LLULL, vol. 15, 1992, 85-127

CONDICIONES DE COMPACIDAD DE ASCOLI-ARZELA

FYODOR A. MEDVEDEV
Instituto de Historia de la Ciencia y la Tecnología de Moscú

RESUMEN

En este artículo se analizan los trabajos de G. Ascoli y C. Arzelà sobre conjuntos infinitos de funciones a finales del siglo XIX, mostrando su papel en los orígenes de la topología y el análisis funcional.

Se consideran en primer lugar los resultados de Ascoli sobre equicontinuidad y sobre condiciones de compacidad para conjuntos infinitos de funciones continuas; seguidamente se trata la introducción por Arzelà de la convergencia cuasi uniforme de series funcionales y su acercamiento a la idea de cuasi equicontinuidad.

Se observa, por una parte, que estos estudios fueron motivados por problemas aplicados, como la existencia de solución de ecuaciones diferenciales, el problema de Dirichlet y las condiciones de convergencia, diferenciabilidad e integrabilidad de series funcionales, temas todos ellos abordados por Arzelà.

ABSTRACT

In this paper G. Ascoli and C. Arzelà's works on infinite function sets at the end of the 19th century are analysed, showing their role in the origins of topology and functional analysis.

First, Ascoli's results on equicontinuity and compactness conditions for infinite sets of continous functions are considered and then Arzelà's introduction of quasiuniform convergence for series of functions and his ideas on quasiequicontinuity are dealth with.

These studies were motivated by applied problems such as Dirichlet problem, the existence theorem for the solution of a differential equation and others, which were studied by Arzelà.

Recibido el 30 de junio de 1991

Se muestra además que estos estudios no pueden ser entendidos como una mera transferencia de los resultados de teoría de conjuntos de Cantor y que el esquema propuesto por la teoría de conjuntos puntuales no se podía ser recogido directamente al no ser válido el teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos acotados en general.

As to Cantor's set theory, Ascoli and Arzelà's work cannot be considered as a mere transfer of these ideas; Bolzano-Weierstrass theorem does not hold for bounded sets different from ordinary sets in n-dimensional euclidean spaces, and a solution had to be found to generalize the ideas of compactness and bounded sets.

Palabras clave: Matemáticas, Topología, Análisis funcional, Teoría de conjuntos, Siglos XIX-XX, G. Ascoli, C. Arzelà, Infinito, Compacidad.

1. Sobre las condiciones de compacidad

Las condiciones de compacidad analizadas a continuación entran de modo natural en la historia del concepto de infinito y ofrecen unas facetas de éste nuevas e inesperadas.

Ante todo, en dichas condiciones se reveló el tipo específico de los conjuntos infinitos. Antes de que se sometieran a examen dichas condiciones, se han estudiado básicamente dos tipos de conjuntos infinitos, a saber, los euclidianos-puntuales y los completamente abstractos; sin embargo, actualmente se ha añadido una nueva clase de dichos conjuntos, la de los conjuntos de curvas y funciones. Y aunque estos últimos se incluyen en el concepto general de conjunto, al mismo tiempo poseen muchas particularidades específicas que implican la obligación de realizar su estudio de forma distinta.

En segundo lugar, se trata de un nuevo enfoque de los métodos de estudio de los conjuntos. El concepto abstracto de conjunto no aportaba mucho a la comprensión de los conjuntos concretos, incluso puntuales. En el siglo XIX estos últimos aparecieron y se estudiaron, preferentemente, en el curso de investigaciones aplicadas, fundamentalmente dentro de los marcos del análisis clásico y de la teoría de las funciones de variable real. A este tema está dedicado un gran número de trabajos histórico-científicos y filosóficos, de los que pueden servir como ejemplo las obras [1-7]. Estos estudios muestran que la aparición de los conjuntos puntuales y su interpretación surgieron a raíz de las necesidades del análisis en sentido amplio: de las teorías de diferenciación y de integración, de las series infinitas, etc. Aparecieron bajo forma de conjuntos particulares y de sus clases y se consideraron como tales en cuanto objetos individuales o colecciones de éstos, con la característica de que propiedades aisladas de los mismos eran generalizables a conjuntos abstractos.

Este mismo enfoque se perfiló en un principio en el análisis de los conjuntos de curvas y funciones, abordándose, una vez más secundariamente, la teoría de conjuntos abstractos. Sin embargo, pronto se puso de manifiesto que los conjuntos funcionales era mucho más complejos que los puntuales, y que para ellos se requerían enfoques completamente distintos. Se encontraron así tratamientos apropiados, que consistieron principalmente en la superposición de cierta estructura abstracta a los conjuntos examinados: esta estructura, topológica o algebraica, permitía hacer desaparecer formaciones demasiado complicadas. Resultó así que, como tal formación estructural, que resultaría principal para los conjuntos de curvas y funciones y, más adelante, también para otros tipos de conjuntos, intervino la concepción de espacio funcional.

Esta situación, por algunos de sus rasgos, se parece a la sucedida en la geometría cuando en ésta se renunció a la definición euclidiana del concepto de *ángulo* como objeto formado por dos curvas relativamente arbitrarias, debido a su carácter por decirlo así "complejo", y se tomó como base la idea de un par de rayos que parten de un mismo punto. Con ello, en particular, se excluían inmediatamente de la geometría formaciones tan complejas como los ángulos corniformes, que habían sido causa de desvelos para muchas generaciones de geómetras. La vida de los científicos se alivió, pero a costa del empobrecimiento de los objetos sujetos a estudio. La inflación, temporalmente, sacaba del apuro[1]. Un empobrecimiento semejante tuvo lugar en el caso del nuevo enfoque de los conjuntos que se consideran aquí; pero esto, no obstante, supuso uno de los más poderosos estímulos para ulteriores investigaciones.

En tercer lugar, es sabido el papel que desempeña en la teoría de los conjuntos puntuales (y, con ello, en toda la matemática) el concepto de conjunto acotado. Al ser extendido a otros tipos de conjuntos, en particular a los conjuntos de funciones y curvas, la transferencia de las condiciones de acotación a dichos conjuntos causó y sigue causando hasta la fecha muchas dificultades, conduciendo a un nuevo concepto fundamental de conjunto compacto. Ya M. Fréchet en 1906 [9, pp. 2-3 y 6-15] tomó plena conciencia de la importancia de este último y, desde entonces, su papel se ha incrementado cada vez más.

El concepto de acotación en matemáticas es tan natural, tan común y corriente, que, hasta cierto punto, es poco oportuno proceder con él a un análisis similar al que se hace al estudiar otros conceptos científicos. Y, por lo que se sabe, es posible que se deba precisamente a esta razón el que dicha cuestión todavía no haya sido objeto de reflexiones histórico-científicas y filosóficas. Entre tanto, es bien conocido por la historia de la ciencia que precisamente el análisis de fenómenos aparentemente conocidos hasta la médula y de las ideas acerca de los mismos ha llevado, con frecuencia, a transformaciones conceptuales de las más fundamentales en la ciencia. Así sucedió, por ejemplo, con la creación de la teoría de la relatividad. Se puede decir que algo semejante tuvo lugar en las matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX cuando se abordó el concepto de número, en definitiva, el número natural, es decir, un concepto aparentemente tan antiguo, conocido a más no poder y tan claro intuitivamente que no requería reflexión alguna. No se puede excluir que el abordar el concepto de acotación y sus generalizaciones, en particular en forma de compacidad, lleve a resultados similares: pero se trata tan sólo de una conjetura fantasiosa. Ahora bien, la acotación y la compacidad se conectan de modo natural con lo finito y el infinito, circunstancia que también justifica nuestro análisis, más aún cuando semejante conexión - ésta es la impresión- no ha sido estudiada de manera general.

Finalmente, en cuarto término, al trabajar con las condiciones de compacidad se "rastrea" bien el "juego" de lo potencial con lo actual[2].

