EL CONCEPTO DE REPRESENTACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN LINEAL EN LA COMUNIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

THE CONCEPT OF LINEAR TRANSFORMATIONS REPRESENTATION IN THE MATHEMATICS EDUCATION COMMUNITY

Osiel Ramírez Sandoval, Sergio Flores García*, María de los Ángeles Cruz Quiñones, María Dolores González Quezada, Valeria Aguirre Holguín

RESUMEN

Este escrito presenta un paneo enmarcado en la investigación en matemática educativa; partiendo del concepto de *representación* hasta las unidades significantes del concepto de *Transformación Lineal*. No se pretende constituir un estudio exhaustivo de este tópico del Álgebra Lineal, ni tampoco una revisión del estado del arte. Por el contrario, busca colocar en el escenario los diferentes enfoques del concepto de *representación* en la comunidad de Matemática Educativa; para así, abordar los *registros de representación* mayormente empleados al atender el concepto de *Transformación Lineal* en diversos estudios realizados e identificar las unidades significantes en cada uno de ellos.
Palabras Clave: Representación, registro, semiosis, transformación lineal.

ABSTRACT

This article presents an overview related to mathematics education research field. The scenario goes from the representation concept to the significant units of a linear transformation. This is not an exhaust study neither of this topic nor a state-of-art. Different scopes of representations concept used by mathematic education community are presented. In addition, representations registers mainly used during a linear transformation understanding process will be shared. This mathematical object identifies significant units through each representation.
Keywords: Representation, register, semiotics, linear transformation.

Recepción del artículo: 22.02.2017 Aceptado 15.06.2017

*seflores@uacj.mx Todos los autores son de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez; México.

Introducción

Existe una palabra en matemáticas que es *explotada* con tanta frecuencia, que cuando se incorpora al discurso matemático puede ser hasta rutinaria; nos referimos a la palabra *representación*, la cual habitualmente se emplea bajo su forma verbal, «*representar*». No obstante, existen diferentes aproximaciones para definir a la *representación* desde la perspectiva en la Didáctica de la Matemáticas. Kaput (1987) advierte que es "un verdadero peligro en *extender* un término no definido como la *representación* a través de dominios tan diferentes como las matemáticas formales, la cognición y la epistemología" (p. 23). Sin embargo, se han elaborado definiciones desde estos enfoques, por ejemplo Derrida (1973) emplea el término *representación* como un sinónimo de *signo*, señalando que "un signo, en su posibilidad de repetición indefinida, ya re-presenta el significado y, por lo tanto, es ya una representación de él" (citado en Radford, 1998, p. 14). Esta definición es semejante a la que Peirce ya había dado respecto al concepto de *signo* al señalar que "un signo, o *representamen*, es algo que está para alguien por algo en algún respecto o capacidad" (Peirce, 1955, p. 99).
En este artículo se presentan las diversas alternativas del uso de representaciones matemáticas para enriquecer el proceso de entendimiento de las transformaciones lineales. Además, se muestra un enfoque de las características de los diversos registros de representación en relación a las unidades significativas de esas transformaciones lineales.

Registros de representación

Algunos autores han hecho alusión al concepto de *representación*, dependiendo del contexto. Por ejemplo, Fischbein (1989) argumenta que la razón por la cual nos respaldamos en las representaciones, es porque el rol de una estructura conceptual formal es el de control y no el de inventar; señala que:

> Nosotros inventamos, entendemos, pero recurriendo básicamente a *representaciones* concretas, las cuales median entre el significado abstracto y el curso de alguna actividad concreta. Esto es ciertamente una afirmación trivial. Lo que no es trivial, es que muy frecuentemente, los sustitutos concretos no sólo inspiran y estimulan el proceso de razonamiento, sino de hecho, controlan su curso (p.13).

Tomando la perspectiva de que un objeto matemático, requiere de algo más que recibir un nombre para hacer referencia y apropiarse de él, D'Amore (2004) expresa que un concepto no escapa de servirse de representaciones para su conceptualización, de la siguiente manera:

> Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar; por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos (p. 5).

El concepto de representación en matemáticas se ha entendido en un sentido amplio, como todas aquellas herramientas que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con los cuales los individuos registran, resuelven y comunican sus resultados sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones, las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico. Se ha hecho referencia a algunas posturas respecto al concepto de representación, sin embargo no se pretende hacer una revisión de ellas, sino de ilustrar la importancia que tienen en la Matemática Educativa, poniendo de manifiesto los matices que puede tomar esta noción, mostrando la riqueza semántica e interpretación que tienen. Las características de las diversas representaciones que se emplean al momento de resolver una situación que involucra el concepto de Transformación Lineal, se ha reportado en diversas investigaciones (Molina & Oktaç, 2007, Ramírez, 2008; Ramírez-Sandoval et al, 2013, Romero, 2016). Para Duval el *objeto matemático* se construye; y señala que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación.

