = n·s, et des lettres exprimant les nombres $2^k n$ et $2^p s$; ce qui rend la preuve plus explicite.

**[M: I; 28]**

*Si a est multiple d'un nombre b, il contient une partie homonyme de b.*

*[Inversement], si a contient une partie alors a est multiple du nombre b homonyme à cette partie.*

1. [M: I; 28] = [E: VII; 37] + [E: VII; 38]

2. [M: I; 28] = [S: I; 28]: même démarche et même formulation (plus concise).

**[M: I; 29]**

*Si:* $a = k\left(\frac{b}{n}\right)$, *avec:* $1 \leq k \leq n$, *alors:* $d \cdot a = k\left(\frac{d \cdot b}{n}\right)$

1. [M: I; 29] n'existe pas dans les *Eléments*[42].

2. [M: I; 29] = [S: I; 29]: même démarche, mêmes notations et même formulation.

3. Ibn Sartāq ajoute ceci:

Réciproquement:

1) si: $ac = \frac{1}{n}(bc)$, cela implique: $a = \frac{1}{n}(b)$

2) si: $ac = \frac{k}{n}(bc)$, cela n'implique pas: $a = \frac{k}{n}(b)$

car comme ac = a + a + ... + a, c fois et que: bc = b + ... + b, c fois, ses unités peuvent être supérieures ou égales aux unités du multiplicateurs (?).

Si ses unités sont aux unités du multiplicateur, l'implication a lieu. Mais si elles sont supérieures, l'implication n'est pas vraie[43].

**[M: I; 30]**

*a) Si un [1<sup>e</sup>] nombre est une ou des parties d'un 2<sup>e</sup> nombre, et si un 3<sup>e</sup> nombre est les mêmes parties d'un 4<sup>e</sup>, alors le produit du premier par le 4<sup>e</sup> est égal au produit du 2<sup>e</sup> par le 3<sup>e</sup>.*

*b) [Inversement], si quatre nombres [$a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$] sont tels que:* $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3$
*alors:*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$$

1. [M: I; 30] n'existe pas dans les *Eléments*[44].

2. [M: I; 30, a] = [S: I; 30, a]: même démarche et mêmes notations.

3. [M: I; 30, b] ≠ [S: I; 30,b]: dans la formulation et dans la démarche:

a) Cette réciproque est précédé par trois lemmes suivants:

Lemme 1:

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{BG}{ZH} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{AB + BG}{EZ + ZH} = \frac{1}{n} \quad \text{[E: VII; 5])}$$

Lemme 2:

$$AB = \frac{k}{n} EZ \text{ et } BG = \frac{k}{n} ZH \Rightarrow AG = \frac{k}{n} EH \quad \text{([E: VII; 6)]}$$

Lemme 3:

$$a = \frac{k}{n} b \text{ et } g = \frac{k}{n} d \Rightarrow \left(a = \frac{b}{m} \Rightarrow g = \frac{d}{m}\right)$$

b) La preuve de la réciproque a subi dès modifications sur le manuscrit lui-même: suppression de phrases entières et ajout d'autres phrases dans les marges [ff. 10b-11a]

c) L'énoncé de la réciproque a été modifié en tenant compte, semble-t-il, de la réciproque de [M: I; 29] qui a été ajoutée par Ibn Sartāq:

Si $a_1 a_4 = a_2 a_3$, alors:

1) si:

$$a_1 = \frac{1}{n} a_2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{n} a_4$$

2) si:

$$a_1 = \frac{k}{n} a_2, \text{ il existe un cas où: } a_3 = \frac{k}{n} a_4$$

Ibn Sartāq explicite sa pensée ainsi:

"Je ne dis pas, d'une manière générale que si $a_1 = (k/n)a_2$, alors: $a_3 = (k/n)a_4$, car cela n'est possible que dans les antécédents égaux et les conséquents égaux, comme cela a été <dit> précédemment".

d) Ibn Sartāq ajoute ceci: "J'ai établi une autre démonstration pour montrer les rapports de parties de AB à GD et de EZ à HT, et qui indique que des rapports égaux à un rapport sont égaux. Elle repose sur les propositions 31 et 32 et aucune de deux ne repose sur cette réciproque ni sur rien de ce qui précède. je l'évoquerai <donc> après elles" [f. 11b].

**[M: I; 31]**
*Etant donné deux nombres différents, si on retranche du plus grand ce qu'il contient comme multiple du plus petit et qu'il reste un nombre inférieur au plus petit et si on retranche du plus petit ce qu'il contient comme multiple de ce reste et qu'il reste un nombre inférieur à ce reste et si, en continuant ce procédé, on n'aboutit pas à un nombre qui mesure le reste précédent, et ce jusqu'à ce qu'on atteigne 1, alors les deux nombres différents sont premiers entre eux.*

1. [M: I; 31] = [E: VII; 1]: même formulation, même démarche et mêmes notations.

2. Comme Euclide, al-Mu'taman admet que si $\alpha$ mesure a et b, il mesure a-b et a-nb.

3. [M: I; 31] = [S: I; 31]: mêmes notations, même démarche, avec des différences dans la terminologie: al-Mu'taman utilise l'expression *awwal ᶜinda l-ākhar* pour dire que les deux nombres sont *premiers entre eux,* alors qu'Ibn Sartāq utilise l'expression *mutabāyinan.*

**[M: I; 32]**
*Trouver la plus grande commune mesure à deux nombres différents et non premiers entre eux.*

1. [M: I; 32] = [E: VII; 2]: mêmes formulations, mêmes notations et même démarche. Le corollaire est identique chez les deux auteurs. Comme Euclide, al-Mu'taman admet que si $\alpha$ mesure a et b, il mesure a+nb.

2. [M: I; 32] = [S: I; 32]: mêmes notations, même démarche, même corollaire.

3. Ibn Sartāq ajoute le cas où les deux nombres sont égaux qui n'est pas évoqué par al-Mu'taman.

4. Il revient à la réciproque de [M: I; 30] qu'il avait promis de redémontrer en utilisant les propositions 31 et 32.

5. Il établit aussi la proposition suivante:

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } \frac{c}{d} = \frac{\alpha}{\beta}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

**[M: I; 33]**
*Trouver la plus grande commune mesure [p.g.c.m.] à des nombres non premiers différents.*

1. [M: I; 33] ≈ [E: VII; 3]: même démarche, mêmes notations.

2. L'énoncé de [M; I, 33] est plus général. Il est énoncé pour un nombre quelconque de nombres, alors qu'Euclide l'énonce pour trois nombres; mais la preuve d'al-Mu'taman n'utilise que trois nombres, comme le fait Euclide.

3. al-Mu'taman omet de montrer que, dans le cas où d, le p.g.c.m. de a et b, ne mesure pas g, il ne lui est pas premier. Euclide le fait. Le Ms Escurial 907, f. 69a l'omet aussi. aṭ-Ṭūsī (Ms. Ahmet III, f. 61a) signale la raison d'une manière concise.

4. [M: I; 33] = [S: I; 33]: mêmes notations, même démarche.

5. Ibn Sartāq complète la preuve d'al-Mu'taman en montrant (comme le fait Euclide) que si d ne mesure pas g et d p.g.c.m. de a et b, alors d et g ne sont pas premiers entre eux.

**[M: I; 34]**
*Tout nombre est soit premier soit divisible par un nombre premier.*

1. [M: I; 34] = [E: VII; 31+32].

2. La preuve d'al-Mu'taman est complètement différente de celle d'Euclide qui utilise le raisonnement par l'absurde et le procédé de descente infinie.

3. [M: I; 34] = [S: I; 34]: mêmes notations, même démarche mais complétée, à la dernière étape, par un raisonnement aboutissant à une impossibilité.

**[M: I; 35]**
*Tout nombre premier est premier avec tout nombre qui ne le nombre pas.*

1. [M: I; 35] = [E: VII; 29].

2. [M: I; 35] = [S: I; 35]: mêmes notations, même démarche.

**[M: I; 36]**
*Tout nombre impair qui nombre un nombre pair, nombre sa moitié.*

1. [M: I; 36] = [E: IX; 30].

2. [M: I; 36] = [S: I; 36]: mêmes notations, même démarche.

**[M: I; 37]**
*Tout nombre impair, premier avec un autre, est encore premier avec son double.*

1. [M: I; 37] = [E: IX; 31].

2. [M: I; 37] = [S: I; 37]: mêmes notations, même démarche.

**[M: I; 38]**
*Si un nombre est premier avec un autre et si un nombre nombre l'un des deux, il est premier avec l'autre.*

1. [M: I; 38] = [E: VII; 23].

2. [M: I; 38] = [S: I; 38]: mêmes notations, même démarche.

**[M: I; 39]**
*a) Si d'un nombre on retranche un nombre qui est premier avec lui, il sera premier avec le reste.*
*b) Tout nombre qui est somme de deux nombres premiers entre eux est premier avec chacun de ces deux nombres.*

1. [M: I; 39] = [E: VII; 28]: Euclide établit b) avant a).

2. [M: I; 39] = [S: I; 39]: mêmes notations, même démarche. La deuxième partie de la preuve est plus explicite chez Ibn Sartāq.

**[M: I; 40]**
*Si un nombre premier divise le produit de deux nombres, il divise l'un d'eux.*

1. [M: I; 40] = [E: VII; 30]: la preuve d'al-Mu'taman est différente de celle d'Euclide.

2. [M: I; 40] = [S: I; 40]: la preuve d'Ibn Sartāq complète celle d'al-Mu'taman.

**[M: I; 41]**
*Si deux nombres sont premiers avec un troisième, leur produit est premier avec ce troisième.*

1. [M: I; 41] = [E: VII; 24].

2. [M: I; 41] = [S: I; 41]: mêmes notations, même démarche.

**[M: I; 42]**
*Si deux nombres sont premiers avec deux autres nombres, leur produit est premier avec le produit des deux autres nombres.*

1. [M: I; 42] = [E: VII; 26].

2. [M: I; 42] = [S: I; 42]: mêmes notations, même démarche.

**[M: I; 43]**
*Si deux nombres sont premiers entre eux, leurs carrés sont premiers entre eux, ainsi que leurs cubes, et ainsi de suite.*

1. [M: I; 43] = [E: VII; 27].

2. [M: I; 43] = [S: I; 43]: mêmes notations, même démarche, mais Ibn Sartāq est plus explicite.

3. Ibn Sartāq ajoute ceci: *les côtés sont premiers par rapports aux côtés de l'autre que les côtés soient du même ordre ou non.*

**[M: I; 44]**
*Trouver le plus petit nombre mesuré par deux nombres donnés.*

1. [M: I; 44] = [E: VII; 34].

2. [M: I; 44] = [S: I; 44]: rédaction différente de la preuve d'al-Mu'taman.

**[M: I; 45]**
*Si deux nombres mesurent un autre nombre, leur p.p.c.m. mesure ce nombre.*

1. [M: I; 45] = [E: VII; 35].

2. [M: I; 45] = [S: I; 45]: mêmes notations, même démarche.

**[M: I; 46]**
*On veut déterminer le p.p.c.m. de plusieurs nombres donnés. Soit a, b, g, ces nombres.*
*Soit e, le p.p.c.m. de a et b. Alors g mesure e ou ne le mesure pas.*

1. [M: I; 46] = [E: VII; 36].

2. [M: I; 46] = [S: I; 46]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq conclut ainsi: Il est possible de démontrer cette proposition sans répétition [tardīd], comme pour la proposition 33 [= recherche du p.g.c.d.].

**[M: I; 47]**
*Déterminer le plus petit nombre contenant des parties connues.*

1. [M: I; 47] = [E: VII; 39].

2. [M: I; 47] = [S: I; 47]: mêmes notations, même démarche.