La palabra "finalmente" no significa que la enumeración anterior agote todo el conjunto de argumentos a favor del estudio de este problema; sin embargo, lo expuesto resulta a todas luces más que suficiente.

2. Algunos antecedentes

Es casi universalmente admitida la opinión de que los primeros en proceder a estudiar los conjuntos infinitos de funciones o de curvas fueron los matemáticos italianos G. Ascoli (1843-1896) y C. Arzelà (1847-1912) y que su modo de enfocar este estudio consistía en procurar trasladar las tesis básicas de la teoría de Cantor sobre conjuntos puntuales a nuevos conjuntos más complejos. Así, por ejemplo, A. Schoenflies escribió en 1908:

> "G. Ascoli y C. Arzelà fueron los primeros que emprendieron la traslación de los conceptos y de los teoremas de la teoría de Cantor de los conjuntos puntuales a los conjuntos de curvas continuas, encontrándose, además, en inmediata proximidad a los resultados de Cantor" [11, p. 264].

Lo expuesto es válido solamente en una primera aproximación; en realidad, el cuadro que representa los enfoques de los matemáticos que se ocuparon del estudio de los conjuntos de curvas y funciones es mucho más complicado e interesante. Aquí, por supuesto, no se pretende esbozar este cuadro, de modo que nos veremos obligados -al igual que en otros muchos casos- a limitarnos a varias observaciones, en la mayoría de los casos en forma de ejemplos ilustrativos.

En realidad, los matemáticos se habían encontrado con diversos conjuntos infinitos de curvas y funciones casi desde el mismo principio del surgimiento del análisis infinitesimal; y en el curso de todo su desarollo estudiaron muy variados conjuntos de este tipo, que se complicaban cada vez más a medida que se profundizaba en ellos. Incluso se puede decir que el propio análisis es, en cierto grado, la ciencia de los conjuntos infinitos de funciones y de las familias o clases de tales conjuntos. También es posible ir más allá y afirmar que cada fórmula de la geometría analítica representa una característica de cierta clase de curvas: así, por ejemplo, una ecuación de segundo grado define una clase infinita de curvas que consta de rectas, circunferencias, elipses e hipérbolas. Y a pesar de ser "directamente visualizables" e "intuitivamente claros de modo fidedigno", etc., resulta que tales conjuntos, por supuesto, son definitiva y actualmente infinitos, con lo que el infinito actual en toda su multiformidad se halla en nuestras manos.

Veamos otros ejemplos tomados del análisis.

Cuando B. Cavalieri, hablando en lenguaje moderno, obtuvo por primera vez la fórmula

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

identificó con ello la clase infinita de parábolas $y = x^n$ y estableció una propiedad común para todas ellas expresada por dicha fórmula. Sin embargo, hoy, digámoslo de paso, los historiadores y los filósofos, cuando dirigen sus reproches a Cavalieri, no ven -no se sabe por qué motivo- que el científico introdujo estos infinitos actuales "ilícitamente", y se limitan a criticar su método de los indivisibles, aunque estos últimos *actuales* no sean peores (aunque tampoco mejores) que los primeros.

Lo mismo se puede decir sobre las indagaciones de P. Fermat, E. Torricelli, G. P. Roberval y otros en relación con las generalizaciones de la fórmula de Cavalieri a exponentes fraccionarios, en las que se destacan clases más amplias de curvas: las parábolas de orden fraccionario.

Cuando I. Newton introdujo a su uso por los matemáticos la clase de las series de potencias (naturalmente, infinitas), resultó destacado el conjunto de funciones enteras de variable real. Se sobreentiende que, en un principio, este conjunto carecía en absoluto de contornos precisos y era infinitamente indefinido; pero justamente este carácter indefinido, borroso, como en otros muchos casos, resultó ser no sólo inevitable desde el punto de vista histórico, sino también, en los primeros tiempos, incluso útil e imprescindible.

Y he aquí que L. Euler emprendía la creación del cálculo de variaciones. A la par que el problema de extremos de funcionales dado en la clase tradicionalmente indefinida de "todas las curvas" -"método absoluto de máximos y mínimos" de Euler[3]-, el científico planteaba el problema de hallar los extremos de las funcionales en la clase de todas las curvas: se trata de su "método de máximos y mínimos relativos" [12, p. 31]. El destacar estos conjuntos de curvas y el subrayar la circunstancia de que cada uno de los mismos se considera en cuanto formación dada y fija -en una palabra, como un conjunto actualmente infinito- no es meramente algo sacado del contexto euleriano: él lo expone de modo completamente determinado. Por supuesto, en el texto de Euler no figuran los términos "conjunto de curvas" o "conjunto de funciones". El concepto que entenderíamos con tal expresión es caracterizado por el científico empleando el término "curvas que poseen alguna propiedad de antemano" [12, p. 31]. He aquí lo que escribe Euler al respecto:

> "El método relativo de máximos y mínimos enseña a determinar la curva que posee la propiedad de máximo o de mínimo, no entre todas las curvas correspondientes a una misma abscisa, sino solamente entre aquéllas que tienen alguna propiedad dada de antemano... Aunque la introducción de esta condición limita considerablemente el número de todas las curvas referidas a una misma abscisa, sin embargo, tras ello dicho número permanece todavía infinito. Sea como fuere, incluso en el caso de señalar no una sino varias propiedades que deben satisfacer todas las curvas, también entonces el número de curvas seguiría siendo infinito"[4].

Hemos aducido solamente tres ejemplos que ilustran nuestra afirmación de que los diversos conjuntos de curvas o de funciones aparecían constantemente en el análisis infinitesimal, ya desde los periodos más remotos de su desarrollo. Cuanto más nos acercamos a nuestra época, tanto más aumenta la diversidad de los tipos de conjuntos de funciones, al punto que se pueden aducir tantos ejemplos como se quiera: los conjuntos de funciones continuas, diferenciables, integrables en uno u otro sentido, con variación limitada que satisface la condición de Lipschitz... son concomitantes indispensables del análisis. Más bien resulta extraño el hecho de que el problema del estudio especial de los conjuntos infinitos de funciones como tales surgiera relativamente tarde, una vez que fueron construidas la teoría de los conjuntos puntuales y la teoría de los conjuntos abstractos. (Estas teorías son esencialmente diferentes y A. Fraenkel escribió incluso que *los caminos y las finalidades de estas dos teorías divergieron con bastante rapidez* [14, p. 17]).

El hecho de que, por un lado, existiera la teoría de los conjuntos puntuales de los espacios euclidianos y, por otro lado, la teoría de los conjuntos abstractos -en la que se hace máxima abstracción de la naturaleza de los elementos analizados-, hacía hasta cierto punto lógica la idea de que se estudiaran conjuntos de tipo intermedio, es decir, más complejos que los conjuntos de puntos de los espacios euclidianos y menos abstractos que los conjuntos arbitrarios, máxime cuando había candidatos más que suficientes susceptibles de ser objeto de estudio. De este modo, la existencia de dos teorías extremas por así decir de conjuntos permitía comenzar a su vez la construcción de teorías intermedias. Como una de tales se presentaría precisamente la teoría general de los conjuntos de curvas y funciones de G. Ascoli y C. Arzelà, propuesta y parcialmente realizada por estos científicos.

Sin embargo, una visión semejante del curso de los acontecimientos, que es hasta cierto punto plausible, resulta injustificablemente simplificada, si se tiene en cuenta que en el momento en que G. Ascoli comenzó la realización de su idea ya existía una teoría de este género (y, posiblemente, no una sola). Nos referimos a la teoría de los números y funciones algebraicas de R. Dedekind, a quien más tarde se unió H. Weber, que se construyó paralelamente al desarrollo de la teoría de los conjuntos puntuales, precediéndola incluso en ocasiones[5]. El punto culminante de sus esfuerzos fue el trabajo conjunto "Teoría de las funciones algebraicas de una variable" [16], terminado por estos científicos en 1880 y publicado en 1882, es decir, un año antes de los primeros trabajos de G. Ascoli. Tampoco en C. Arzelà se deja ver la influencia del artículo de Dedekind-Weber [16] (al igual que de otras investigaciones más tempranas de Dedekind en esta dirección), razón por la cual no hay necesidad de detenernos aquí en este punto.