> Es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, es decir, los números, las funciones, las rectas, etc., con sus representaciones, es decir, las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras... pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes. (Duval, 1999 a, p. 3)

Duval (1999 a) postula la existencia de representaciones mentales internas y representaciones semióticas externas (ver Tabla 1); para ello muestra la divergencia entre una representación mental y una semiótica. La primera corresponde a:

> "todas aquellas (representaciones) que permiten una mirada del objeto en ausencia total de significante perceptible… que cubren un dominio más amplio que el de las imágenes, porque no sólo están involucrados los

> conceptos, las nociones, y las 'ideas', sino también las creencias y hasta las fantasías" (Duval, 1999 a, p. 10).

Las representaciones mentales internas engloban todas las concepciones que un individuo pueda tener sobre un objeto, una situación y lo que le esté asociado. De esta manera las representaciones mentales están vinculadas a la interiorización de representaciones externas, limitándose a una sola mirada, la de eso que es representado. De esta interdependencia entre las representaciones internas y externas, subyace la *paradoja cognitiva del pensamiento matemático* que Duval (1993) señala:

> por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no pueden ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos…si se llama ***semiosis*** a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y ***noésis*** a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la "*noésis es inseparable de la semiosis"* (p.176).

Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo para el aprendizaje. La relación que existe entre la semiosis y el pensamiento radica en que los signos se utilizan para hacer inteligible nuestras ideas, es decir; la semiosis es la que permite que estas ideas sean transformadas en símbolos. Ahora bien, la noesis es la representación mental, que es expresada a la noosfera[1] en forma de signos o símbolos a través de la semiosis; en palabras de Duval (1999, p. 5) no hay noesis sin semiosis, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis. Por lo tanto, la aprehensión conceptual, no va a ser posible sin recurrir al recurso de una gama de sistemas semióticos, pero aún más no basta el conocimiento de esta gama de sistemas semióticos, sino la coordinación de registros es una condición *esencial* para la aprehensión conceptual (Duval, 1999, p. 19) pero no se considera como suficiente para lograr aprendizajes exitosos, como se puede apreciar en los datos de Pavlopoulou (1993).

[1] Noosfera: Conjunto que forman los seres inteligentes con el medio en que viven.

Tabla 1.
Tipos y funciones de representaciones (Duval, 1999 a. p.9)

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	**Mental** Función de objetivación	**Semiótica** Función de objetivación Función de expresión Función de tratamiento intencional
NO-CONSCIENTE	**Computacional** Función de tratamiento automático o cuasiinstantáneo.	

Registro de Representación Semiótica

El campo de la disciplina matemática es muy vasto. En el andamiaje de la aprehensión del conocimiento en matemáticas se genera una gama de actividades cognitivas, como la conceptualización, el razonamiento, la inferencia, la demostración, la resolución de problemas, etc. Todas ellas demandan el uso de sistemas de expresión y una gama de representaciones diferentes al lenguaje natural, como lo hemos venido indicando. Es entonces que las representaciones semióticas se vuelven una herramienta imprescindible para la construcción de objetos matemáticos. Duval (1993) manifiesta que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Para ello, un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite las tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis: 1) La formación de una representación identificable, 2) El tratamiento de una representación y 3) La conversión de una representación en otra, en un registro diferente. (Duval,1993)

Además, es importante hacer hincapié, que la semiosis requiere de varios registros relacionados mediante conversiones; las cuales surgen de una necesidad y por lo tanto, no son completamente algorítmicas.

Clasificación de registros de representación

Es importante considerar los rasgos que guardan los registros de representación, dado que eso nos permitirá tener presente el tipo de tratamientos que se pueden efectuar por su naturaleza. Hemos identificado en las diversas investigaciones reportadas (Molina &

Oktaç, 2007, Ramírez, 2008; Ramírez-Sandoval et al, 2013, Romero, 2016) una gama de representaciones semióticas al abordar el concepto de Transformación Lineal; siendo principalmente: el registro gráfico, algebraico, matricial, escrito y lengua natural. Duval (2006) identifica cuatro clases de registros utilizados en matemáticas, correspondiente a cada celda de la Tabla 2.