## Section II: *sur les propriétés des nombres en tant qu'ils sont rapportés les uns aux autres*

### *Contenu de la section*

La deuxième section de la partie arithmétique de *l'Istikmal* comprend 17 définitions et 30 propositions.

La moitié des définitions de cette section correspond à des versions *arithmétisées* de définitions du Livre V des *Eléments*, tandis que trois, parmi celles qui restent, sont reprises du Livre VII. Al-Mu'taman complète cet ensemble en empruntant quatre définitions à *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque et en ajoutant deux autres que nous n'avons pu rattacher à aucune source connue[45].

En ce qui concerne les propositions établies dans cette section, 10 d'entre elles peuvent être mises en correspondance avec 16 propositions du Livre VII des Eléments. La différence que l'on constate entre le nombre des propositions dans l'un et l'autre groupe s'explique par la démarche d'al-Mu'taman qui consiste à fondre plusieurs propositions du Livre VII en une seule, chaque fois qu'il constate que certaines d'entre elles ne sont que des étapes (des lemmes dirions-nous aujourd'hui). C'est ainsi que [M; II, 2] correspond à [E. VII, 5, 6, 12] et que [M; II, 3] correspond à [E; VII, 9, 10, 13].

Parmi les propositions restantes, de la deuxième section, 10 sont une reprise de 10 propositions du Livre VIII et 5 correspondent exactement à cinq propositions du Livre IX. A l'exception d'une seule proposition de ce deuxième groupe, al-Mu'taman n'a introduit aucune modification ni aucune innovation dans les énoncés et dans les preuves d'Euclide[46]. Parmi les 5 propositions restantes, 3 correspondent à une arithmétisation de résultats établis pour les grandeurs, dans le Livre V, la plus importante, à nos yeux, étant celle où al-Mu'taman établit une équivalence entre la définition de la proportionnalité numérique et celle de la proportionnalité des grandeurs que donne Euclide dans la fameuse Définition 5 du Livre V des *Eléments*[47].

Il nous reste à dire un mot des propositions 1 et 11 de cette section qui ne semblent pas avoir de liens directs avec les écrits arithmétiques d'Euclide et de Nicomaque ou avec des textes connus de mathématiciens arabes. La proposition 1 établit, à partir de l'égalité de deux rapports, celui des rapports inverses:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

Ce résultat n'est pas nouveau. On le trouve, sous forme de porisme (considéré par Heiberg comme une interpolation) à deux endroits différents du Livre V des *Eléments:* à la suite de [E; V, 4], dans la version de Théon d'Alexandrie et à la suite de [E; V, 7] dans les autres versions. Comme ce porisme ne se retrouve dans aucune version des différentes familles issues des traductions arabes des *Eléments* qui nous sont parvenues, on peut considérer que cette proposition a été ajoutée par al-Mu'taman[48].

Il en est de même, semble-t-il, de la proposition 11 de cette section qui établit le résultat suivant: a, b, c, d, e, étant des entiers quelconques, alors:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow (b - e)c = (a - e)d + (d - c)e$$

Cette proposition, qui repose sur l'équivalence:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

(établie dans la proposition 10 de cette même section), est démontrée dans toute sa généralité; mais l'utilisation du support géométrique constitué par les segments (au lieu des techniques algébriques pourtant connues et maîtrisées au XI^e siécle, en Andalus) contraint l'auteur à tenir compte de la relation d'ordre entre les différentes grandeurs considérées.

*<Définitions>*

**[M: II; $D_1$]**
*Si un nombre est rapporté à un <autre> nombre, <de telle sorte que> chacun des deux est dénommé en tant qu'il est rapporté à l'autre, cette relation est appelée une proportion*[49].

1. [M: II; $D_1$] = [S: II; $D_1$] = [E: V; $D_3$].

2. Formulation d'Ibn Sartāq: *La proportion est la quoddité [ayiyya] de l'une des deux quantités homogènes par rapport à l'autre.*

3. La formulation d'Ibn Sartāq est proche de celle d'Ibn Sinā qui est, elle-même, extraite de la version des *Eléments* d'al-Hajjāj.

**[M: II; $A_1$]**
*Tout nombre rapporté à un <autre> nombre est, nécessairement, égal ou inférieur ou supérieur à lui.*

1. [M: II; $A_1$] = [N: 41].

2. Axiome supprimé par Ibn Sartāq.

**[M: II; $D_2$]**
*Si le nombre rapporté est égal à celui à qui il est rapporté, son rapport à lui est appelé rapport d'égalité.*

1. [M: II; $D_2$] = [M: II; $D_2$] = [N: 42].

2. Ibn Sartāq: *Le rapport d'égalité est lorsque il est nombré une fois (...). Et parmi les propriétés du rapport d'égalité <il y a> l'inversion sans changement comme le fait d'être frère chez les jumeaux (?)*[50].

**[M: II; $D_3$]**
*Si <le nombre rapporté> est inférieur au nombre à qui il est rapporté, et si le plus petit nombre le plus grand, son rapport à lui est le rapport de la*

*partie et ce rapport est dénommé par un nom dérivé de la partie du nombre de fois par lequel il nombre le nombre le plus grand.*

1. [M: II; $D_3$] = [S: VII; $D_3$] = [E: VII; $D_3$].

2. [M: II; $D_3$] ≈ [E: V; $D_3$]. Al-Mu'taman ajoute: *et ce rapport est dénommé par un nom dérivé de la partie du nombre de fois par lequel il nombre le nombre le plus grand.*

3. Formulation d'Ibn Sartāq: *Si le rapporté, qui est appelé l'antécédent, nombre celui auquel on rapporte, qui est appelé le suivant, ce sera le rapport de la partie.*

**[M: II; $D_4$]**

Si le plus petit, le rapporté, ne nombre pas le plus grand auquel il est *rapporté, mais qu'il est divisé en parties ou en unités dont chacune nombre le nombre le plus grand auquel il est rapporté, on dira que son rapport à lui est le rapport de parties et ce rapport est appelé d'un nom dérivé, pour le nombre de parties, du nombre de fois par lequel une partie de lui nombre le nombre le plus grand.*

1. [M: II; $D_4$] = [S: II; $D_4$] = [E: VII; $D_4$].

2. [M: II; $D_4$] ≈ [E: V; $D_4$]. Al-Mu'taman ajoute: *ce rapport est appelé d'un nom dérivé, pour le nombre de parties, du nombre de fois par lequel une partie de lui nombre le nombre le plus grand.*

3. Formulation d'Ibn Sartāq: *Sinon, elle est, dans les nombres, le rapport des parties.*

**[M: II; $D_5$]**

*Si le nombre le plus grand est rapporté au plus petit et qu'il y a, dans le plus grand, des exemplaires du plus petit qui lui sont égales, on dira que son rapport à lui est le rapport des multiples; et ce rapport est appelé par le nombre d'exemplaires du plus petit qui sont dans le plus grand.*

1. [M: II; $D_5$] = [S: II; $D_5$] = [E: VII; $D_5$].

2. [M: II; $D_5$] ≈ [E: V; $D_5$] ≈ [N: 42] ?

3. Formulation d'Ibn Sartāq: *et parmi elles il y a le rapport des multiples et c'est lorsque les parties sont des <quantités> égales.*

**[M: II; $D_6$]**

*Si le plus grand est rapporté au plus petit et qu'il y a dans le plus grand une ou plusieurs fois le plus petit et un excès inférieur au nombre le plus petit sauf qu'il nombre le plus petit, on dira que son rapport à lui est le rapport du même ou des mêmes excédant d'une partie.*

1. [M: II; $D_6$] ≈ [N: 42].

2. Ibn Sartāq remplace cette définition par la suivante: *Et dans les autres <cas>, ce sera le rapport de primarité [tabāyun] et qui est qu'aucune chose de leur genre ne les nombre.*

**[M: II; $D_7$]**

*Si l'excès ne nombre pas le plus petit, on dira que son rapport à lui est le rapport du même ou des mêmes excédant de parties.*

1. [M: II; $D_7$] ≈ [N: 42].

2. [M: II; $D_7$] 1 [S: II; $D_6$].

**[M: II; $D_8$]**

*La proportionnalité est la similitude des rapports entre plus de deux nombres. et on dira des nombres qui ont entre eux des rapports semblables <qu'ils sont> proportionnels, les antécédents aux suivants <étant> comme les antécédents aux suivants.*

1. [M: II; $D_8$] ≈ [S: II; $D_8$] ≈ [E: V; $D_6$].

2. Ibn Sartāq introduit une restriction: *La proportionnalité est que l'antécédent soit à son suivant comme l'antécédent est à son suivant en partie ou en parties. Et je ne dis pas 'quels que soient les parties'. Cela a lieu dans la possibilité de la partité et dans le rapport du même inversé. La proportionnalité a lieu aussi entre deux extrêmes même s'ils sont selon l'antériorité et la postériorité. Pour les autres, cela a lieu dans plus de cas.* (?)

**[M: II; $D_9$]**

*Le rapport simple est celui dans lequel le nombre rapporté n'est pas plus grand que celui à qui il est rapporté. Il n'est pas plus grand que le rapport d'égalité.*

1. Cette définition n'a pas d'équivalent dans les *Eléments*.

2. Ibn Sartāq a supprimé cette défintion.

**[E: II; $D_{10}$]**

*Le rapport composé est celui dans lequel le nombre rapporté est supérieur à celui à qui il est rapporté.*

1. Cette définition n'a pas d'équivalent dans les *Eléments.*

2. Ibn Sartāq a supprimé cette définition.

**[M: II; $D_{11}$]**

*L'inversion dans le rapport est le rapport des conséquents aux antécédents.*

1. [M: II; $D_{11}$] ≈ [S: II; $D_{11}$] ≈ [E: V; $D_{13}$].

2. Formulation d'Ibn Sartāq: *L'inverse du rapport et son différent c'est le rapport de celui à qui l'on rapporte au rapporté.*

**[M: II; $D_{12}$]**

*La composition dans le rapport est le rapport des antécédents et des conséquents ensemble aux conséquents.*

1. [M: II; $D_{12}$] ≈ [S: II; $D_{12}$] ≈ [E: V; $D_{14}$].

2. Formulation d'Ibn Sartāq: *La composition du rapport est le rapport de l'ensemble de l'antécédent et du suivant à lui.*

**[M: II; $D_{13}$]**

*La séparation dans le rapport est le rapport de l'excès des antécédents sur les conséquents, aux conséquents.*

1. [M: II; $D_{13}$] ≈ [S: II; $D_{13}$] ≈ [E: V; $D_{15}$].

2. Formulation d'Ibn Sartāq: *Sa séparation est le rapport de l'excès de l'antécédent sur son suivant.*

**[M: II; $D_{14}$]**

*La conversion dans le rapport est le rapport de l'antécédent à son excès sur le conséquent.*

1. [M: II; $D_{14}$] ≈ [S: II; $D_{14}$] ≈ [E: V; $D_{16}$]

2. Formulation d'Ibn Sartāq: *Sa conversion est le rapport de l'antécédent à son excès sur le suivant.*

**[M: II; $D_{15}$]**
*Le rapport à égalité <de rang> est le rapport des extrêmes.*

1. [M: II; $D_{15}$] ≈ [S: II; $D_{15}$] ≈ [E: V; $D_{17}$]

2. Formulation d'Ibn Sartāq:

"L'égalité <de rang> dans le rapport est que deux ensembles d'éléments de la quantitéé soient tels que deux <éléments> de l'un des deux <ensembles> soient selon un <même> rapport à deux de l'autre <ensemble>. On prend alors les rapports des extrêmes: si le premier rapport de l'un des deux est comme le premier de l'autre et le second comme le second, et ce jusqu'à son dernier, c'est le <rapport> régulier.