3. La influencia de la teoría de conjuntos puntuales

La opinión referida al principio de la sección 2 acerca de la influencia ejercida por la teoría de los conjuntos puntuales sobre los enfoques de G. Ascoli y C. Arzelà, que ha sido ilustrada por las palabras de A. Schoenflies, tiene ciertamente su base; las huellas explícitas de una tal influencia, en efecto, se rastrean de forma concreta en sus investigaciones. Sin embargo, esta afirmación no se debe interpretar demasiado literalmente, como si se tratase de que, una vez conformada una teoría de los conjuntos puntuales, los italianos hubieran procedido a extender a los conjuntos funcionales los resultados de la primera teoría. Semejante cosa no pudo producirse, por la sencilla y natural razón de que algunas de las tesis fundamentales de la teoría de Cantor resultaron imposibles de trasladar al conjunto de curvas y funciones. Además, no carece de interés observar que ni Ascoli, ni Arzelà, hablaron directamente en sus trabajos de una tal interpretación del problema, y que, al parecer, el primero no hacía siquiera mención en general del nombre de Cantor en este contexto[6].

Así pues, si bien A. Schoenflies no tenía plena razón al afirmar que fueron precisamente G. Ascoli y C. Arzelà quienes emprendieron *la traslación de los conceptos y de los teoremas de la teoría de Cantor sobre los conjuntos puntuales a los conjuntos de curvas continuas, encontrándose, además, en inmediata proximidad a los resultados de Cantor*, sí la tenía en que la idea de semejante traslación indudablemente existía. Esta idea, en particular, era destacada especialmente por J. Hadamard y M. Fréchet. Además, de modo algo extraño, a éstos se ha unido R. Siegmund-Schultze, que afirmaba que *Ascoli y Arzelà trasladaron los conceptos de Cantor a los conjuntos de funciones, y correspondientemente de curvas (1884-1889)* [10, p. 20]. Antes de comenzar a tratar esta cuestión conviene decir unas palabras sobre las investigaciones de V. Volterra en análisis funcional[7].

Cuando Volterra introdujo, estudiándolo después durante mucho tiempo, el concepto general de funcional, prestó poca atención a su argumento, considerándolo como algo dado y más o menos conocido (o bien, determinado por el carácter del funcional)[8]. Por el contrario, J. Hadamard, al empezar a ocuparse de análisis funcional, se dio cuenta de la importancia del examen de los funcionales dados en los conjuntos de funciones. Por esta causa, según su opinión, antes de estudiar los funcionales y, tanto más, los operadores, era conveniente investigar -como paso previo- la naturaleza de los conjuntos que formaban el argumento de los funcionales y de los operadores[9]. En 1912 [23, p. 17] hacía notar que los conceptos clásicos referentes a las funciones se podían formular sin especial trabajo, debido a que las propiedades geométricas de la recta, del plano y del espacio *nos eran conocidas y parecían evidentes, incluso aquellas que -como sabemos hoy en día- llevaban a grandes dificultades;* escribía a continuación Hadamard:

"El continuo funcional -es decir, la multiplicidad obtenida haciendo variar continuamente una función de todas las maneras posibles (¿y en caso de discontinuidad? - F.M.)- no ofrece, en efecto, a nuestro espíritu, imagen simple alguna. La intuición geométrica no nos enseña nada, a priori, al respecto" (¡pobres intuicionistas! - F.M.).

Nos vemos obligados a remediar esta ignorancia y no podemos hacerlo más que analíticamente, creando al uso del continuo funcional (¡y no en aras de la matemática "pura"!-F. M.) un capítulo de la teoría de conjuntos. Esto es lo que un joven geómetra, M. Fréchet, ha emprendido ya" [23, pp. 17-18].

Dificultades todavía mayores surgían cuando de los funcionales y de los operadores dados en el conjunto de funciones se pasa a los funcionales y a los operadores de argumentos más generales. Como continuación a las palabras citadas de Hadamard, M. Frechet escribió en 1928:

"Intuitivamente no conocemos las propiedades del continuo funcional (del que se trataba en el trabajo de J. Hadamard-F.M.), pero sabemos, por lo menos, que los elementos de este continuo son funciones. Ahora bien, en el análisis general (aquí M. Frechet se vale del término de E. Moore que designaba lo que ahora se llama análisis funcional-F.M.) ¡ni siquiera conocemos los elementos del continuo estudiado!" [24, p. 271].

Precisamente por esta causa ha sido necesario modificar el acercamiento al problema que hemos expuesto en la sección 1. El análisis de esta cuestión nos alejaría mucho de nuestro tema principal, de modo que lo dejamos de lado, remitiendo al lector, tanto a las publicaciones ya citadas sobre la historia del análisis funcional -y, en particular, a la disertación de R. Siegmund-Schultze [10]-, como a otras aún no mencionadas, como los artículos de M. Bernkopf [25] [26].

4. Las condiciones de compacidad en los trabajos de Ascoli

Como se ha mencionado en la sección 3, no teníamos a nuestra disposición el trabajo de G. Ascoli [17] de los años 1883-1884, por lo que de aquí en adelante nos basaremos exclusivamente en su gran artículo [27], que constituye una exposición en extenso y acompañada de numerosas correcciones y adiciones a la memoria anterior. El artículo está escrito de modo poco claro[10]; para no perder de vista lo que a nuestro parecer es el hilo conductor del discurso, introduciremos de vez en cuando algunas pequeñas simplificaciones, y dejaremos además de lado algunos resultados de Ascoli referentes a distintas clases de funciones (como, por ejemplo, las condiciones en las que una función continua no tiene un número infinito de extremos), centrando nuestra atención en los conjuntos de curvas o funciones.

Con el fin de confirmar lo expuesto en el §3 acerca de la escasa influencia de las ideas de Cantor sobre Ascoli, así como para corroborar la acusación que acabamos de hacer en cuanto al carácter poco claro del curso de sus ideas, aducimos una cita de su trabajo [27]:

"Supongamos dado un conjunto de valores x ($\geq a$, $\leq b$) no necesariamente diferentes entre sí. Representada esta variedad en el modo habitual se engendra un grupo (conjunto-F.M.) de puntos en el segmento *ab*, los cuales no son necesariamente diferentes entre sí. El sistema P se denominará *múltiplemente extendido* sobre el intervalo *ab* cuando entre las cantidades x haya algunas iguales; en caso contrario dicho sistema llevará el nombre de simplemente extendido sobre el segmento ab. Un agregado no numerable de puntos, es decir, que no se puede poner en correspondencia unívoca con la serie de los números naturales podrá reducirse a un número finito si se hace abstracción de aquellos puntos que son simples, o bien, esto no tendrá lugar. Llamaré *punto límite* de la variedad P a un punto tal que sea posible dar un segmento de pequeñez arbitraria del que forma parte el punto en cuestión y que contiene un número sin fin de elementos de P. Un punto de P múltiple un número ilimitado de veces, es al mismo tiempo el punto límite.

Está claro que cada elemento de la variedad derivada P', formada por los puntos límite del complejo propuesto, está simplemente extendido en el intervalo *ab*" [27, p. 257].

¡Y lo expuesto se publicó en 1888, cuando ya habían salido a la luz todos los principales trabajos de Cantor sobre la teoría de los conjuntos, cuando en el libro de U. Dini [29] se habían formulado en un lenguaje hoy universalmente admitido las definiciones de punto límite y de conjunto derivado! Sin duda Ascoli conocía ya por aquel entonces las tesis fundamentales de la teoría de conjuntos de Cantor; sin embargo, en su mente éstas recibían una interpretación bastante peculiar[11].