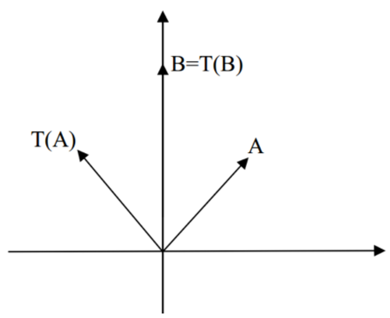
Tabla 2.
Clasificación de los diferentes registros que pueden ser movilizados en los procesos matemáticos (Duval, 2006, p. 110)

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	**REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA**
REGISTRO MULTIFUNCIONAL Los procesos no se pueden hacer en algoritmos.	Lenguaje Natural Verbal (conceptual) las asociaciones. Razonamiento: -argumentos a partir de las observaciones, creencias… - deducciones válidas de las definiciones o teoremas	Plano o perspectiva de figuras geométricas (configuraciones de 0, 1, 2, y 3 formas dimensionales) Operatorio y no sólo aprensión perceptiva Construcción con Regla y compás.
REGISTRO MONOFUNCIONAL La mayoría de los procesos son algorítmicos.	Sistema notacional: Numérico (binario, decimal, fraccionaria…) Algebraica Simbólico (lenguajes formales)	Gráficos cartesianos Los cambios de sistema de coordenadas Interpolación, extrapolación

Se puede señalar que los procesos asociados a registros monofuncionales dentro de un sistema semiótico toman la forma de algoritmos, y pueden ser usados para una sola función cognoscitiva: el procesamiento matemático, que es el caso de la representación algebraica, puesto que la mayoría de sus tratamientos son algorítmicos.

En los procesos de aprendizaje de matemáticas los tratamientos de este registro son los más privilegiados. Sin embargo, algunos resultados reportan que aunque los estudiantes muestren la definición de Transformación Lineal de manera algebraica; o más aún, realicen tratamientos en éste registro para discernir si se encuentran frente a una Transformación Lineal o no. Existe evidencia de las dificultades para identificar una Transformación Lineal en el registro geométrico o proporcionar una Transformación Lineal en cualquier registro (Ramírez-Sandoval et al, 2013). Mientras que los registros multifuncionales nunca pueden ser convertidos en algoritmos, porque estos forman una vasta gama de funciones cognoscitivas; en estos registros el tratamiento no es algoritmizable, como es el caso de una representación gráfica, en ella coexiste de alguna manera el procesamiento de información, argumentación, comunicación (lengua natural), descripción, intuición, deducción, imaginación, etc. Respecto a los registros discursivos y no discursivos, Duval (2004) comenta que "los registros discursivos permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los registros no discursivos permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible" (p.51).

Figura 1.
Transformación Lineal, reflexión respecto al eje y (Ramírez, 2008, p. 55).



A pesar que Duval (1993), declara las actividades cognitivas que debe cumplir un registro de representación semiótica, no especifica la características de cada una de ellas. Diversas investigaciones (Pavlopoulou, 1993; Soto, 2003; Soto et al., 2012, Ramírez-Sandoval et al., 2013) describen las características de los registros de representación usados o recomendados para el estudio del Álgebra Lineal. A continuación se muestra una descripción que aunque no exhaustiva, proporciona mayor detalle sobre las características de los registros empleados para abordar el concepto de *Transformación Lineal*, basándose en las diversas investigaciones que han atendido éste tópico (Molina y Oktaç, 2007; Ramírez, 2008; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; Ramírez-Sandoval et al, 2013; Camacho, 2016; Romero, 2016).

Registro Verbal

Este registro multifuncional es el que un individuo se apoya al explicar las estrategias que empleará para llegar a la solución de un problema en matemáticas, partiendo de las observaciones y deducciones que logra percibir y declararlas. Esta situación se presentó cuando en una entrevista el estudiante proporcionó la definición de Transformación Lineal o las condiciones que debe de cumplir ésta de manera verbal o más aún, explicó mediante operaciones discursivas (designación de objetos, argumentación sobre esos objetos, generación de una proposición e integración de esa proposición como una concatenación) para llegar a su conclusión a una situación planteada, haciendo uso del lenguaje sea “natural o formal”.

Registro Geométrico

Este es un registro multifuncional; recordemos que, en estos registros, los procesos no pueden realizarse mediante algoritmos. En la categorización de Duval (2006) este registro pertenece a una representación no discursiva. Considerando al *tratamiento* en nuestro caso como la construcción de la imagen de una Transformación Lineal de una figura en el plano cartesiano R^2. Una reflexión, una rotación o la conservación de algunos segmentos o ángulos de la figura original, constituye un ejemplo de esta situación.