Sinon, c'est le <rapport> perturbé. Et parmi les <rapports> perturbés, il y a ce qui a une régularité d'une certaine manière et c'est lorsque le premier de l'un des deux est comme la dernière de l'autre et ce qui suit le premier est comme ce qui suit la dernière, et ainsi de suite jusqu'à son dernier. Et parmi eux, il y a ce qui ne conserve pas cette régularité.

Et ce qui est considéré dans la considération des rapports des extrêmes d'une manière absolue est que les <éléments> simples des premièrs composés, quels qu'ils soient, soient comme les éléments simples des seconds composés, chacun à chacun". (?)

**[M: II; $D_{16}$]**
*Pour tous nombres posés selon un <certain> ordre, le rapport du premier d'entre eux au dernier est comme le rapport du premier d'entre eux au second doublé par le rapport du second au troisième triplé par rapport du troisième au quatrième, et ainsi de suite, la composition se poursuivant jusqu'au dernier d'entre eux.*
*La signification de la compositon est la dénomination des rapports des nombres les uns par les autres.*

1. [M: II; $D_{16}$] ≈ [S: II; $D_{16}$] ⊃ ≈ [E: V; $D_9 + D_{10}$].

2. Formulation d'Ibn Sartāq:

"La composition de rappports: leur assemblage entre deux extrêmes communs, c'est à dire les poser de telle sorte que le suivant du premier rapport soit antécédent au second et son suivant antécédent au troisième, <et ainsi de suite> jusqu'au dernier. Le rapport composé est ce qui résulte de cette composition du rapport de l'antécédent du premier au suivant du dernier.

Et nous montrerons que la valeur du <rapport> composé, ou ce qui est semblable à sa valeur, résulte des valeurs de ses <rapports> simples, je veux dire par la multiplication les antécédents des valeurs des <éléments> simples les uns aux autres, et nous considérons le résultat <comme> un antécédent au résultat du produit de ses conséquents les uns aux autres. Le <rapport> de cet antécédent à son conséquent sera la valeur du <rapport> composé ou quelque chose dont la valeur est comme la valeur du <rapport> composé.

Et il est clair que pour trois nombres quelconques, le rapport du premier d'entre eux au troisième est composé du rapport du premier au second et du rapport du second au troisième et ce par la réunion des deux rapports de sorte qu'ils sont en commun un extrême qui est l'antécédent de l'un des deux et le conséquent de son doublé ou de son triplé ou autres, si leurs <éléments> simples sont semblables".

***Remarques generales: Les définitions suivantes ont été ajoutées par Ibn Sartāq***

**[S: II; $D_{17}$]**

*L'inégalité dans les rapports est que l'un des antécédents à son conséquent soit une partie ou des parties plus grand que l'autre antécédent à son conséquent.*

**[S: II; $D_{18}$]**

*Tout ce qui est inversion survient dans les <quantités> proportionnelles et dans les différentes.*

**[S: II; $D_{19}$]**

*La valeur du rapport est le rapporté, parmi les deux nombres les plus petits qui sont selon ce rapport, à celui à qui on rapporte.*

***Propositions***

**[M: II; 1]**

*Etant donné une suite de nombres distincts tels que le rapport des antécédents aux conséquents est le même rapport simple unique, alors le rapport des conséquents aux antécédents qui leur sont homologues est également le même.*

1. [M: II; 1] = n'existe pas dans les *Eléments*[51].

2. [M: II; 1] = [S: II; 1]: mêmes notations, mais la preuve est différente.

3. Ibn Sartāq donne une preuve plus concise, mais en trois cas:

a): $a = b$; $g = d$; b): $a = \frac{b}{n}$, $g = \frac{d}{n}$; c): $a = \frac{k}{n} b$, $g = \frac{k}{n} d$

2. Théon ajoute un porisme à [E; V, 4]: *D'après cela, il est manifeste que si 4 grandeurs sont proportionnelles, elles le seront par inversion* [HEATH, vol. II, p. 144].

3. Ce porisme n'existe pas chez an-Nayrīzī, aṭ-Ṭūsī, Ibn Sīnā.

**[M: II; 2]**
*Si (a, a, ..., a) et (b, b, ..., b) sont deux suites de nombres vérifiant:*

$$\frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

*alors:*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} = \ldots = \frac{a_k}{b_k};\ 1 \leq k \leq n.$$

1. [M: II, 2] = [E: VII, $D_{20}$, 5, 6, 12] + [E: V, 12].

2. Dans [E: VII, 12], Euclide utilise [E: VII, 5]+[E: VII, 6] + [E: VII, $D_{20}$]. Il n'y a pas d'équivalent de [E: VII, 5] + [E; VII, 6] chez al-Mu'taman. D'où la longueur de sa démonstration qui incorpore les preuves de [E: VII, 5] et de [E: VII, 6].

3. al-Mu'taman fait la preuve avec 6 grandeurs, au lieu de 4 chez Euclide.

4. [M: II; 2] = [S: II; 2]: preuve différente et plus concise.

5. Au lieu de démontrer [E: VII; 5] et [E: VII; 6] comme le fait al-Mu'taman, Ibn Sartāq se contente de se reférer aux lemmes 1 et 2 qu'il a démontrés dans [S: I; 30]. D'où la concision de sa démonstration.

**[M: II; 3]**
*Si quatre nombres sont proportionnels, ils le sont encore lorsqu'ils sont permutés.*

1. [M: II; 3] = [E: VII; 9, 10, 13, 15].

2. [M: II; 3] = [S: II; 3]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 4]**
*Si des nombres décomposés sont proportionnels, alors s'ils sont composés, ils sont également proportionnels.*

*De même, s'ils sont composés et proportionnels, ils sont proportionnels lorsqu'ils sont décomposés.*

1. [M: II; 4] = [E: V; 17, 18] (cas numérique).

2. [M: II; 4] = [S: II; 4]: mêmes notations, même démarche avec des compléments.

3. Ibn Sartāq ajoute une justification de l'existence de HE tel que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{HE}{EG} \text{ et } HE \neq DE$$

Il propose également la preuve suivante:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow ad + bd = bc + bd \Leftrightarrow \frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

utilisant l'équivalence:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \Leftrightarrow a_1a_4 = a_2a_3$$

**[M: II; 5]**
*Etant donné deux nombres, si on retranche de chacun d'eux un nombre et que le rapport du retranché au retranché est égal au rapport du tout au tout, alors le rapport du reste au reste est égal au rapport du tout au tout.*

1. [M: II; 5] = [E: VII; 11]: Enoncés identiques mais preuves différentes.

2. [M: II; 5] = [S: II; 5]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute ceci, après la preuve: *Quant à l'inversion dans le rapport, elle se démontre par la séparation, par l'absurde puis par la composition.*

**[M: II; 6]**
*Si a, ..., a et b, ..., b sont deux suites de nombres entiers vérifiant:*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} ; \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} , \dots , \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

*alors, ces nombres sont proportionnels dans le rapport à égalité de rang:* $\left[\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}\right]$

1. [M: II; 6] = [E: VII; 14]: mêmes notations, même formulation, même démarche.

2. [M: II; 6] = [S: II; 6].

3. Ibn Sartāq ajoute deux résultats *utiles* sur les proportions perturbées.

**[M: II; 7]**

*a) Si a, a, a, a, vérifient:* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$

*alors:* $\frac{p \cdot a_1}{q \cdot a_2} = \frac{p \cdot a_3}{q \cdot a_4}$

*pour p et q entiers.*

*[Ce qui entraîne:*

$p \cdot al > q \cdot a_2 \Rightarrow p \cdot a_3 > q.a_4$

$p \cdot al = q \cdot a_2 \Rightarrow p \cdot a_3 = q.a_4$

$p \cdot al < q \cdot a_2 \Rightarrow p \cdot a_2 < q.a_3]$

*b) [Inversement], si:*

$p \cdot a_1 > q \cdot a_2$ *et* $p \cdot a_3 > q \cdot a_4$

$p \cdot a_1 = q \cdot a_2$ *et* $p \cdot a_3 = q \cdot a_4$

$p \cdot a_1 < q \cdot a_2$ *et* $p \cdot a_2 < q \cdot a_3$

*alors:*

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$

1. [M: II; 7] = [E: V; $D_5$] + [E: V; 4]: version arithméétique.

2. [M; II, 7a] est-elle équivalente à la réciproque de [M; II, 7b] ?

$$\left( \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{p \cdot a_1}{q \cdot a_2} = \frac{p \cdot a_3}{q \cdot a_4} \Rightarrow p \cdot a \lesseqgtr q \cdot a \text{ et } p \cdot a \lesseqgtr q \cdot a \right)$$

3. La preuve d'al-Mu'taman est différente de celle d'Euclide: Dans [E; V, 4], on utilise [E; V, $D_5$] sur l'égalité des rapports utilisant les équimultiples, alors que dans [M; II, 7a], on utilise [M; II, 7a] (= [E; VII, 14]).

4. La proposition repose sur la définition de l'égalité de deux rapports (*la proportionnalité est la similitude des rapports*).

5. [M; II, 7b] est-elle équivalente à [E; V, $D_5$] ?

6. La preuve suppose l'existence de la 4$^e$ proportionnelle.

7. [M: II; 7] = [M: II; 7]: mêmes notations, même démarche.

8. Ibn Sartāq ajoute une réciproque à [M; II, 7a]:

$$\frac{pa_1}{qa_2} = \frac{pa_3}{qa_4} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$$

Il donne une preuve plus longue de [M; II, 7b] mais dans le même esprit.

**[M: II; 8]**
*Si a, ..., a sont trois entiers vérifiant:*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \quad et \quad \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_6}{a_4}$$

*alors:*

$$\frac{a_1 + a_5}{a_2} = \frac{a_3 + a_6}{a_4} \quad et \quad \frac{a_1 - a_5}{a_2} = \frac{a_3 - a_6}{a_4}$$

1. [M: II; 8] = [E: V; 24] + corollaire Simson[52].

2. [M: II; 8] = [S: II; 8]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 9]**
*Si un nombre est multiplié par deux autres ou si deux nombres sont multipliés par un même nombre, le rapport des produits est égal au rapport des deux nombres.*

1. [M: II; 9] = [E: VII; 17, 18].

2. [M: II; 9] = [S: II; 9]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 10]**

*Si $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, sont des nombres propotionnels, alors:* $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3$

*Inversement, si:* $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3$, *alors les quatre nombres sont proportionnels.*

1. [M: II; 10] = [E: VII; 19] (≈ [E: VI; 16]).

2. [M: II; 10] = [M: II; 10]: démarche différente.

3. Ibn Sartāq ramène la proposition à [M: II; 30], en interprétant en terme de parties. Il en déduit que [M: II; 10] n'est pas nécessaire, à cause de sa simplicité (en fait, c'est [M: II; 30] formulée autrement).

4. Ibn Sartāq ne reprend pas le corollaire d'al-Mu'taman.

**[M: II; 10, Corol]**

*Si: $a$, $b$, $g$, sont proportionnels, alors:* $a \cdot g = b$

*et si:* $a \cdot g = b$, *alors $a$, $b$, $g$, sont proportionnels, car le second membre jour le rôle du second et du troisième [terme de la proportion].*

1. Le corollaire n'existe pas chez Euclide [Voir les remarques de Heath sur son équivalent supprimé par Heiberg et mis en appendice].