Después de las definiciones dadas, G. Ascoli, inmediatamente, pasa a los conjuntos de funciones o de curvas. Y en este caso no considera este conjunto compuesto necesariamente de funciones dadas en un mismo segmento; al igual que en el caso de conjuntos puntuales, para él son posibles, por decirlo así, curvas múltiples, o sea, una misma curva o función puede entrar en el conjunto examinado varias veces o, incluso, un número infinito de veces. Este enfoque hace muy engorrosa su exposición y, para simplificar, dejaremos de lado estos aspectos de su trabajo que, al parecer, no tuvieron difusión alguna; consideraremos en adelante todas las funciones como dadas en un mismo intervalo y, a la vez, cada elemento del conjunto lo vamos a examinar como dado una sola vez.

Así, pues, se analizan conjuntos de funciones acotadas de variable real $y = f(x)$ definidas en el segmento $[a, b]$ y continuas en él (el concepto de espacio de tales funciones todavía no es utilizado). Como primera definición dada por Ascoli referente a semejantes conjuntos interviene, precisamente, la definición del concepto de equicontinuidad que más adelante obtendría amplia difusión en la teoría de funciones y en el análisis funcional. Veamos la formulación de Ascoli:

"Admito también que la variedad R de líneas consideradas sea igualmente continua *(egualmente continua)*. Con ello quiero decir que, dada una cantidad arbitraria σ, se puede fijar una magnitud η de tal modo que en cualquier parte no mayor que η de un segmento M sobre el que se proyecta una cualquiera de las líneas dadas, no sea mayor que la oscilación σ de la última" [27, pp. 257-258][12].

Al introducir esta definición, Ascoli demuestra [27, p. 258-259] que si el conjunto R dado de curvas o de funciones continuas que satisfacen la condición $|f(x)| < N$[13] es equicontinuo, entonces de este conjunto es posible elegir una sucesión de elementos que converge uniformemente a cierto elemento de R.

Con ello se obtiene la propiedad de los conjuntos de funciones continuas que, actualmente, es denominada *compacidad* del conjunto infinito R de elementos del espacio C de funciones continuas dadas en $[a, b]$[14] y que R. Siegmund-Schultze ha considerado como uno de los primeros resultados centrales del análisis funcional [10, p. 68] y, al mismo tiempo, como un hito de la moderna topología abstracta de los conjuntos puntuales (ibid., p. 69).

Ahora bien, quisiéramos subrayar además la siguiente circunstancia. Ya en este paso -uno de los primeros- hacia el ámbito de los conjuntos de curvas y funciones, G. Ascoli se vio obligado a alejarse del esquema de la teoría de los conjuntos de Cantor del espacio euclidiano n-dimensional. En efecto, en esta última todo conjunto infinito acotado tiene por lo menos un punto límite; éste es el teorema de Bolzano-Weierstrass, del cual se deriva directamente que, en un conjunto en estas condiciones, siempre es posible elegir una sucesión convergente de puntos: es decir, tal conjunto es compacto. Sin embargo, incluso en un caso tan relativamente simple como el de los conjuntos infinitos acotados de funciones continuas, la cuestión es distinta; y, para resolver el problema de la existencia de elemento límite (sin la cual quedaría poco de los métodos infinitesimales en sentido general), era necesario introducir limitaciones a los conjuntos analizados. Ascoli comprendió esto hasta el fondo y propuso la correspondiente limitación.

Sin embargo, es indudable que ni el propio Ascoli ni otros matemáticos de aquella época se percataron de toda la importancia de este descubrimiento fundamental. Y es que con el teorema de Bolzano-Weierstrass está relacionada casi toda la mentalidad matemática y, de hecho, no exclusivamente dicho modo de pensar. Es suficiente recordar que para su demostración se necesita la teoría de los números reales, y que ésta, a su vez, se basa en la discontinuidad, del espacio y el tiempo, entre el movimiento y el reposo, entre la constancia y la variabilidad, etc. El desarrollo de este tema requiere realizar un trabajo inmensamente complicado, que, aunque ya llevado a cabo en gran parte, está lejos de ser suficiente; por esta razón, en la práctica es necesario dejar al margen toda esta cuestión, y reducirse a la esfera de los hechos en el sentido más simple.

Una vez encontrada la condición que asegura la presencia de elemento límite en el conjunto infinito de funciones -y para Ascoli este elemento es la función límite de la sucesión uniformemente convergente de funciones continuas- se puede hablar tanto sobre el conjunto de curvas límite o conjunto derivado del conjunto de curvas, como sobre los conjuntos derivados de orden superior: se trata ya en ese momento de desarrollar analogías en paralelo a la teoría de Cantor; y Ascoli realizó todo este estudio [27, p. 259], enriqueciéndolo incluso, digamos que a costa de la plurivalencia antes mencionada. Sin embargo, en este punto Ascoli se muestra extremadamente sucinto y sus consideraciones resultan aún más incomprensibles.

La primera de éstas consiste en que las funciones de un conjunto derivado son uniformemente continuas, lo cual es completamente comprensible como consecuencia del teorema de Cantor sobre la continuidad uniforme y del carácter de la definición de elemento límite; la segunda se refiere al hecho de que Ascoli, como se ha dicho, analizaba la colección de funciones dadas en diferentes segmentos, aspecto que hemos acordado no examinar; la tercera hace recordar el teorema según el cual la medida del conjunto de los elementos límite del conjunto reducido es igual a cero. En cuanto a la cuarta consideración, en general es difícil decir algo al respecto, razón por la que nos limitaremos a citar su artículo:

> "Es posible hacer tan pequeño como se quiera el conjunto de los espacios a cada uno de los cuales pertenece por lo menos un punto de un número limitado de líneas trazadas en el plano A situado a una distancia finita" (ibid., p. 260).

En el siguiente apartado de su trabajo, G. Ascoli [27, pp. 260-263] extiende los resultados anteriores a los conjuntos de líneas cuyos elementos se pueden repetir cualquier número de veces. Hemos convenido también en no examinar esta situación, de manera que podríamos no detenernos, en general, en este apartado, si no fuera porque incluye un importante resultado más que requiere una pequeña digresión.

Habitualmente, cuando se habla sobre las condiciones necesarias y suficientes de compacidad del conjunto C de las funciones continuas con la topología de la convergencia uniforme, en la mayoría de los casos el asunto se presenta como si G. Ascoli hubiera hallado las condiciones suficientes de compacidad, y a su vez C. Arzelà hubiera demostrado que éstas eran también necesarias[15]. A veces se denomina teorema de Arzelà-Ascoli a la formulación solamente de las condiciones suficientes[16] y, en otros casos, a su suficiencia se da el nombre de teorema de Arzelà[17]. Al mismo tiempo, A. Schoenflies [11, p. 273] señaló que Ascoli había demostrado no sólo la suficiencia, sino también la necesidad de las condiciones halladas, mientras que Arzelà dio únicamente otra demostración. Bourbaki, refiriéndose tan sólo al trabajo de Ascoli [17], también afirma que las cosas se desarrollaron precisamente así[18]. En este caso nos unimos a A. Schoenflies y a N. Bourbaki. En efecto, en [27, pág. 263] se contiene una formulación suficientemente precisa de las condiciones necesarias y suficientes de compacidad; y la demostración de la necesidad (ibid., pág. 261) no se diferencia mucho de la dada, por ejemplo, en [30, pág. 521].

De este modo, si se trata de conjuntos -uniformemente acotados- de funciones en el espacio de funciones continuas con la topología de la convergencia uniforme, resulta que el mérito del establecimiento de las condiciones de compacidad debe ser vinculado absolutamente al nombre de Ascoli, puesto que fue el primero (a tenor del estado actual de nuestros conocimientos) en introducir el concepto de equicontinuidad de conjuntos de funciones, formulando y demostrando su necesidad y suficiencia para la existencia del elemento límite de tal conjunto, perteneciente al mismo. El hecho de que el curso de los razonamientos de Ascoli no siempre sea diáfano, el que algunos puntos sean formulados de un modo no completamente explícito y en un lenguaje que para nosotros resulta inusitado no va en menoscado de dicho mérito suyo salvo en un grado insignificante.