En las investigaciones analizadas (Ramírez, 2008; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; Ramírez-Sandoval et al, 2013; Camacho, 2016; Romero, 2016), las situaciones que se presentan de Transformaciones Lineales en el registro geométrico, se muestran en el plano cartesiano (R^2). Por ejemplo, en las diversas situaciones que ilustran una Transformación Lineal a los segmentos de líneas las transforma generalmente en líneas y a las figuras geométricas cerradas, las transforma en figuras cerradas (paralelogramos, círculos, elipses, etc.). Una situación semejante se presenta al transformar alguna área de una figura, nuevamente en otra área. Sin embargo, estas situaciones no se pueden generalizar, por ejemplo una recta puede ser transformada en un punto, en este registro estamos colocando nuestra atención a la forma, el tamaño, la orientación o dirección de los vectores plasmados en relación al plano cartesiano.

Registro algebraico

Este registro es de constitución monofuncional; se identifica claramente con esta característica porque la mayoría de sus procesos son algorítmicos, que involucran la escritura numérica, algebraica y simbólica, llamados también *lenguajes formales*. Es en este registro donde una de las tres actividades cognitivas de una representación logra explayarse como en ningún otro registro en el álgebra; nos referimos al *tratamiento*, con el atributo que permite mostrar de manera compacta la reproducción o producción de resultados en la actividad matemática, para ilustrar esta situación podemos citar a Hitt (2002) donde en un ejemplo de espacios vectoriales muestra que el conjunto de todas las matrices 2x2, denotadas como M_{22} forman un espacio vectorial real; para ello muestra que cumple los requisitos para que este espacio lo sea, mostraremos la propiedad conmutativa donde $A_{22}+B_{22}=B_{22}+A_{22}$ de la siguiente manera.

Sean A_{22}, B_{22} dos matrices de M_{22}, con respecto a la operación + se tiene que:

$$A_{22}+B_{22}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12}\\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=B_{22}+A_{22}$$

(p.92)

En base a un ejemplo donde se observe el carácter simbólico del registro algebraico, podemos citar una demostración que involucra a las Transformaciones Lineales mediante el siguiente teorema, en Hitt (2002). Sea $T: E \to F$ una transformación lineal, entonces si $\vec{x}, \vec{y}$ son vectores de E y α, β escalares de R, se tiene que:

$$T(\alpha\vec{x}-\beta\vec{y})=\alpha T(\vec{x})-\beta T(\vec{y})$$

Demostración:

$$T(\alpha\vec{x}-\beta\vec{y})=T(\alpha\vec{x})+(-\beta\vec{y}))=\alpha T(\vec{x})+(-\beta)T(\vec{y})=\alpha T(\vec{x})-\beta T(\vec{y})$$

(p. 135)

Se puede observar en ambos ejemplos los atributos en este registro algebraico en su presentación compacta y simbólica, propias de su tratamiento.

Registro Matricial

En la clasificación de los registros Duval (2006) no menciona a este registro de manera explícita, sin embargo, forma parte de uno de los diversos registros de representación semiótica empleados en la actividad matemática, al cumplir con las tres actividades cognitivas señaladas por él, especialmente en el campo del álgebra lineal. La actividad cognitiva referente a la ***formación***, implica una selección de los rasgos que caracterizan y determinan lo que se pretende representar; la comunidad matemática, comprenden que una matriz corresponde a un *arreglo* de coeficientes que está establecido por una determinada cantidad de renglones y columnas. También es de nuestro conocimiento que existe un amplio campo de estudio de este objeto matemático; nos referimos a la *teoría de matrices*, la cual determina sus propias reglas de operación de estos objetos, permitiendo *transformar* la matriz original en otra, según sea la operación realizada, todo esto sucede dentro en el mismo registro, a esta actividad se le definió como ***tratamiento***. La última actividad corresponde a la ***conversión***, un primer momento en que se presenta esta actividad, está en la esencia de una matriz, es decir, una matriz es una *transformación* de un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, es la conversión más inmediata que se presenta, pero no la única, puesto que ciertos arreglos matriciales pueden desempeñar el mismo papel que un vector, al formar parte de un espacio vectorial.