2. Voir la formulation du corollaire dans la version d'an-Nayrīzī

**[M: II; 11]**

*Si $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a$ sont proportionnels et si $a_5$ est un cinquième nombre, alors:*

*a) Si $a_5 < a_1$ et $a_5 < a_2$, on a:*

$$(sup(a_1,a_2)-a_5) \cdot inf(a_3,a_4) = (inf(a_1,a_2)-a_5) \cdot sup(a_3,a_4) + (sup(a_3,a_4)-inf(a_3,a_4)) \cdot a_5$$

*b) Si $a_5 > a_1$ et $a_5 > a_2$, on a:*

$$(a_5-sup(a_1,a_2)) \cdot sup(a_3,a_4) = (a_5-sup(a_1,a_2)) \cdot inf(a_3,a_4) + (sup(a_3,a_4)-inf(a_3,a_4)) \cdot a_5$$

*c) Si $inf(a,a) < a < sup(a,a)$, alors:*

$$(a_5-inf(a_1,a_2)) \cdot sup(a_3,a_4) + (sup(a_1,a_2)-a_5) \cdot inf(a_3,a_4) = (sup(a_3,a_4)-inf(a_3,a_4)) \cdot a_5$$

1. [M: II; 11] = n'existe pas dans les *Eléments.*

2. [M: II; 11] = [S: II; 11]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 12]**
*Si l'unité est rapportée à un nombre, alors l'unité et ce nombre mesurent tout couple de nombres étant sous ce rapport, l'unité mesurant le plus petit et le nombre le plus grand.*

1. [M: II; 12] n'existe pas dans les *Eléments.* A comparer à [E; VII, 20] qui est établie pour a, b, au lieu de 1, b.

2. [M: II; 12] = [S: II; 12]: mêmes notations.

3. La preuve d'Ibn Sartāq est différente et plus courte:

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{g} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a}{g}$$

Or, 1 mesure b, b fois. Donc a mesure g, b fois.

**[M: II; 13]**
*Si deux nombres sont tels que leur rapport est un rapport de parties et qu'ils soient les plus petits nombres vérifiant ce rapport, alors ils mesurent tout couple de nombres vérifiant ce rapport, le plus petit mesurant le plus petit et le plus grand mesurant le plus grand.*

1. [M: II; 13] = [E: VII; 20].

2. [M: II; 13] = [S: II; 13]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute une généralisation de [M: II; 13] à plusieurs couples de nombres au lieu de deux seulement.

**[M: II; 14]**
*Les pluts petits nombres définissant un rapport sont premiers entre eux.*
*[Inversement], si deux nombres sont premiers entre eux, ils sont les plus petits de ceux qui définissent leur rapport.*

1. [M: II; 14] = [E: VII; 21+22].

2. [M: II; 14] = [S: II; 14]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute une généralisation de [S: II; 14] à plusieurs couples de nombres.

**[M: II; 15]**
*Déterminer les plus petits nombres ayant le même rapport que celui de nombres donnés.*

1. [M: II; 15] = [E: VII; 33].

2. [M: II; 15] = [S: II; 15]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 16]**
*Si, dans une suite de nombres de même rapport, le premier et le dernier sont premiers entre eux, les nombres de cette suite sont les plus petits ayant ce rapport.*

1. [M: II; 16] = [E: VIII; 1].

2. [M: II; 16] = [S: II; 16]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 17]**
*Déterminer les plus petits nombres ayant un rapport donné.*

1. [M: II; 17] = [E: VIII; 2].

2. al-Mu'taman détermine d'abord 3 nombres vérifiant le critère, puis 4 nombres vérifiant le même critère. Euclide le fait directement pour 4 nombres.

3. [M: II; 17] = [S: II; 17]: mêmes notations, même démarche.

4. Ibn Sartāq fait l'étude générale où la suite de nombres est de 3, 4, 5, ... éléments. Il ne distingue pas le cas à 3 éléments de celui à 4 éléments. Il parle de *martaba* (position) pour les expressions équivalentes à $a^n$ et il utilise le terme algébrique de māl-māl.

5. Ibn Sartāq donne [M: II; 18] comme corollaire de [M: II; 17].

**[M: II; 17, Corol]**
*a) Si trois nombres sont proportionnels et s'ils sont les plus petits vérifiant leur rapport, alors les extrémités sont des carrés.*

*b) Si quatre nombres sont proportionnels et s'ils sont les plus petits vérifiant leur rapport, alors les extrêmités sont des cubes.*

1. [M: II; 17, Corol] = [E; VIII, 2, Porisme].

2. [M: II; 17, Corol] = [S: II; 17, Corol].

**[M: II; 18]**

*Si une suite de nombres est constituée des plus petits nombres vérifiant un rapport donné, alors les extrêmes de la suite sont premiers entre eux.*

1. [M: II; 18] = [E: VIII; 3].

2. [M: II; 18] = [S: II; 18].

3. Ibn Sartāq considère que cette proposition est inutile, car c'est une conséquence immédiate de [M: II; 17], comme il l'a signalé à la fin de la proposition précédente.

**[M: II; 19]**

*Etant donnés des rapports en nombre quelconques, dans leurs plus petits nombres, trouver les plus petits nombres successivement proportionnels selon les rapports donnés.*

1. [M: II; 19] = [E: VIII; 4].

2. [M: II; 19] = [S: II; 19]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 20]**

*Si, dans une suite de nombres en proportion continue, le premier ne mesure pas le second, alors aucun nombre ne mesure un autre nombre de la suite.*

1. [M: II; 20] = [E: VIII; 6].

2. [M: II; 20] = [S: II; 20]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 21]**

*Si dans une suite de nombres proportionnels, le premier mesure le dernier, alors il mesure le second.*

1. [M: II; 21] = [E: VIII; 7].

2. Ibn Sartāq considère que cette proposition est inutile, car elle découle immédiatement de [M: II; 21].

**[M: II; 22]**

*Si entre deux nombres existe une suite de nombres formant avec les premiers une suite proportionnelle, alors le nombre d'éléments de la première* *suite est le même que celui de la suite existant entre deux autres nombres ayant le même rapport.*

1. [M: II; 22] = [E: VIII; 8].

2. [M: II; 22] = [S: II; 22]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 23]**

*Si entre deux nombres premiers entre eux existent des nombres proportionnels, alors le nombre d'éléments existants entre ces deux nombres et qui sont proportionnels est le même que le nombre d'éléments proportionnels existants entre 1 et l'un des deux nombres [premiers entre eux].*

1. [M: II; 23] = [E: VIII; 9].

2. [M: II; 23] = [S: II; 23]: mêmes notations, même démarche.

**[M: II; 24]**

*Deux nombres étant donnés, si entre chacun d'eux et 1 existent des nombres en nombre identique et proportionnels, alors il existe des nombres en nombre identique et proportionnels entre ces deux nombres.*

1. [M: II; 24] = [E: VIII; 10].

2. [M: II; 20] = [S: II; 20]: mêmes notations, même démarche, mais formulation différente de la preuve.

**[M: II; 25]**

*Etant donné un nombre quelconque de nombres proportionnels, leurs carrés, leurs cubes, ainsi de suite, forment encore des suites proportionnelles.*

1. [M: II; 25] = [E: VIII; 13].

2. [M: II; 25] = [S: II; 25]: mêmes notations, même démarche, mais rédaction plus concise.

**[M: II; 26]**

*Pour tout couple de nombres [a, b] premiers entre eux, il n'existe pas de nombre [g] tel que:*

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{g}$$

1. [M: II; 26] = [E: VIII; 16].

2. [M: II; 20] = [S: II; 20]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq complète l'énoncé d'al-Mu'taman ainsi: *donc aucun des deux n'est un.*

**[M: II; 27]**
*Si, dans une suite quelconque de nombres proportionnels, les termes extrêmes sont premiers entre eux, alors le rapport du premier au second n'est pas égal à celui du dernier à un autre nombre.*

1. [M: II; 27] = [E: VIII; 17].

2. [M: II; 27] = [S: II; 27]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute: *si aucun des deux n'est un.*

**[M: II; 28]**
*Etant donné deux nombres proprotionnels, existe-t-il un troisième nombre qui leur soit proportionnel?*

1. [M: II; 28] = [E: VIII; 18].

2. [M: II; 28] = [S: II; 28]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute au cas (a,b) = 1: *sauf si l'un des deux est un ou que le trosième est le carré de son homologue.*

**[M: II; 29]**
*Etant donné trois nombres, existe-t-il un quatrième qui leur soit proportionnel?*

1. [M: II; 29] = [E: VIII; 19].

2. [M: II; 29] = [S: II; 29]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sarttāq inverse l'ordre des cas en traitant le cas (a,c) ≠ 1 avant le cas (a,c) = 1.

**[M: II; 30]**
*Si trois nombres proportionnels sont les plus petits ayant ce rapport, la somme de deux d'entre eux est premier avec le troisième.*

1. [M: II; 30] = [E: VIII; 15].

2. [M: II; 29] = [S: II; 29]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq change la formulation de la preuve, et il ajoute en conclusion: *la représentation de cette proposition est facilitée par le* tasṭīḥ (?).

## Section III: *Sur les propriétés des nombres en tant qu'ils sont semblables aux lignes, aux surfaces et aux solides*

### *Contenu de la section*

La troisième section du *Kitāb al-Istikmāl* ne comporte aucune définition. Elle est également moins longue que les deux précédentes puisqu'elle ne contient que 17 propositions: 12 d'entre elles sont reprises du Livre VIII des *Eléments* et correspondent à 16 propositions de ce livre puisque, là aussi, al-Mu'taman regroupe parfois deux propositions en une seule[53]. Cette démarche est encore plus accentuée dans la rédaction des propositions de cette section qu'il emprunte au Livre IX. En effet, il regroupe 10 propositions dans quatre énoncés seulement[54].

En ce qui concerne la manière dont al-Mu'taman a rédigé les 16 propositions qui viennent d'être évoquées, on constate qu'il ne reste pas toujours fidèle au texte d'Euclide (de la version Isḥ āq-Thābit). Ce qui nous amène, tout naturellement à nous interroger sur les liens éventuels entre le contenu du *Kitāb al-Istikmāl* et les différentes versions arabes des *Eléments*. En effet, si l'on compare, par exemple, les preuves des propositions 9 et 8 de cette troisième section, on constate qu'elles sont totalement différentes de celles que l'on peut lire dans la version Isḥ āq-Thābit des *Eléments*. Par ailleurs, al-Mu'taman ne reprend pas les deux propositions que Thābit Ibn Qurra a ajoutées après [E; VIII, 24] et que an-Nayrīzī attribue explicitement à Héron [CURTZE, 1899, p. 195][55]. Nous constatons enfin que les corollaires ajoutés à [E; VIII, 14] et à [E; VIII, 15], dans la version Isḥ āq-Thābit ne sont pas repris par al-Mu'taman à la suite de [M; III, 3] [M; III, 4] (qui sont les propositions homologues aux deux précédentes), mais dans une proposition indépendante: [M; III, 5].

### *<Definitions>*

1. Al-Mu'taman ne donne aucune définition.

2. Ibn Sartāq ajoute les définitions suivantes:

**[S: III; $D_1$]**

*Le nombre solide est ce qui résulte du produit d'une surface par le nombre de surfaces.*

**[S: III; $D_2$]**

*Les <surfaces et les> solides semblables sont ceux dont les côtés sont proportionnels, le rapport du plus petit des côtés de l'un des deux au plus petit de l'autre étant comme le rapport du plus grand du premier au plus grand de l'autre, pour les surfaces, ou bien le rapport du plus petit du premier au plus petit de l'autre étant comme le rapport du moyen au moyen et le plus grand au plus grand, pour les solides.*

***Propositions***

**[M: III; 1]**

*Tout nombre composé, rapporté à un [autre] nombre composé est tel que son rapport [à l'autre] est constitué des rapports de leurs côtés.*

1. [M: III; 1] = [E: VIII; 5].