La denominación del teorema de compacidad como "teorema de Ascoli-Arzelà" tiene en todo caso un fundamento suficientemente sólido. Se ha hecho ya mención más de una vez de las dificultades que presenta el lenguaje y el curso del pensamiento de G. Ascoli. Aunque su formulación del teorema es bastante clara, sus razonamientos en el proceso de demostración y, en especial, en la parte referente precisamente a la suficiencia, no son muy comprensibles. Por el contrario, cuando C. Arzelà sometió a análisis este mismo resultado [32, pp. 225-230], el teorema adquirió su más genuina claridad. En su trabajo, Arzelà, de la forma más explícita, señalaba que dicho teorema era un resultado de Ascoli y que él se limitaba a demostralo por otro método (ibid., pág. 230, nota). Arzelà utilizó también el teorema en cuestión en otros trabajos [33], [34], y se debe notar que en [33, pág. 257, nota 1] volvió a indicar que todo ello se debía a Ascoli. Arzelà, además, presentó las múltiples aplicaciones de este teorema, y -lo más importante- lo profundizó y amplió, como se verá en detalle en la sección 5.

Para terminar este apartado, hablaremos sobre otro resultado más obtenido por Ascoli, del cual apenas se hace mención en los cursos del análisis funcional, pero que está relacionado también con el estudio de conjuntos de funciones y que se utiliza en el cálculo de variaciones.

No se puede decir que este resultado se formulara de modo tan comprensible como las condiciones de compacidad anteriormente descritas, que se pueden denominar de compacidad de orden cero. Pero en el trabajo de Ascoli [27, pp. 365-371] se encuentra también lo que se expone a continuación.

Supongamos dado el conjunto R de funciones $f(x)$, continuas y con derivadas continuas hasta el orden m, inclusive. En las páginas mencionadas, G. Ascoli demostró, en primer lugar, que no es posible en general extraer de cada uno de esos conjuntos una sucesión de funciones uniformemente convergentes hacia cierta función de R; en segundo lugar, que si todas las funciones de R están acotadas conjuntamente con sus derivadas hasta el orden m, inclusive, y son equicontinuas, en este caso tal sucesión sí se puede extraer. En otras palabras, Ascoli estableció las condiciones suficientes de compacidad de orden m. Sin embargo, Ascoli, en el trabajo en cuestión, no se refirió al hecho de que dichas condiciones son necesarias.

5. Convergencia cuasi uniforme de Arzelà

C. Arzelà era, indudablemente, una matemático de más categoría que G. Ascoli, y en este y en el próximo párrafo podremos considerar sólo algunos de sus resultados. Es todavía más lamentable que en el caso de Ascoli la imposibilidad de conocer la mitad (ocho de los quince) de los trabajos que contienen los resultados de sus estudios sobre conjuntos de funciones.

Ya se ha dicho que es excesivamente unilateral la idea de que el estudio de los conjuntos de funciones surgió del deseo de aplicar a estos conjuntos los conceptos y las teoremas de la teoría de conjuntos puntuales. Esto ha sido ilustrado con el ejemplo de trabajos de Ascoli; en realidad, es posible que dicha idea sea más cierta precisamente con respecto a Ascoli que a C. Arzelà. En el caso de este último nos encontramos con otro motivo importante (además de la aplicación mencionada y del cálculo de variaciones) que estimulaba sus investigaciones en la teoría de los conjuntos de funciones: la teoría de las series funcionales. Antes de considerar los trabajos de Arzelà, echaremos un vistazo a los resultados obtenidos previamente.

Aunque las funciones discontinuas habían sido introducidas en las matemáticas desde hacía bastante tiempo, prácticamente hasta los años 70 del siglo pasado el objeto principal de estudio en el análisis eran las funciones continuas e incluso clases relativamente reducidas de éstas. Por lo tanto, la afirmación de A. L. Cauchy de que la función límite de una sucesión convergente de funciones continuas es también una función continua (1821) había resultado, en cierto sentido, "natural" y se había recibido muy favorablemente. Cuando se descubrió cuán errónea era esta afirmación de Cauchy, se introdujo (no sin relación con este descubrimiento) el concepto de *convergencia uniforme*[19]; éste ha resultado ser uno de instrumentos de investigación más útiles en las más diversas cuestiones de la teoría de las funciones y del análisis funcional, hasta nuestros días.

Pero la convergencia uniforme es sólo condición suficiente para que la función límite de una sucesión de funciones continuas siga siendo continua: este hecho, descubierto probablemente mucho antes, fue formulado claramente, al parecer, sólo por G. Darboux en 1875 [36, p. 61-62]. Era legítimo, entonces, el deseo de profundizar el concepto de convergencia uniforme de modo que la nueva convergencia, no sólo asegurara la continuidad de la función límite sino que fuera también condición necesaria para ello. Pero la profundización de estas ideas no resultó en absoluto asunto sencillo. Un paso importante en esta dirección lo dió, en 1878, U. Dini, al introducir el concepto de *continuidad uniforme generalizada* [29, p. 103][20]. Es curioso que Dini, aunque no disponía de ejemplos de auténticas sucesiones uniformemente convergentes generalizadas (o al menos, no propuso tales ejemplos en su libro), al estar convencido de la mayor flexibilidad de esta convergencia en comparación con la uniforme, se ocupó de establecer una serie de teoremas basados en el concepto introducido. En particular, podemos citar el teorema según el cual la función límite de una sucesión uniformemente convergente generalizada será también función continua [29, pp. 109-110]

Los primeros ejemplos de sucesiones de funciones convergentes uniformemente de manera generalizada fueron propuestos en 1881 por V. Volterra [38, p. 10]. Sus resultados correspondían, no a las sucesiones de funciones continuas que nos interesan, sino a las sucesiones de funciones puntualmente discontinuas. No obstante, el concepto de convergencia uniforme generalizada cobró a partir de entonces un sentido no exclusivamente formal.

La cuestión de si la convergencia uniforme generalizada es también una condición necesaria para la continuidad de la función límite, quedó abierta hasta 1897, fecha en la que I. Bendixon [39] construyó un ejemplo de una sucesión de funciones continuas que convergían a una función también continua pero sin que la convergencia fuera en ese caso uniforme de manera generalizada. De este modo, la convergencia de Dini resultó ser también sólo condición suficiente de la continuidad de la función límite.

Un nuevo tipo de convergencia fue introducido en 1899-1900 por Arzelà de manera totalmente deliberada [34, p. 153]: la denominó *convergencia uniforme por segmentos* (ibid., p. 156). Este tipo de convergencia había sido aplicada por él ya antes, en particular en [40], donde hacía notar (en la p. 326) que la había introducido en 1884 [41]; demostraba en aquel momento que tal convergencia era condición necesaria y suficiente para la continuidad de la función límite. En la literatura soviética la convergencia introducida por Arzelà se denomina con el término *convergencia cuasi uniforme* [37, pp. 256-257][21], término que vamos a usar en lo que sigue. Arzelà utilizaba esta convergencia en el estudio de muchas cuestiones de análisis, como veremos en parte más adelante. Ahora nos ocuparemos del concepto de compacidad.