Un ejemplo de la utilidad y empleo de este registro es el que muestra Hitt (2002), en una aplicación de una Transformación Lineal sobre el espacio vectorial de matrices 2x2. El ejercicio consiste en demostrar, en el espacio vectorial de matrices $M_{22,}$ de la siguiente manera:

Sea M_{22} el espacio vectorial de las matrices 2x2. Consideremos la transformación $T{:}M_{22}\to M_{22,}$ tal que si $\vec{x}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es un elemento de M_{22},

$$T(\vec{x})=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Demostrar que *T* es una transformación lineal.

Demostración: Sean $\vec{x}$ y $\vec{y}$ dos matrices de M_{22}, y α y β escalares de R.

$$T(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\left(\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha a+\beta e & \alpha b+\beta f \\ \alpha c+\beta g & \alpha d+\beta h \end{pmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \alpha a+\beta e+\alpha c+\beta g & \alpha b+\beta f+\alpha d+\beta h \\ \alpha a+\beta e+\alpha c+\beta g & \alpha b+\beta f+\alpha d+\beta h \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \alpha a+\alpha c & \alpha b+\alpha d \\ \alpha a+\alpha c & \alpha b+\alpha d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta e+\beta g & \beta f+\beta h \\ \beta e+\beta g & \beta f+\beta h \end{bmatrix}$$
$$=\alpha\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} e+g & f+h \\ e+g & f+h \end{bmatrix}$$
$$=\alpha\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\alpha T(\vec{x})+\beta T(\vec{y}).$$

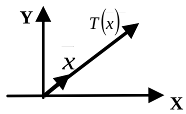
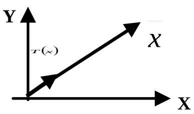
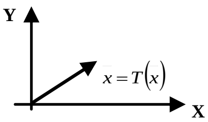
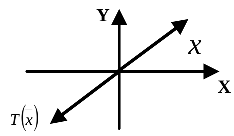
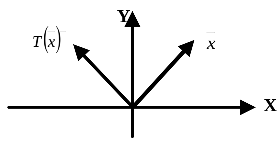
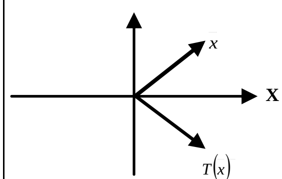
(p.134)

Unidades Significantes.

La puesta en correspondencia de dos representaciones pertenecientes a registros diferentes, puede establecerse localmente a través de una correspondencia asociativa entre las unidades significantes elementales constitutivas de cada uno de los registros. Empleando la información presentada en el apartado dos, se presenta a un cuadro

(Ver Tabla 3) donde se plantean algunas situaciones que muestran la importancia que implica identificar las *variables* que están involucradas en cada registro. Cabe resaltar que sólo se muestra de manera general las situaciones donde los coeficientes de la diagonal de la matriz transformación ($\boldsymbol{a_{11}}$ y $\boldsymbol{a_{22}}$) toman diversos valores.

Tabla 3.
Ejemplos de representaciones de la Transformación Lineal en diferentes registros

ACCION DE LOS COEFICIENTES			
Registro Verbal	**Registro Algebraico, para los coeficientes a_{ij} de la matriz transformación M_{22}.**	**Registro Gráfico**	**Registro Geométrico**
Con coeficientes mayores a uno en la diagonal de la matriz de la transformación.	***a_{ij} >1*** ***Con i=j, en otro caso el coeficiente vale cero.***		Expansión
Con coeficientes mayores a cero y menores a uno en la diagonal de la matriz de la transformación.	***0< a_{ij} <1*** ***Con i=j, en otro caso el coeficiente vale cero.***		Contracción
Con coeficientes iguales a uno en la diagonal de la matriz de la transformación.	***a_{ij}=1*** ***Con i=j, en otro caso el coeficiente vale cero.***		Identidad
Con coeficientes menores a uno en la diagonal de la matriz de la transformación.	***Aij<1Con i=j, en otro caso el coeficiente vale cero.***		Rotación o Reflexión respecto al origen.
Los coeficientes de la diagonal de la matriz de la transformación, con signos contrarios.	***a_{11}< 0 & a_{22}> 0*** ***Los otros coeficientes valen cero***		Reflexión respecto al eje “y”.
Los coeficientes de la diagonal de la matriz de la transformación, con signos contrarios.	***a_{11}> 0 & a_{22}< 0*** ***Los otros coeficientes valen cero***		Reflexión respecto al eje “x”.