2. [M: III; 1] = [S: III; 1]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute un long développement dans lequel il aborde les points suivants:

a) Il utilise le terme *coin* [rukn] dans la preuve en disant que les deux coins de a,b ne sont pas plus petits que les deux coins de h,k.

b) Certains rapports composés n'ont pas de sens pour Ibn Sartāq: si a et b sont pairs et c impair, on a:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{c}\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{a}{b} = \frac{a/2}{b/2}$$

mais, on ne peut écrire:

$$\frac{a/2}{c/2}\left(\frac{c/2}{b/2}\right) = \frac{a/2}{b/2}$$

car c/2 n'est pas entier

c) Il affirme qu'il peut établir [M: III; 1] sans utiliser h, k, t et sans longueur.

d) Il montre que:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\right)$$

**[M: III; 2]**

*Les nombres carrés ont leur rapport, les uns aux autres, égal au carré du rapport de leurs côtés, les uns aux autres.*

*Les nombres cubes ont leur rapport, les uns aux autres, égal au cube du rapport de leurs côtés, les uns aux autres.*

1. [M: III; 2] = [E: VIII; 11+12].

2. [M: III; 2] = [M: III; 2]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq donne un énoncé plus général et il fournit une seconde preuve.

4. Il utilise la terminologie māl, māl-māl.

**[M: III; 3]**

*Si un nombre-carré nombre un [autre] nombre-carré, le côté [du premier] nombre le côté [du second].*

*[Inversement]: si le côté nombre le côté, le carré nombre le carré.*

1. [M: III; 3] = [E: VIII; 14].

2. [M: III; 3] = [S: III; 3]: mêmes notations, même démarche.

**[M: III; 4]**

*Si un cube nombre un [autre] cube, le côté [du premier] nombre le côté [du second].*

*[Inversement]: si le côté nombre le côté, le cube nombre le cube.*

1. [M: III; 4] = [E: VIII; 15].

2. [M: III; 4] = [S: III; 4]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute l'énoncé du même résultat, avec sa réciproque, pour les carré-carrés, etc.

**[M: III; 5]**

*Si un carré ne nombre pas un carré, le côté [du premier carré] ne nombre pas le côté du second.*

*[Inversement], si le côté [d'un carré] ne nombre pas le côté [d'un second carré], le premier carré ne nombre pas le second.*

1. [M: III; 5] = [E: VIII; 16+17].

2. [M: III; 5] = [S: III; 5]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq donne un énoncé général en terme de polygones [muḍ alla$^c$] et de côtés [ḍ al$^c$]

**[M: III; 5, Corol]**

*De même, on montre que pour tout cube qui ne nombre pas un [autre] cube, son côté ne nombre pas le côté [de l'autre].*

*[Invervement], si le côté [d'un cube] ne nombre pas le côté [d'un autre cube], le premier cube ne nombre pas le second.*

**[M: III; 6]**

*Si deux nombres-plan sont semblables, alors il existe entre eux un nombre tel que les trois soient proportionnels, et le rapport des deux nombres-plan est égal au carré du rapport des côtés homologues.*

*[Inversement], si entre deux nombres existe un nombre tel que les trois soient proportionnels, alors les deux nombres sont des nombres-plan et ils sont semblables.*

1. [M: III; 6] = [E: VIII; 18+20].

2. [M: III; 6] = [S: III; 6]: mêmes notations, même démarche.

**[M: III; 7]**

*Si deux nombres-solide sont semblables, il existe deux [autres] nombres qui sont avec eux en proportion et le rapport des deux [premiers] nombres est égal au cube du rapport des côtés homologues.*

*[Inversement], s'il existe deux nombres tels qu'ils forment, avec deux autres, des rapports égaux, alors les deux [derniers] nombres sont des nombre-solides semblables.*

1. [M: III; 7] = [E: VIII; 19+21].

2. [M: III; 7] = [S: III; 7]: mêmes notations, même démarche.

**[M: III; 8]**
*Si quatre nombres sont proportionnels et si le premier est un cube, le quatrième sera un cube.*

1. [M: III; 8] = [E: VIII; 23].

2. Preuve différente de celle de la traduction Isḥ āq-Thābit des *Eléments,* et identique à celle de la version d'al-Ḥajjāj (du Ms. Escurial 907 et du Ms. St. Petersbourg C 2145).

3. [M: III; 8] = [S: III; 9]: mêmes notations, même démarche.

4. Ibn Sartāq a inversé l'ordre des propositions 8 et 9, en adoptant l'ordre d'Euclide mais en conservant les preuves d'al-Mu'taman (qui sont de la version d'al-Ḥajjāj).

**[M: III; 9]**
*Si trois nombres sont proportionnels et si le premier est un carré, le troisième est aussi un carré.*

1. [M: III; 9] = [E: VIII; 22].

2. Preuve différente de celle de la traduction Isḥ āq-Thābit des *Eléments,* et identique à celle de la version d'al-Ḥajjāj (du Ms. Escurial 907 et du Ms. St. Petersbourg C 2145) .

3. [M: III; 9] = [S: III; 8]: mêmes notations, même démarche.

**[M: III; 10]**
*Si deux nombres ont un rapport égal à celui d'un carré à un carré et si l'un d'eux est un carré l'autre l'est aussi.*

*De même si le rapport est celui d'un cube à un cube et si l'un d'eux est un cube, l'autre l'est aussi.*

1. [M: III; 10] = [E: VIII; 24+25].

2. [M: III; 10] = [S: III; 10]: mêmes notations, même démarche.

**[M: III; 11]**
*Les nombres-plans semblables ont un rapport égal à un rapport de carrés.*

1. [M: III; 11] = [E: VIII; 26].

2. [M: III; 11] = [S: III; 11]: mêmes notations, même démarche.

**[M: III; 12]**
*Si le rapport de deux nombres n'est pas celui de deux carrés, il n'y a pas entre eux un nombre qui leur est proportionnel.*

1. [M: III; 12] = n'existe pas dans les *Eléments.*

2. [M: III; 12] = [S: III; 12].

3. L'énoncé d'Ibn Sartāq est différent de celui d'al-Mu'taman: *Si le rapport de deux nombres n'est pas celui de deux carrés, les deux nombre ne sont pas des nombres-plans semblables.*

**[M: III; 13]**
*Les nombres-solides semblables ont leur rapport égal au rapport d'un cube à un cube.*

1. [M: III; 13] = [E: VIII; 27].

2. [M: III; 13] = [S: III; 13]: mêmes notations, même démarche.

**[M: III; 13, Corol]**
*Si deux nombres ont leur rapport différent de celui de deux cubes, alors il n'existe pas deux nombres entre eux proportionnels à eux.*

*S'ils existaient, a et b seraient des nombres-solides semblables. Donc leur rapport serait celui de deux cubes. Ce qui n'est pas vrai.*

1. [M: III; 13, coroll] = [S: III; 13, coroll].

**[M: III; 14]**
*Si deux nombres-plans sont semblables, leur produit est un carré.*

*[Inversement], si le produit de deux nombres est un carré, ces deux nombres sont des nombres-plans semblables.*

1. [M: III; 14] = [E: IX; 1+2].

2. [M: III; 14] = [S: III; 14]: mêmes notations, même démarche.

**[M: III; 14, Corol]**
*- Le produit de deux carrés est un carré*
*- Si a = carré et ab = carré ⇒ b = carré*
*- Si a = carré et b ≠ carré ⇒ ab ≠ carré*
*- Si a = carré et ab ≠ carré ⇒ b ≠ carré*

1. [M: III; 14, coroll] = [S: III; 14, coroll].

2. Ibn Sartāq ajoute au corollaire:

a) Si ab n'est pas un carré, a et b ne sont pas des nombres-plans semblables.

b) Si a et b ne sont pas des nombres-plans semblables, ab n'est pas un carré.

**[M: III; 15]**
*1. Le carré d'un cube est un cube.*
*2. Si le produit d'un cube et d'un nombre est un cube, le nombre est un cube.*
*3. Si le carré d'un nombre est un cube, ce nombre est un cube.*
*4. Le produit d'un cube par un cube est un cube.*

1. [M; III, 15] = [E; IX, 3], [E; IX, 5], [E; IX, 6], [E; IX, 4], respectivement.

2. [M; III, 15] = [S; III, 15]: preuves plus concises.

3. Ibn Sartāq énonce les propositions dans l'ordre: 1, 3, 4, 2 et les démontre dans cet ordre, alors qu'al-Mu'taman les démontre dans l'ordre: 1, 4, 2, 3.

**[M: III; 16]**
*Tout nombre composé multiplié par un nombre devient un nombre solide.*

1. [M: III; 16] = [E: IX; 7].

2. [M; III, 16] = [S; III, 16].

3. Ibn Sartāq considère que c'est en fait la conséquence de la définition d'un nombre solide. Il en conclut que: abc = acb = bca.

**[M: III; 17]**

*(1) Etant donné une suite de nombres proportionnels et commençant par 1, alors le 3^e est un carré, ainsi que le 5^e, et ainsi de suite, l'un étant un carré et le suivant ne l'étant pas.*

*(2) Le 4^e [élément de la suite] est un cube, et il en est ainsi tous les deux nombres.*

*(3) Le 7^e est à la fois un carré et un cube, et il en est ainsi tous les cinq nombres.*

*(4) Si le 2^e éléments de la suite est un carré, tous les éléments sont des carrés.*

*(5) Si le 2^e est un cube, tous les éléments seront des cubes.*

*(6) Si le 2^e n'est pas un carré, seul le 3^e l'est, puis on aura, successivement, un non-carré et un carré.*

*(7) Si le 2^e n'est pas un cube, seul le 4^e l'est, puis tous les deux nombres [de la suite].*

1. [M: III; 17] = [E: IX; 8], [E: IX; 9], [E: IX; 10].

2. [M: III; 17] = [S: III; 17]: mêmes notations, même démarche.

## Section IV: *Sur les propriétés des nombres en tant qu'ils sont rapportés à leurs parties*

### *Contenu de la section*

La quatrième et dernière section du chapitre arithmétique de *l'Isitkmāl* est composée de 13 propositions. Les quatre premières sont reprises du Livre IX des *Eléments*. Les différences que l'on constate entre la rédaction d'al-Mu'taman et le contenu originel de ces propositions se situent à deux niveaux: dans l'agencement des propositions, puisque l'ordre d'Euclide n'est pas toujours respecté[56], et dans les démonstrations puique al-Mu'taman y introduit parfois des modifications[57].

Les propositions restantes de cette section, et qui sont au nombre de 9, correspondent exactement aux 10 propositions de la *Risāla fī l-aᶜdād al-mutaḥābba* (Epître sur les nombres amiables) de Thābit Ibn Qurra (m. 901). Les seules modifications qu'introduit al-Mu'taman dans la rédaction de cette épître ont consisté à regrouper les propositions 7 et 8 de l'épître de Thābit en une seule et à supprimer son introduction *historique* concernant les nombres parfaits et amiables dans la tradition grecque[58].

Au terme de cette description du contenu et de l'agencement des quatre sections arithmétiques du *Kitāb al-Istikmāl,* la question suivante peut se présenter naturellement à l'esprit du lecteur: y a-t-il des propositions des trois livres arithmétiques des *Eléments* qui ont été abandonnées par al-Mu'taman et pourquoi?

Pour le Livre VII, on constate que seules 3 propositions sont absentes de l'Istikmāl. Il s'agit de la 7, de la 8 et de la 25. Les deux premières constituent en fait les deux étapes de la preuve de [E; VII, 11] qui correspond à [M; II, 5]. Or la démonstration de cette dernière par al-Mu'taman est totalement différente de celle d'Euclide dans [E; VII, 11]; ce qui explique l'abandon de [E; VII, 7] et de [E; VII, 8][59]. Quant à [E; VII, 25], son abandon par al-Mu'taman s'explique par le fait qu'elle ne représente qu'un cas particulier de celle qui la précède[60].