Hoy en día, cuando las condiciones de la compacidad han adquirido un sentido tan abstracto, una vez introducidos los tipos de convergencia más generales que aseguran la continuidad de la función límite de las sucesiones de funciones continuas y teniendo además como patrón las condiciones de compacidad de Ascoli, podemos razonar de manera relativamente sencilla: la topología del espacio de funciones continuas viene dada por la convergencia cuasi uniforme de Arzelà. Basta sólo introducir un análogo de la equicontinuidad del conjunto de funciones, que sería a su vez análogo del concepto de Arzelà. Teóricamente, tal aproximación era posible desde hacía tiempo. Es interesante señalar que sólo fue realizada mucho más adelante, en 1940, por Yu. I. Sirvint [43]. Sirvint, apoyándose en el concepto de convergencia uniforme de una sucesión de funciones y en el de equicontinuidad de Ascoli (aunque Sirvint cree que su autor era Arzelà), por analogía con éstos, generaliza, en primer lugar, el concepto de convergencia cuasi uniforme abarcando funciones de naturaleza más general, y luego el concepto de "cuasi equicontinuidad" de un conjunto de funciones[22]. Esto le permite formular y demostrar el siguiente teorema: para que un conjunto de funciones continuas sea compacto (es decir, que cada parte infinita contenga una sucesión equiacotada y convergente, en cada punto de la zona del espacio en cuestión, a una cierta función continua en esta zona) es necesario y suficiente que este conjunto sea equiacotado y continuo de manera cuasi uniforme.

Es evidente que a C. Arzelà le era difícil razonar de esta manera y se acercaba al mismo problema de un modo diverso. Su enfoque tiene interés, por lo que lo consideraremos con más detalle.

El tercer capítulo de su trabajo [34] está dedicado al estudio de las funciones continuas. Una vez que llega claramente a la conclusión de que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones continuas conlleva el que el conjunto de las funciones de esta sucesión sea equiacotado [34, p. 177], plantea inmediatamente la cuestión de si es justa la afirmación inversa. La pregunta resulta más que extraña, una vez obtenidos sus resultados previos, tanto los discutidos aquí como los que quedan por discutir. Por lo visto, la explicación consiste en que Arzelà tenía en mente algo diferente y más general. Efectivamente, tras plantear la cuestión mencionada, escribe:

"Podemos planteamos una cuestión más general.

Sea $\upsilon(x)$ una función dada en $a...b$ que tiene allí límites superior e inferior (es decir, las cotas-F. M.). Otras dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tales que para cada x de $a...b$ se tenga

$$\varphi(x) < \upsilon(x) < \psi(x),$$

determinan un *entorno* de la función $\upsilon(x)$.

Fijado esto, sea ahora una variedad que escribimos $G = \{u(x)\}$, de funciones $u(x)$ determinadas de alguna manera mediante una cierta ley en $a...b$; sujetas a la única condición de que todas ellas estén comprendidas entre dos números finitos l y L.

Si para algún par de funciones que satisfacen la relación anterior (estar incluidas entre $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ -F. M.) existen infinitas funciones de la variedad G tales que

$$\varphi(x) < u(x) < \psi(x),$$

se dirá que $\upsilon(x)$ es una función límite de esta variedad; $\upsilon(x)$ puede no pertenecer a la variedad.

He aquí la cuestión que podemos proponemos: ¿cuáles son las condiciones para que una variedad dada G tenga una o varias, o incluso infinitas funciones límite igualmente continuas?" [34, p. 177].

En el fragmento citado observamos algo que es extraordinario para el momento del que se trata (1900). Ante todo, está presente aquí el espacio topológico de las funciones con la topología determinada por un sistema de entornos que satisfacen las exigencias corrientes que se imponen actualmente al sistema de entornos (a propósito, no formuladas explícitamente por Arzelà).

Los propios entornos se determinan de manera más general de lo que se solía hacer en el análisis cuando se exigía que se cumplieran las desigualdades

$$f_0(x) - \varepsilon < f(x) < f_0(x) + \varepsilon,$$

es decir, cuando geométricamente el entorno se representaba por una franja cuyos bordes son paralelos al grafo de la función $y = f_0(x)$. Arzelà sitúa los bordes de la franja de cualquier manera con respecto al grafo de $y = f_0(x)$ y su arbitrariedad está limitada solamente por el aspecto de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$. Incluso para la topología de Arzelà, tan poco habitual en aquel momento, se logra demostrar que la condición necesaria y suficiente de compacidad del conjunto de funciones (y no necesariamente continuas) consiste en que sea posible señalar en este conjunto un subconjunto infinito de funciones equicontinuas [34, pp. 177-181].

No obstante, Arzelà no había dado el paso decisivo hacia la introducción del concepto de compacidad en el espacio de las funciones con la topología de la convergencia cuasi uniforme o, en terminología de Sirvint, la *topología débil*. Evidentemente tenía las premisas para ello, pero según parece la idea en sí de espacio funcional topológico no se había cristalizado con claridad suficiente. Arzelà se interesaba más por otros aspectos del problema. Las condiciones de Ascoli aseguraban la compacidad del conjunto infinito de las funciones continuas en el espacio de las funciones con la topología de convergencia uniforme; en otras palabras, estas condiciones garantizaban la existencia, en tal conjunto al menos, de una función límite. Pero, en estas condiciones, las funciones límite podían resultar muchas, e incluso infinitas. En cambio, a Arzelà le interesaba el caso en que la función límite existente fuera única. Naturalmente, tal planteamiento del problema conducía a la contracción de la clase de los conjuntos de funciones considerados, digamos, a las sucesiones numerables de funciones. Precisamente Arzelà concluye el capítulo de su trabajo correspondiente a este problema considerando una sucesión de funciones continuas. Introdujo para éstas, aunque sin formularlo explícitamente, el concepto de cuasi equicontinuidad del conjunto (numerable) de funciones. Este concepto se contiene en la formulación de un teorema que puede ser expresada así: para que una sucesión de funciones continuas converja a una única función continua, es necesario y suficiente que las funciones de la sucesión sean cuasi equicontinuas [34, p. 181-182].

Arzelà notó aquí también que la equicontinuidad ordinaria asegura sólo la existencia de una función límite continua, pero no garantiza su carácter único. Y debido a la gran importancia que dicha continuidad tiene en el análisis, le presta también mucha atención en este lugar, encontrando un criterio suficiente: para que una familia de funciones continuas $\{u(x)\}$ sea equicontinua es suficiente que existan dos números m y M tales que la desigualdad

$$m \leq \frac{u(x_1) - u(x_2)}{x_1 - x_2} \leq M$$

se cumpla para todas las $u(x)$ y para cualquier elección de x_1, x_2 en el intervalo (a, b) en el que están dadas las funciones $u(x)$ [34, p. 182-184].

6. Algunas aplicaciones del teorema de compacidad y convergencia cuasi uniforme

Ya hemos dicho que el estudio de los conjuntos de funciones no presenta un mero interés erudito. Condujeron a tales estudios muchos problemas de las matemáticas de entonces, y no sólo de las matemáticas. Queremos subrayar esto una vez más para señalar, en primer lugar (aunque esto no sea lo más importante) lo limitado de una opinión muy difundida sobre este movimiento del pensamiento matemático, según la cual se trata de una sencilla transferencia de elementos de la teoría de conjuntos puntuales a conjuntos de naturaleza más compleja. Esto tiene, a nuestro juicio, un significado más importante que podríamos calificar sin miedo de gnoseológico. Lamentablemente, sobre esta cuestión todavía es necesario limitarse a alusiones no lo bastante sólidas, como las que hemos hecho en la sección 1.

Nos referiremos aquí brevemente a otra creencia también difundida, ésta sí de carácter claramente gnoseológico. Se trata precisamente del problema principal de filosofía en su encarnación matemática, esto es, el problema de relación entre el pensamiento matemático y la realidad[23] y, más concretamente, de la cuestión: ¿es cierto que

> "en la historia de las matemáticas la diferencia entre las concepciones existentes se reduce con frecuencia a si el investigador encuentra el móvil fuera de las propias matemáticas (es decir, en la técnica o la física) o dentro de los límites de las matemáticas mismas (y a menudo dentro de los límites de alguna teoría particular desarrollada por las matemáticas y los conceptos, ideas, métodos, etc. relacionados con ellas-F. M.)" [45, p. 11]?

Tomemos como ejemplo ilustrativo la visión de J. Dieudonné.