Lo anterior permite un panorama para identificar algunas variables involucradas en la conversión de un registro a otro, al atender el concepto de Transformación Lineal en el plano. Siguiendo esta dirección Duval (2008) asegura que "la distancia cognitiva subyacente a cualquier conversión depende del tipo de registros de origen y destino. Por lo tanto, hay tantos tipos de conversiones a investigar y tomar en cuenta, como tantas parejas de registros haya" (p. 56).

Conclusiones

Consideramos de sumo interés el colocar en relieve lo imprescindible que son los signos en matemáticas, y no acotarlos a un simple uso de comunicación. Identificar y declarar la diversidad de sistemas de representación que emplean en la enseñanza-aprendizaje es importante para poseer una comprensión integradora del concepto. "La coordinación entre registros no es una consecuencia de la aprehensión conceptual (noesis) sino que, al contrario, el logro de dicha coordinación es una condición esencial de la noesis" (Godino 2003, p. 57).

Eventualmente en el aprendizaje de la matemática escolar, los estudiantes a menudo adquieren conceptos de manera aislada y no de una manera estructurada, organizada, donde estarían dispuestos a resolver situaciones novedosas, sino al contrario se llega a profundas dificultades cuando se abordan situaciones completamente nuevas que requieren más que sólo recordar una definición, un proceso, o método aprendido en el aula.

De acuerdo con el análisis realizado a algunas investigaciones que han atendido el tópico de *Transformación Lineal* bajo diversos marcos teóricos; se observó que la reproducción de la definición de *Transformación Lineal*, por parte de los estudiantes, podría decir muy poco sobre su comprensión de este concepto. Por otro lado se reporta que, cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros exitosamente al presentársele alguna situación matemática, busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverlas. Sin embargo, el que un individuo resuelva alguna situación matemática de manera satisfactoria, no implica que tenga la habilidad de coordinar (Ramírez-Sandoval, et al, 2013).

Se puede concluir que la ausencia de coordinación entre los registros crea obstáculos en el aprendizaje del *Álgebra Lineal*. Consideramos que este problema puede ser remontado, con un aprendizaje específico, centrado en la diversidad y heterogeneidad de los sistemas de representación; en su comparación, correspondencia y conversión de los registros posibles, con la selección consciente del registro en el que se va a trabajar para aprovechar las ventajas de éste en la situación particular, para no incurrir en la no-congruencia, ausencia de coordinación y/o mezcla de registros, partiendo de la identificación las unidades significantes y ejemplos prototipo.

Referencias Bibliográficas

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas,* (35), 90-106.

Camacho Espinoza, G. & Oktaç, A. (in press). Exploración de una transformación lineal de R^2 en R^2. Acercamiento a la construcción de vectores y valores propios a través de subespacios invariantes. *Proceedings Fifth ETM Symposium*. Florina, Greece.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, (5), 37-65. (Tra.). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, E. (Ed) Investigaciones en Matemática Educativa II. (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Duval, R. (1999). *Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics. En L. Radford, g. Schubring & F. Seeger (Eds.). *Semiotics in Mathematics Education: epistemology, history, classroom and culture*. (pp. 39-61). Rotterdam: Sense Publishers

Fischbein E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics*, (2), 9-14.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Granada: Universidad de Granada.

Hitt, F. (2002). *Álgebra Lineal*. México DF.:Pearson Educación.

Kaput, J.J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics* (pp.19-26). Hillsdale, New York: LEA.

Molina, G. & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 241-273.

Pavlopoulou, K. (1993). Un probleme décisif pour l'apprentissage de l'algebre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de didactique et de Sciences cognitives,* (5), 67-93.

Peirce, C. S. (1955). *Philosophical Writings.* J. Buchler, (Selec.-Ed.). New York: Dover.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35*(1), 277-302.

Ramírez, O. (2008). *Modelos intuitivos que tienen algunos estudiantes de matemáticas sobre el concepto de Transformación Lineal*. (Tesis de Maestría). México: Cinvestav–IPN.

Ramírez-Sandoval, O. Romero-Félix, C. F. & Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de transformaciones lineales en el plano. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (19), 225-250.

Romero-Félix (2016). *Aprendizaje de Transformaciones Lineales mediante la coordinación de representaciones estáticas y dinámicas.* (Tesis de doctorado). México: Cinvestav– IPN.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

Soto, J.L. (2003). *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en R2 y R3.* (Tesis de Doctorado). México: Cinvestav– IPN.

Soto, J. L., Romero, C. F. & Ibarra S. E. (2012). El concepto de transformación lineal: una aproximación basad en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds). *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Quebec, Canada: Loze-Dion éditeu.