En ce qui concerne le Livre VIII, toutes ses propositions sont reprises par al-Mu'taman qui les repartit entre les sections II et III de son chapitre en les regroupant parfois deux à deux.

C'est dans le Livre IX que nous trouvons le plus grand nombre de propositions abandonnées par al-Mu'taman. Elles sont au nombre de 6. Les raisons qui ont dû motiver l'auteur de *l'Istikmāl* à ne pas retenir ces propositions sont différentes: [E; IX, 24, 25, 26, 27] sont des conséquences immédiates respectivement de [M; I, 2] pour les deux premières, de [M; I, 3] pour la troisième et de [M; I, 1] pour la quatrième[61]. La proposition [E; IX, 34] est absente de *l'Istikmāl* parce qu'elle repose sur une subdivision des nombres pairs (en pairement-pair et pairement-impair) qui a été abandonnée par al-Mu'taman au profit de la subdivision de Nicomaque (en pairement-pair, pairement-impair et pairement-pair-impair)[62]. Quant à la proposition [E; IX, 20], qui établit l'existence d'une infinité de nombres premiers, son abandon peut s'expliquer soit par l'absence de propriété ou de relation particulière à établir, soit par la présence de l'infini et du raisonnement par l'absurde, deux notions qui pouvaient soulever quelques problèmes aux yeux d'un savant comme al-Mu'taman qui semble avoir été sensibilisé aux difficultés philosophiques soulevées par l'utilisation de certains concepts ou de certains outils Mathématiques.

*<Définitions>*

1. Al-Mu'taman ne donne aucune définition.

2. Ibn Sartāq donne les définitions suivantes:

**[S: IV; $D_1$]**

*Le nombre est parfait si toutes ses parties lui sont égales, abondant si elles l'excèdent, déficient si elles sont moindres que lui.*

**[S: IV; $D_2$]**

*L'abondant et le déficient peuvent 'tre amiables si chacun des deux est égal aux parties de l'autre.*

***Propositions***

**[M: IV; 1]**

*Si 1, a, b, g, d, e, est une suite de nombres ayant même rapport:*

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{g}=\frac{g}{d}=\frac{d}{e}$$

*et si b et e sont le plus petit et le plus grand élément de la suite, alors: $e = f \cdot b$ et f est un élément de la suite.*

1. [M: IV; 1] = [E: IX; 11].

2. [M: IV; 1] = [S: IV; 1]: mêmes notations, même démarche.

3. La présentation d'Ibn Sartāq est différente.

4. Ibn Sartāq ne considère pas un parmi la suite des nombres: *Soit 1, a, b, g, d, e, ...* Al-Mu'taman dit: *Si des nombres, à partir de un sont continûment proportionnels ...*

**[M: IV; 2]**

*a) Si $a_1, a_2, ..., a_n$ est une suite de nombres, avec: $a_1 = 1$. Si e est un nombre premier qui divise $a_n$. Alors e divise $a_2$.*

*b) Si $a_2$ est premier, alors les seuls diviseurs de an sont $a_1, a_2, ... a_n$.*

1. [M: IV; 2] = [E: IX; 12+13].

2. [M: IV; 2] = [S: IV; 2]: mêmes notations, même démarche.

**[M: IV; 3]**

*Si $(a_1, a_2,..., a_n)$ sont proportionnels, alors:*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_n - a_1}{a_1 + ... + a_{n-1}}$$

1. [M: IV; 3] = [E: IX; 35].

2. [M: IV; 3] = [S: IV; 3]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq utilise l'expression: *al-mutawāliya mutᶜāẓ ima.*

**[M: IV; 4]**
*Le plus petit nombre divisible par des nombres premiers connus n'est divisible par aucun autre nombre premier autre que ceux-là.*

1. [M: IV; 4] = [E: IX; 14].

2. [M: IV; 4] = [S: IV; 4]: mêmes notations, même démarche.

**[M: IV; 5]**
*Si $a = b \cdot g$, et si b et g sont premiers, alors a n'est divisible que par b ou g.*

1. [M: IV; 5] = [T; 1].

2. [M: IV; 5] = [S: IV; 5]: mêmes notations, même démarche.

**[M: IV; 6]**
*Si $a = b \cdot g$, avec b premier et g composé, alors les seuls diviseurs de a sont b, g, tout diviseur de g et tout produit de b par un diviseur de g.*

1. [M: IV; 6] = [T; 2].

2. [M: IV; 6] = [S: IV; 6]: mêmes notations, même démarche.

**[M: IV; 7]**
*Soit: $a = b.g$, avec b et g non premiers.*
*Soit d, e, f, tous les diviseurs de b, avec: $d < e < f$, et soit z, h, t, tous les diviseurs de g, avec: $z < h < t$.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Soit:* | $k = b \cdot z$ ; | $l = b \cdot h$ ; | $m = b \cdot t$ |
| | $n = g \cdot d$ ; | $s = g \cdot e$ ; | $o = g \cdot f$ |
| | $v = d \cdot z$ ; | $i = d \cdot h$ ; | $q = d \cdot t$ |
| | $r = e \cdot z$ ; | $u = e \cdot h$ ; | $w = e \cdot t$ |
| | $p = f \cdot z$ ; | $y = f \cdot h$ ; | $x = f \cdot t$ |

*Alors a est divisible par a, b, g, d, e, f, z, h, t, k, l, m, n, s, o, v, i, q, r, u, w, p, y, x, et par aucun autre nombre.*

1. [M: IV; 7] = [T; 3].

2. [M: IV; 7] = [S: IV; 7]: mêmes notations, même démarche.

**[M: IV; 8]**

*Si $a_1, a_2, ..., a_n$, n quelconque, vérifient:* $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2$, *pour tout k:* $1 \leq k \leq n-1$,

*alors:* $a_n = a_1 + (a_1 + ... + a_{n-1})$

1. [M: IV; 8] = [T; 4].

2. [M: IV; 8] = [S: IV; 8]: mêmes notations, même démarche.

**[M: IV; 9]**

*Si $a_1, ..., a_n$, vérifient:* $a_1 = 1$ *et* $\frac{a_k+1}{a_k} = 2$, *pour* $1 \leq k \leq n-1$,

*Si p est un nombre premier,* $p \neq 2$;

*[et si on note:*

$$S_n = \sum_1^n a_k$$

*Alors:*

$$\begin{aligned} p = S_n &\Rightarrow p \cdot 2^n \text{ est parfait} \\ p < S_n &\Rightarrow p \cdot 2^n \text{ est abondant} \\ p > S_n &\Rightarrow p \cdot 2^n \text{ est déficient} \end{aligned}$$

*[Si on note:*

$$S_d(p \cdot 2_n) = \sum_1^m d_k$$

*la somme des diviseurs ($d_k$), $1 \leq k \leq m$, de $p \cdot 2_n$],*

*alors:*

$$| p \cdot 2^n - S_d(p \cdot 2^n) | = | p - S_n |$$

1. [M: IV; 9] = [T; 5].

2. [M: IV; 9] = [S: IV; 9]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq conclut par un commentaire basé sur la Logique aristotélicienne et utilisant sa terminologie:

a) Il fait remarquer que tout le raisonnement ne tient que parce qu'on a supposé $z \neq 2$, et il le montre.

b) Il remarque que le fait qu'un nombre premier soit égal à $\sum 2^k+1$ est démontré par une preuve quod sit [inniya] et nous n'avons pas besoin d'une preuve an-sit [limmiya] car *l'affirmation est cela même qui rend nécessaire [mulāzima], et elle n'est pas avec la réalisation ou l'avènement de ce qui est nécessaire [malzūm]* [f. 23b].

**[M: IV; 10]**

*Soit* $a_1, \ldots, a_n$ *vérifiant:* $a_1 = 1$ *et* $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2$, *pour* $1 \leq k \leq n-1$,

*et soit:*

$$S_n = \sum_1^n a_k$$

*Soit* $p_1$ *et* $p_2$ *deux nombres premiers avec:* $p_1 \neq 2$, $p_2 \neq 2$,
*alors* $p_1 \cdot p_2 \cdot a_n$ *est un nombre abondant ou déficient:*
*a) Si* $p_1 \cdot p_2 \cdot a_n < S_n + (p_1 \cdot p_2 \cdot a_n) S_n \Rightarrow p_1 \cdot p_2 \cdot a_n$ *est abondant*
*b) Si* $p_1 \cdot p_2 \cdot a_n > S_n + (p_1 \cdot p_2 \cdot a_n) S_n \Rightarrow p_1 \cdot p_2 \cdot a_n$ *est déficient*

1. [M: IV; 10] = [T; 6].

2. [M: IV; 10] = [S: IV; 10]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute à l'énoncé d'al-Mu'taman: *Et on montrera que* $p_1 p_2$ *ne peut être égal à la somme.*

**[M: IV; 11]**

*Si* $a_1, a_2, a_3, a_4$, *vérifient:* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{1}{2}$,
*alors:* $(a_2 + a_3)(a_3 + a_4) = a_4(a_1 + a_4)$
*et, dans ce cas, on a:* $a_3(a_2 + a_3)(a_3 + a_4) = a_3 \cdot a_4(a_1 + a_4)$

1. [M: IV; 11] = [T; 7+8].

2. [M: IV; 11] = [S: IV; 11]: mêmes notations, même démarche.

3. Ibn Sartāq ajoute à l'énoncé d'al-Mu'taman: *Et* $(a_2 + a_4 + 2a_3)a_3 = (a_1 + a_4)a_4$.

**[M: IV; 12]**

*Soit a, b, g, d, vérifiant:* $a < b < g < d$, *et:* $\frac{d}{g} = \frac{g}{b} = \frac{b}{a} = 2$
*soit:* $e = d(a+d)$ ; $f = (d+g-1)(g+b-1)$
*alors:* $d(a+d-1) = g((e-1)-f)$

1. [M: IV; 12] = [T; 9].

2. [M: IV; 12] = [S: IV; 12]: mêmes notations, même démarche.

**[M: IV; 13]**
*Trouver autant de nombres amiables que l'on souhaite.*

1. [M: IV; 13] = [T; 10].

2. [M: IV; 13] = [S: IV; 13]: mêmes notations, même démarche.


## Remerciements

Je tiens à remercier J.P. HOGENDIJK pour ses remarques et ses suggestions qui m'ont aidé à améliorer la première version de ce travail.


## NOTES

1 [M; I, $N_9$]: "Si deux choses sont telles que chacune d'elles est plus grande que tout ce par rapport à quoi l'autre est plus grande et plus petite que tout ce par rapport à quoi l'autre est plus petite, alors elles sont égales".

2 Il s'agit des défintions suivantes: [M; I, $D_3$]: "Les nombres qui se succèdent selon l'ordre naturel sont ceux qui commencent par un et qui augmentent par lui". [M; I, $D_9$]: "On dit que le plus petit nombre nombre le plus grand s'il y a dans le plus grand des exemplaires égaux du plus petit nombre".

3 [M; I, $A_1$]: "La première partition par laquelle se subdivise le nombre est qu'il y en a qui sont pairs et il y en a qui sont impairs" [KUTSCH, p. 19; BERTIER, p. 60]. [M; I, $A_2$]: "Tout nombre est soit premier soit composé" [KUTSCH, p. 29; BERTIER, p. 69].

4 Il s'agit bien, dans l'esprit d'al-Mu'taman, d'une extension à un domaine distinct, car ces mêmes propositions sont énoncées et établies, pour les grandeurs, dans la 1e section de la 2e espèce de son livre [HOGENDIJK, 1990a; GUERGOUR, 1994].