El famoso matemático francés Jean Alexander Dieudonné (nacido en 1906) toma parte cada vez más activamente en las investigaciones de historia y filosofía de la matemática. De esta manera continúa la importante y fructífera tradición representada brillantemente por F. Klein y seguida posteriormente por una serie de eminentes matemáticos como H. Lebesgue, N. N. Luzin, A. I. Markushevich, A. D. Alexandrov, P. S. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, B. V. Gnedenko, A. Robinson, D. Laugvitz y muchos otros. Es una tradición que demuestra la existencia y -nos gustaría creer- el aumento de interés de los matemáticos por la historia de su ciencia y por su filosofía; demuestra asimismo el reconocimiento de la importancia de éstas, no sólo para los científicos, sino también en el marco más amplio de la actividad intelectual, incluyendo la enseñanza a todos los niveles. Es evidente que la historia de las matemáticas necesita de este interés: si, como ha notado M. Ya. Vygodski [46, p. 21], ya la matemática del siglo XIX en muchos casos se resistía ante los esfuerzos de los historiadores, esto es mucho más justo con respecto a la matemática de nuestro siglo.

Desde luego, aquí no se pretende caracterizar todo el conjunto de trabajos de J. Dieudonné dedicados a la historia y a las cuestiones filosóficas de las matemáticas, cuyo número se acerca (y tal vez, ya supera) el medio centenar. Este científico se ha ocupado de la historia del análisis funcional, la teoría de grupos, la topología, la geometría algebraica y otras ramas de las matemáticas y ha participado activamente en la preparación de textos generales de historia de las matemáticas. Además, ha escrito sobre algunos representantes del pensamiento matemático. Su aportación a la historia de la ciencia, sobre todo de los siglos XIX y XX, es comparable y en algunos puntos más importante que la aportación de los más eminentes historiadores especialistas.

Tocaremos aquí sólo una de las concepciones de J. Dieudonné en historia de la ciencia que nos parece errónea o al menos discutible (éstas, sea dicho de paso, son numerosas en sus trabajos). Dicha concepción se puede deducir a partir de afirmaciones y acotaciones suyas que, diseminadas en muchos de sus trabajos, se repiten y vuelven a repetirse, convirtiéndose, en realidad, en una especie de programa (o, mejor dicho, en un elemento del programa) que influye indudablemente, tanto en el contenido de sus propios estudios históricos como en las investigaciones de los historiadores profesionales. Al fin y al cabo esta concepción se reduce a la segunda alternativa mencionada anteriormente y planteada por G. E. Shilov, es decir: el "móvil" de la actividad matemática se encuentra dentro de las matemáticas mismas, prácticamente sin correspondencia alguna con la realidad. Este punto de vista ha sido formulado por J. Dieudonné múltiples veces y en diferentes formas. Citemos algunos ejemplos.

Así, por ejemplo, en el artículo [47] podemos leer que *el factor principal del desarrollo de las matemáticas tiene origen intrínseco -la meditación sobre* *la naturaleza de los problemas planteados independientemente del origen de éstos* (p. 19); que debemos la aparición de importantes teorías matemáticas al *afán de los matemáticos inspirados por el ideal de la Verdad legado de los griegos, libre de cualquier interés práctico.* En otro de sus trabajos afirma: *Las matemáticas y la realidad son casi absolutamente independientes, sus relaciones son ahora todavía más misteriosas que antes* [48, p. 12]. Quizás, J. Dieudonné ha resumido con mayor claridad su punto de vista sobre este problema en el siguiente contexto:

"El estudio de los problemas matemáticos nos conduce constantemente a la introducción de conceptos mucho más abstractos que las ideas de número o de forma... y termina con la abstracción completa del mundo sensible... Estos conceptos nuevos generan, naturalmente, una multitud innumerable de tareas para la resolución de las cuales debemos introducir otros conceptos, aún más abstractos. La afluencia de estos conceptos crece irresistiblemente alejándose cada vez más del origen de las matemáticas en la naturaleza y aparta más y más a los matemáticos de la resolución de los problemas planteados por los físicos o ingenieros... Por lo tanto se puede decir que en principio *la matemática moderna no tiene ningún fin utilitario* sino que constituye una disciplina intelectual cuya utilidad práctica se reduce *a cero.* Sin embargo, puede ocurrir que las ideas abstractas algún día encuentren una 'aplicación' inesperada. De todos modos, el matemático en sus investigaciones no es guiado *nunca* por la idea de un posible grado de utilidad de sus resultados en el futuro (lo cual, por otra parte, es imposible de demostrar). Más bien, está llevado por el deseo de penetrar en la comprensión del fenómeno matemático como fenómeno que termina en sí mismo.

Indudablemente, todavía son muchos los que entienden con dificultad tal punto de vista. Estos querrían siempre que las matemáticas 'sirvieran' a algo, les choca la idea de que las matemáticas no sean más que un 'lujo' que puede permitirse la civilización... Los matemáticos desean simplemente que los demás les reconozcan el mismo derecho a 'existir' que poseen, por ejemplo, los astrofísicos, los paleontólogos o los poetas" [49, pp. 98-99, subrayado por J. Dieudonné-F.M.][24].

La concepción expresada en estas citas no es nueva y ha sido declarada por J. Dieudonné muchas veces; si no fuera conocido su menosprecio por la literatura semimatemática y su desconocimiento del idioma ruso, se podría sospechar que haya plagiado a I. D. Mendeleev, que afirmó lo mismo en 1913 [51, pp. 9-11] y que a su vez tampoco era original en esto. Esta concepción lleva el bien establecido nombre de idealista en el sentido definido de manera clásica por V. I. Lenin [52, p. 322].

A ésta se le opone la concepción materialista (todas las demás no son más que variaciones de ellas) que se consolidó en tiempos igualmente lejanos y es compartida por un igual, si no mayor, número de adeptos, y entre los cuales siempre ha habido y hay una lucha incesante, a menudo con exageraciones. Vano sería seguir discutiendo este punto, tanto más cuanto nuestro tema está relacionado con él muy indirectamente (¡aunque eso sí, está relacionado!). No es fácil identificar esta relación, pero valdría la pena intentarlo.

El contenido de los trabajos de G. Ascoli [27] no se agota con los resultados descritos relacionados con la compacidad. En el trabajo mencionado consideró cuestiones como la rectificación de curvas, la conexión de las regiones planas, el comportamiento de las curvas límite de una variedad dada de curvas, etc. Como se ha dicho, este artículo constituye sólo un amplio resumen de la memoria anterior [17] y, no teniendo acceso a ésta y, tal vez, a otros trabajos del mismo autor, es difícil exponer con certeza los puntos de vista de Ascoli.

En cuanto a C. Arzelà, la situación es más favorable: las afirmaciones hechas anteriormente pueden ser apoyadas con ejemplos tomados de los trabajos de este último. Como primer ejemplo citemos el siguiente. Uno de los principales resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales obtenidos a principios del siglo XIX fue el teorema de Cauchy que afirma que si una función $f(x, y)$ es holomorfa en el entorno del punto (x_0, y_0), entonces existe una y sólo una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

holomorfa en el entorno del punto x_0 que satisface la condición $y(x_0) = y_0$. Sería inútil decir que este resultado no tenía relación alguna con la teoría de conjuntos de Cantor o que, en palabras de J. Dieudonné, *no tenía fin utilitario alguno*, que *su utilidad práctica se reduce a cero* y que es, como J. Dieudonné expresó en otro lugar, *un fenómeno perfectamente subjetivo* que *no tiene prototipo a nivel sensible* [53, p. 42]. Pero precisamente a este resultado le corresponde lo siguiente.