5 Voici l'énoncé de ces propositions dans l'éécriture symbolique actuelle:

[M; I,9] ≅ [E; II, 1]: $m(n_1 + \ldots + n_p) = mn_1 + \ldots + mn_p$; [M; I,9, cor.1] ≅ [E; II, 2]: $m(m + n) = m^2 + m \cdot n$

[M; I,9, cor.2] ≅ [E; II, 3]: $n = n_1 + \ldots + n_p \Rightarrow n^2 = nn_1 + \ldots + nn_p$

[M; I,14] ≅ [E; II, 4]: $(n + m)^2 = n^2 + m^2 + 2nm$; [M; I,15] ≅ [E; II, 5]: $\left(\frac{n+m}{2}\right)^2 = nm + \left(\frac{n+m}{2} - n\right)^2$

$[M; I,16] \cong [E; II, 6]$: $\left(\frac{n}{2} + m\right)^2 = (n + m)m + \left(\frac{n}{2}\right)^2$, n pair;

$[M; I,17] \cong [E; II, 7]$: $(n + m)^2 = n^2 = 2(n + m)n + m^2$; $[M; I,18] \cong [E; II, 8]$: $((m + n) + n)^2 = 4(m + n)n + m^2$

$[M; I,19] \cong [E; II, 9]$: $m^2 + n^2 = 2\left(\frac{m + n}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{m + n}{2} - m\right)^2$

$[M; I,20] \cong [E; II, 10]$: $2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2} + m\right)^2 = (n + m)^2 + m^2$

6 A l'inverse, al-Mu'taman ne reprend aucune des propositions [E; IX, 24, 25, 26 et 27], c'est à dire celles qui établissent la parité des différences d'entiers. On peut supposer qu'à ses yeux ces résultats étaient des corollaires immédiats des propositions qu'il a établies.

7 Voici l'énoncé des propositions:

[M; I, 2]: n pair, m impair $\Rightarrow$ n + m impair;

[M; I, 4]: $(n_1 + n_4 = n_2 + n_3) \Leftrightarrow (n_1 \cdot n_2 = n_3 - n_4)$

[M; I, 5]: $(u_{k+1} - u_k = u_{n-k+1} - u_{n-k}) \Leftrightarrow (u_1 + u_n = u_k + u_{n-k})$

[M; I, 6]: $(u_{k+1} - u_k = u_{n-k+1} - u_{n-k}) \Rightarrow \sum_1^n u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

8 al-Mu'taman ne donne pas de titre à ce paragraphe. Il dit simplement: "Présentons d'abord ce qu'il est nécessaire de poser comme prémisses et comme introduction à ce que nous avons allons traiter de cette Théorie".

9 [E: VII; $D_1$]: *Est unité ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.*

10 Ibn Sīnā: Kitāb *ash-Shifā'. Uṣ ūl al-handasa.* Edit. A.I. Sabra & A.L. Muzhir. Le Caire, 1976, p. 211.

11 Ikhwān aṣ-Ṣafā': *Rasā'il.* Beyrouth, non daté. Vol. 1, p. 49.

12 Voir, en particulier: les versions d'Oxford (Thurston 11), et de l'Escurial (), les rédactions ou commentaires de: an-Nayrīzī, aṭ-Ṭūsī, Ibn Sīnā.

13 [E: VII; $D_2$]: *Et un nombre est la multitude composée d'unités.* Dans les différentes versions arabes des *Eléments,* l'expression *multitude composée d'unités* est remplacée par *ensemble composé des uns.*

14 Ikhwān aṣ-Ṣafā': *Rasā'il,* pp. 49, 57.

15 [E: VII; $D_6$]: Un nombre pair est celui [qui est] divisible en deux [parties égales].

16 [E: VII; $D_7$]: Et un impair, le non-divisible en deux, ou {celui} qui diffère d'une unité d'un nombre pair.

17 [E: VII; $D_8$]: Un nombre pairement-pair est celui [qui est] mesuré par un nombre pair selon un nombre pair. [N]:

18 [R: I; D].

19 [E: VII; $D_9$]: Et un pairement-impair est celui [qui est] mesuré par un nombre pair selon un nombre impair. [N]

20 [T: ] = "Nous avons trouvé dans la copie arabe, après le propos sur l'impair-du-pair: 'si sa moitié est paire, il est appelé pairement-paire-impair'. et nous n'avons trouvé cela nulle part dans <la version> grecque".

21 [M: I; $D_9$] est l'équivalent arithmétique de [E: V; $D_1 + D_2$]. $D_1$: *Une grandeur est une partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande.* $D_2$: *Et multiple, la plus grande de la plus petite, quand elle est mesurée par la plus petite.*

22 [E: VII; $D_{12}$]: *Un nombre premier est celui [qui est] mesuré par une seule unité.*

23 [E: VII; $D_{14}$]: *Un nombre composé est celui [qui est] mesuré par un certain nombre.*

24 [E: VII; $D_{13}$]: *Des nombres premiers entre eux sont ceux qui sont mesurés par une seule unité comme commune mesure.*

25 [E: VII; $D_{15}$]: *Et des nombres composés entre eux sont ceux [qui sont] mesurés par un certain nombre comme commune mesure.*

26 [E: VII; $D_{16}$]: *Un nombre est dit multiplier un nombre quand, autant il y a d'unités en lui, autant de fois le multiplié est ajouté [à lui-même], et qu'il est produit un certain [nombre].* [E: VII; $D_{16}$]: *Et quand deux nombres, s'étant multipliés l'un l'autre, produisent un certain [nombre], le produit est appelé plan, et les nombres qui se sont multipliés l'un l'autre, ses côtés.*

27 [E: VII; $D_{19}$]: Un nombre carré est celui [qui est] égal un nombre égal de fois, ou {celui} [qui est] contenu par deux nombres égaux.

28 Al-Mu'taman appelle ces notions: "Sciences universelle" et Ibn Sartāq: "Les prémisses générales <valables> pour tous".

29 C'est une définition de l'égalité arithmétique (qui remplace l'égalité géométrique par coôncidence de [E: I; $N_8$]).

30 Démarche de [E: IX; 23]: $(n_1, ..., n_k)$ = impairs $\Rightarrow n_k-1$ pair. Mais: $(n_1 + ... n_{k-1})$ = pair $\Rightarrow (n_1 + ... + n_{k-1} + n_k-1)$ = pair $\Rightarrow (n_1 + ... + n_{k-1} + n_k-1) + 1$ = impair. Démarche de [M; I, 3b]: k impair $\Rightarrow$ (k-1) impair $\Rightarrow n_1 + ... + n_{k-1}$ = pair. n impair $\Rightarrow (n_1 + ... + n_{k-1}) + n_k$ = impair. Démarche de [S; I, 3b]: $n_1, ..., n_k$ impairs $\Rightarrow m_1 = n_1-1, ... m_k = n_k-1$ pairs $\Rightarrow 1 + ... + 1$ (k fois) = impair car k impair, et $m_1 + ... m_k$ = pair. Donc: $(1 + ... + 1) + (m_1 + ... m_k)$ = impair.

31 [R: I; 1]: "Deux nombres quelconques <étant donnés>, si l'un des deux est divisé en un nombre quelconque de parties, le produit de l'un des deux par l'autre est égal au produit de celui qui n'a pas été divisé par chacune des parties du nombre divisé" [IKHWĀN, p. 72].

32 [E: V, 1, 2]: "Si des grandeurs en quantité quelconque sont équimultiples de grandeurs en quantité quelconque égales en multitude, chacune à chacune, le multiple que l'une des grandeurs est de l'une [des autres], ce même multiple toutes le seront aussi de toutes" [VITRAC, 1994, p. 69]. Il est à signaler que cette proposition ne fait pas partie de celles qu'a retenues al-Mu'taman dans le résumé du Livre V des Éléments qu'il a inséré dans la partie géométrique de son traité [HOGENDIJK, 1991, pp. 230-231].

33 [R: I; 2]: "Tout nombre divisé en un nombre quelconque de parties <est tel que> le produit de ce nombre par lui-même est égal à son produit par l'ensemble de ses parties" [IKHWĀN, p. 73].

34 [R: I; 3]: "<Pour> tout nombre divisé en deux parties, nous disons que le produit de ce nombre par une de ses deux parties est égal au produit de cette partie par elle-même et par l'autre partie" [IKHWĀN, p. 73].

35 [R: I; 4]: "<Pour> tout nombre divisé en deux parties, nous disons que le produit de ce nombre par lui-même est égal au produit de chaque partie par elle-même et <du produit> de l'une des deux <partie> par l'autre" [IKHWĀN, p. 73].

36 [R: I; 5]: "<Pour> tout nombre divisé en deux moitiés puis en deux parties différentes, le produit de l'une des deux parties différentes par l'autre et le produit de l'excès par lui-même est égal au produit de la moitié de ce nombre par elle-même" [IKHWĀN, p. 73].

37 [R: I; 6]: "<Pour> tout nombre divisé en deux moitiés puis augmenté d'un ajout, je dis que le produit de ce nombre avec l'ajout par cet ajout et <le produit de> la moitié du nombre par elle-même, réunis, est égal au produit de la moitié de ce nombre avec l'ajout par elle-même" [IKHWĀN, p. 73].

38 [R: I; 7]: "<Pour> tout nombre divisé en deux parties, je dis que le produit de ce nombre par lui-même et le produit d'une des deux parties par elle-même, réunis, est égal à deux fois le produit de ce nombre par cette partie et au produit de l'autre partie par elle-même, réunis" [IKHWĀN, p. 74].

39 "<Pour> tout nombre divisé en deux parties puis augmenté de l'une des deux parties, nous disons que le résultat du produit de tout cela par lui-même est égal au produit de ce nombre avant l'ajout par cet ajout et <au produit de> l'autre partie par elle-même" [IKHWĀN, p. 74].

40 "<Pour> tout nombre divisé en deux moitiés puis en deux parties différentes, le résultat des produits des deux parties différentes par elles-mêmes, réunis, est comme deux fois le résultat du produit de la moitié de ce nombre par elle-même et du produit de l'excès entre les deux nombres par lui-même, réunis" [IKHWĀN, p. 74].

41 "<Pour> tout nombre divisé en deux moitiés puis augmenté d'un ajout, le résultat du produit de ce nombre avec l'ajout par lui-même et le produit de l'ajout par lui-même, réunis, est comme deux fois le résultat du produit de la moitié du nombre avec l'ajout par elle-même et le produit de la moitié du nombre par elle-même" [IKHWĀN, p. 73].

42 A comparer à: [M: II; 9] = [E: VII; 17].

43 Je crois comprendre ce qu'il veut dire, mais je n'arrive pas à le formuler correctement. Cela semble être lié à l'impossibilité de faire certaines opérations arithmétiques intermédiaires, parce qu'on est dans le domaine des entiers. Voir s'il fait allusion à la situation suivante: a = 4, b = 6, n = 15, k = 10, c = 35. D'où: ac = 140 = (10/15)(210), avec: 210 = 15·40; et a = (10/15)(6); mais 6 n'est pas divisible par 15. Donc cette opération intermédiaire n'est pas possible en restant dans le cadre stricte des entiers. (wa Allāhu a$^{c}$lam!).

44 A comparer à: [M: II; 10].

45 [M; II, $D_{10}$] = "Le rapport simple est celui dans lequel le rapporté est <inférieur ou> égal à celui à qui il est rapporté". [M; II, $D_{11}$] = "Le rapport composé est celui dans lequel le rapporté est supérieur à celui à qui il est rapporté".

46 La proposition dont la preuve est modfiée est [M; II, 29] = [E; IX, 19].

47 [M; II, 7]: "S'il y a quatre nombres proportionnels et que l'on prend pour le premier et le troisième des multiples égaux et pour le second et le quatrième des multiples égaux, le rapport des multiples du premier aux multiples du second est égal au rapport des multiples du troisième aux multiples du quatrième. Et s'il y a quatre nombres qui soient tels que si on prend du premier et du troisième des multiples égaux et du second et du quatrième des multiples égaux et que les multiples du premier et du troisième sont, ensemble, plus grands que les multiples du troisième et du quatrième ou bien ensemble égaux ou bien ensemble plus petits, alors le rapport du premier au second est égale au rapport du troisième au quatrième".

48 Nous avons consulté les manuscrits suivants: Rabat, B.H. 53 et 1101, Escurial 907 et Oxford, Bodl. Thurst 11. Les porismes ne sont pas non plus signalés par aṭ-Ṭūsī dans son *Taḥrīr* [ms. Istanbul, Aya Sofya, Ahmet III 3452].

49 N'existe pas chez Nicomaque. Voir: [E: V; $D_3$].

50 C'est une conjecture car je n'arrive pas encore à lire le dernier mot.

51 HEATH, Vol. II, p. 144; Porisme.

52 HEATH, vol. II, p. 184.

53 [M; III, 2] = [E; VIII, 11, 12]; [M; III, 5] = [E; VIII, 16, 17]; [M; III, 6] = [E; VIII, 18, 20]; [M; III, 7] = [E; VIII, 19, 21]; [M; III, 10] = [E; VIII, 24, 25].

54 [M; III, 14] = [E; IX, 1, 2]; [M; III, 15] = [E; IX, 3, 4, 5, 6]; [M; III, 16] = [E; IX, 7]; [M; III, 7] = [E; IX, 8, 9, 10].

55 La première proposition ajoutée: "Si deux nombres sont tels que le rapport de l'un des deux à l'autre est comme le rapport d'un nombre carré à un nombre carré, alors ce sont deux <nombres>-plans". La seconde dit: "Si deux nombres sont tels que le rapport de l'un des deux à l'autre est comme le rapport d'un nombre cube à un nombre cube, alors ce sont deux <nombres>-solides". Cf.: ms. Oxford Thurst 11, f. 89b, propositions 24 et 25. L'absence de ces deux propositions dans la version d'al-Ḥajjāj est signalée par aṭ-Ṭūsī, dans son *Taḥrīr* [ms. Istanbul, Ahmet III 3452, f. 70a]. Il faut enfin noter que ces deux propositions existent dans un des deux manuscrits de Rabat et portent les n° 23 et 24 [Rabat B.H. 1101, ff. 64b-65a].

56 Al-Mu'taman regroupe [E; IX, 12] et [E; IX, 13] en une seule et intercale [E; IX, 35] entre [E; IX, 13] et [E; IX, 14].

57 C'est le cas dans [M; IV, 1].

58 Ms. Paris B.N. 2457, ff. 170-180. Cette introduction n'existe pas dans le [ms. Istanbul Aya Sofya 4830, ff. 110a-122b]. Pour l'édition de cette épître, voir [SAIDAN, 1977]. Pour la traduction française de l'introduction de l'épître, accompagnée des énoncés des 10 propositions, voir [WOEPCKE, 1852 = 1986, I, pp. 257-266].

59 En effet, [M; II, 5] utilise [M; II, 3, 4] qui correspondent à [E; VII, 13, 17, 18].

60 [E; VII, 24]: $(a,c) = 1$ et $(b,c) = 1 \Rightarrow (ab,c) = 1$. [E; VII, 25]: $(a,c) = 1 \Rightarrow (a^2,c) = 1$.

61 [M; I, 1]: ($n_1$, $n_2$ pairs) $\Rightarrow$ ($n_1 + n_2$ pair).

[M; I, 3]: ($n_1$, $n_2$, $n_3$ pairs) $\Rightarrow$ ($n_1 + n_2$ pair et $n_1 + n_2 + n_3$ impair).

[M; I, 2]: (n pair et m impair) $\Rightarrow$ ($p = n + m$ impair).

[M; I, 26]: (m et p impairs) $\Rightarrow$ ($n = p - m$ pair).

[M; I, 27]: (p impair et n pair) $\Rightarrow$ ($m = p - n$ impair).

62 La troisième catégorie de nombres pairs est appelée *impair-pair* dans la traduction de [BERTIER, 1978, p. 65] et pairement-pair-impair dans la traduction de Thābit Ibn Qurra [KUTSCH, 1958, p. 25].

## RÉFÉRENCES

ABALLAGH, M & DJEBBAR, A. (1987) "Découverte d'un écrit mathématique d'al-Ḥaṣṣār (XII^e s.): le Livre I du Kāmil". *Historia Mathematica 14*, 147-158.

ABALLAGH, M. (1988) "Les fondements des Mathématiques à travers le *Raf' al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā* (1256-1321)". *1^e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes.* Alger, 1-3 Décembre 1986. In: Actes du Colloque. Alger, Maison du livre, 133-156.

BERTIER, J. (1978) *Nicomaque de Gérase, Introduction Arithmétique.* Paris, Vrin [Introduction, traduction notes et index].

BRENTJES, S. (1984) "Die Erste Risāla der Rasā'il Ikhwān aṣ -Ṣafā¸ über elementar Zahlentheorie = ihr mathematischer gehalt und ihre beziehungen zu spätantiken arithmetischen Schriften". *Janus, LXXI, 1-4,* 181-274.

------- (1990a) "La transmission arabe de l'Introduction Arithmétique de Nicomaque au cours du 9^e siècle". *Colloque International sur "Innovation et transmission dans les Mathématiques arabes".* Paris, 25-27 Octobre 1990. A paraître.

------- (1990b) "La transmission arabe de l'Introductio Arithmetica dans des travaux non Mathématiques au cours du IX^e siècle". *3^e Colloque Maghrébin sur L'Histoire des Mathématiques Arabes.* Alger, 1-3 Décembre 1990. A paraître.

CURTZE, M. (1899) *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii.* Leipzig, Teubner.

DJEBBAR, A. (1984-1993) "Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle: al-Mu'taman et Ibn Sayyid". *Colloque International sur "Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVII^e siècle".* Marseille-Luminy, 16-21 Avril 1984. Paru dans: M. Folkerts et J.P. Hogendijk (Eds), *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard.* Amsterdam-Atlanta, GA 1993, 79-91.

------- (1990a) "Al-ishām ar-riyyāḍī li l-Mu'taman wa ta'thīruhū fī l-Maghrib [La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence au Maghreb]". *Colloque Maghrébin de Bayt al-Ḥikma sur "Le patrimoine scientifique arabe".* Carthage (Tunisie), 14-15 Février 1986. Publié dans l'ouvrage collectif: *Tārīkh al-*

*ᶜulūm ᶜinda l-ᶜArab* (l'Histoire des Sciences chez les Arabes). Carthage, Bayt al-Ḥikma, 1990. pp, 21-42.

------- (1990b) "Quelques commentaires sur les versions arabes des Eléments d'Euclide et sur leur transmission à l'Occident musulman". *Colloque International de Wolfenbüttel* (Allemagne), 18-22 Juin 1990, sur *"Arbeitsgespräch Mathematische Probleme im Mittelalter, der lateinische und arabische Bereich"*. Sous presse.

------- (1996) "La tradition arithmétique euclidienne dans le Kitāb al-Istikmāl d'al-Mu'taman et ses prolongements en Andalus et au Maghreb". *5ᵉ Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes,* Tunis, 1-3 Décembre 1996. A paraître dans les Actes du colloque.

GOLDSTEIN, B. (1964) "A Treatise on Number Theory from a Tenth Century Arabic Source". *Centaurus, 10,* 129-160.

GUERGOUR, Y. (1990) *al-aᶜmāl ar-riyyāḍ iya li Ibn Qunfudh al-Qasanṭ īnī* (t. 810/1407) (Les écrit Mathématiques d'Ibn Qunfudh al-Qasanṭ īnī (m. 810/1407)). Magister d'Histoire des Mathématiques. Alger, Ecole Normale Supérieure.

HOGENDIJK, J.P. (1986) "Discovery of an 11th century geometrical compilation: the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd, king of Saragossa". *Historia Mathematica, 13,* 1986, 43-52.

------- (1988) "Le roi géomètre al-Mu'taman Ibn Hūd et son livre de la perfection (Kitāb al-Istikmāl)". *Premier Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes,* 1-3 Décembre 1986. Paru dans la version française des Actes du Colloque. Alger, La Maison des Livres, 1988, 51-66.

------- (1990a) "Wich version of Menelaus' Spherics was used by al-Mu'taman ibn Hūd in his Istikmāl?". *Colloque International de Wolfenbüttel* (Allemagne), 18-22 Juin 1990, sur *"Arbeitsgespräch Mathematische Probleme im Mittelalter, der lateinische und arabische Bereich"*. Sous presse.

------- (1990b) "The Istikmāl of al-Mu'taman ibn Hūd and the Conics of Apollonius". A paraître dans les Actes du Colloque International sur *Innovation et transmission dans les Mathématiques arabes (VIIIᵉ-XVᵉ siècles),* Paris, 1991.

------- (1991) "The geometrical part of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century). An analytical table of contents". *Archives Internationales d'Histoire des sciences,* n° 127, Vol. 41, 207-281.

------- (1993) *Al-Mu'taman's lemma's for solving Alhazen's problem.* In: Hommage à J. Vernet. A paraître.

------- (1994) "Four constructions of two mean proportionals between two given lines in the Book of Perfection of al-Mu'taman Ibn Hūd". *Journal for the History of Arabic Science,* Volume 10, n° 1 & 2, 1992-93-94, 13-29.

IBN KHALDŪN, ᶜABD AR-RAḤ MĀN (1983) *Kitāb al-ᶜibar.* Beyrouth, Dār al-kitāb al-lubnānī-Maktabat al-madrasa, 14 vol.

IKHWĀN AṢ -ṢAFĀ' (non datée) *Rasā'il.* Beyrouth, Dār Ṣādir, 4 vols.

KHAYMĪ (AL-) & ḤĀFIḌ (AL-) (1987) *al-Fahrast al-ᶜāmm li makhṭūṭ āt dār al-kutub aẓ -Ẓāhiriyya.* Damas, Matbūᶜāt majmac al-lugha al-ᶜarabiyya.

KING, D.A. (1981) *Fahras al-makhṭ ūṭ āt al-ᶜilmiyya al-mahfūẓ a bi dār al-kutub al-miṣ riyya.* Le Caire, al-Hay'a al-miṣ riyya al-ᶜāmma li l-kitāb.

KUTSCH, W. (1958) *Kitāb al-Mudkhal ilā ᶜilm al-ᶜadad ... tarjamat Thābit Ibn Qurra.* Beyrouth, Imprimerie Catholique.

MAQQARĪ (AL-) (1968) *Nafḥ aṭ-ṭīb min ghuṣ ūn al-Andalus ar-raṭīb.* Edition de Ihsān cAbbās. Beyrouth, Dār Ṣādir, 1968, 8 vols.

SAIDAN, A.I. (1977) *Kitāb al-acdād al-mutaḥ ābba li Thābit Ibn Qurra.* Amman.

ṢĀcID AL-ANDALUSĪ (1985) *Kitāb ṭabaqāt al-umam.* Ed. H. Bucalwān. Beyrouth, Dār aṭ-ṭalīca, 1985.

VITRAC, B. (1990-1994) *Euclide d'Alexandrie, les Eléments (traduits du texte de Heiberg).* Paris, Presses Universitaires de France, vol. I (1990), vol. II (1994).

WOEPCKE, F. (1852-1986) *Notice sur une Théorie ajoutée par Thabit ben Korrah à l'Arithmétique spéculative des Grecs.* Journal Asiatique 4, série 20 (1852), 420-429 [Réédition en fac-simile in: Franz Woepcke: Etudes sur les Mathématiques arabo-islamiques. Edit. F. Sezgin. Frankfurt, 1986].