En la segunda mitad del siglo pasado se intentó repetidamente hacer más sencilla y precisa la demostración del teorema de Cauchy, y también de su generalización. Uno de intentos de más éxito fue la demostración dada en 1886 por G. Peano del teorema siguiente: si la función $f(x, y)$ es acotada y continua en una región G, entonces por cada punto interior $(x_0, y_0) \in G$ pasa al menos una curva integral de la ecuación anterior. El teorema de Peano atrajo en seguida atención de los matemáticos, que empezaron a buscar una demostración más simple. Una de ellas fue propuesta por C. Arzelà [33] y es al menos dudoso que éste, según el esquema de J. Dieudonné, apoyándose sólo en su *afán, inspirado por el ideal de la Verdad legado por los griegos, libre de cualquier interés práctico,* intentara y lograra tan brillante aplicación del teorema de compacidad. El seguía los pasos de sus antecesores, que se apoyaban en la relación de las matemáticas con la realidad y se guiaban por la "idea del grado de utilidad" de los resultados obtenidos.

Analizando la demostración del teorema de Peano propuesta por E. Picard en su *Curso de análisis,* C. Arzelà encontró que el pasaje principal del razonamiento consiste en la construcción de la sucesión de funciones equiacotadas y equicontinuas. Pero entonces, según el teorema de compacidad, tal sucesión converge a cierta función límite que es integral de la ecuación diferencial en cuestión, donde la parte derecha es acotada y continua. Arzelà puso precisamente en la base de su demostración este esquema de razonamiento [33, pp. 261-264], que ha llegado hasta nuestros días sin variaciones sustanciales [54, pp. 32-37]. Además, Arzelà consideró también, desde un punto de vista análogo [33, pp. 268-269], el método de aproximaciones sucesivas con el que E. Picard había demostrado no sólo la existencia sino también la unicidad para la ecuación mencionada, supuesta $f(x, y)$ función de Lipshitz en y.

La segunda aplicación importante de las condiciones de compacidad se encontró en la argumentación del principio de Dirichlet, y fue precisamente Arzelà el primero que las empleó para este fin, en el trabajo [55][25].

En [32, pp. 236-241], Arzelà consideró el conjunto de funciones $G = \{f(x)\}$ continuas junto con sus segundas derivadas en [a, b], y demostró, utilizando las condiciones de compacidad, que este conjunto es cerrado. En [55] extendió la afirmación mencionada al conjunto Γ de las funciones continuas de dos variables que tienen derivadas parciales continuas de primer y segundo orden, cuando las derivadas de segundo orden son acotadas. Previamente había demostrado [58] que cualquier funcional continuo definido en un conjunto de funciones posee valores máximo y mínimo, que se alcanzan al menos en una de las funciones del conjunto.

Abarcando la demostración del principio de Dirichlet, Arzelà estableció que las funciones consideradas en este caso forman precisamente el conjunto del tipo Γ y que la integral de Dirichlet es un funcional continuo. De ahí, el teorema sobre la existencia del mínimo de tal funcional llevaba al resultado buscado.

El reproche principal que ha hecho S. S. Petrova a la demostración de Arzelà del principio de Dirichlet consiste en que el matemático italiano sometía a consideración el conjunto Γ de funciones, sin haber demostrado la existencia de al menos una función de dicho tipo [57, p. 213]. Pero, por lo menos, Arzelà había notado aún más tempranamente [32, p. 236], aunque para el caso unidimensional, que la existencia de tales funciones era obvia. Efectivamente, en la demostración se precisa la existencia, en la región acotada por el contorno C, de una función continua $f(x, y)$ con derivadas parciales continuas de primer y segundo orden y con derivadas segundas acotadas dentro y en la frontera de la región. Y ¿cuáles eran las razones para dudar de ello? Otra cosa hubiera sido si se hubiera exigido simultáneamente a dicha función que, además, adquiriera en C los valores dados. Esto es lo que debía tener en mente S. S. Petrova al hacer este reproche a Arzelà y, al parecer, este punto no existía realmente en su demostración, ni en [58] ni en [55]. En parte por eso, probablemente, la demostración no ha sido ampliamente admitida.

Pero si es así, defecto semejante lo tiene también la demostración clásica de D. Hilbert, como fue notado en 1906 por J. Hadamard. Además, en comparación con la demostración de Hilbert, la de Arzelà tiene dos ventajas. Tanto uno como el otro tuvieron que hacer uso de las condiciones de compacidad. Pero mientras Arzelà las utilizaba conscientemente y en forma general, Hilbert empleaba sólo su caso particular en forma de teorema de Bendixon. Según éste, si una cierta sucesión de funciones converge en un conjunto puntual siempre denso, y las derivadas de todas estas funciones están acotadas por una magnitud absoluta, entonces dicha sucesión converge siempre y la convergencia es uniforme. Luego Arzelà consideraba la solución del problema de Dirichlet en la clase de funciones con derivadas segundas equiacotadas, mientras Hilbert lo hacía en la clase de funciones suaves a trozos, lo cual es más sencillo.

Las demostraciones de Hilbert no concluyeron el ciclo de investigaciones del principio de Dirichlet. Al contrario, después de ellas se expandió un flujo amplio de trabajos en los que este principio se consideraba desde varios ángulos y parece haber sido precisamente el camino trazado por Arzelà el que ha llevado a los métodos modernos de demostración, basados en la semicontinuidad del funcional según Tonelli. Y, si tenemos en cuenta la relación íntima del pensamiento de B. Riemann con la realidad[26], entonces el enfoque que S. S. Petrova ha constatado en sus razonamientos y el correspondiente de Arzelà [56, p. 295] confirma que el camino iniciado por Arzelà en el Departamento de Física matemática de la Universidad de Pisa [61, p. 161] no encaja en el esquema de J. Dieudonné.

El teorema de compacidad no sólo fue útil en las cuestiones consideradas. Sus aplicaciones, por parte de Arzelà entre otros, resultaron mucho más variadas, pero aquí no podemos y no necesitamos detenernos. Aun siendo un arma tan poderosa para el estudio de fenómenos más profundos, este teorema, sin embargo, como ya se ha dicho, era defectuoso en un punto: aseguraba la existencia del elemento límite en el conjunto considerado pero no garantizaba su unicidad, tan importante en muchos problemas del análisis. Ya que la topología de la convergencia uniforme no aseguraba tal unicidad, como también se ha mencionado, Arzelà buscó y efectivamente encontró tal garantía en la idea de la convergencia cuasi uniforme e introdujo, de modo implícito, el concepto de continuidad cuasi equivalente, que resultaría muy útil posteriormente.

Se ha hablado también de la aplicación de la convergencia cuasi uniforme en la cuestión de la continuidad de la función límite de una serie de funciones continuas. Este tema está considerado con bastante detalle en [42, pp. 96-102] y lo mencionamos sólo para acentuar una vez más la importancia del teorema de compacidad y para confirmar una vez más la aparición de nuevas y profundas ideas de la topología y el análisis funcional futuros. Por supuesto, estas disciplinas ni han crecido sólo a partir dicho teorema, ni sobre todo a partir de él; pero su papel ha sido considerable.

Nos limitaremos aquí a la aplicación de la convergencia cuasi uniforme a las cuestiones de integración de sucesiones de funciones.

Parece ser que la primera mención de la convergencia uniforme como condición suficiente de la integrabilidad por partes de una sucesión siempre convergente de funciones integrables apareció en L. Thomé (1866)[27]. Algo más tarde (es difícil precisar la fecha) K. Weierstrass notó que la integral de la suma de una serie convergente de funciones integrables no siempre viene dada por la suma de integrales de las funciones de la serie, y que para la igualdad se necesita que la serie converja uniformemente. G. Darboux (1875) demostró que la convergencia uniforme de una serie de funciones integrables es suficiente para la posibilidad de integración por partes y, a la vez, construyó un ejemplo de una serie convergente de funciones integrables para la cual la integral de la suma no era igual a la suma de las integrales. U. Dini (1878) estableció que una condición suficiente de la integrabilidad por partes reside también en la convergencia uniforme simple de la serie; pero tampoco esta condición resultó necesaria.

Fue Arzelà el primero que resolvió el problema de las condiciones necesarias y suficientes para que la función límite de una serie convergente de funciones integrables en el sentido de Riemann sea integrable, y de la misma manera, para que la integral de la suma de la serie sea igual a la suma de la serie de integrales de miembros de la serie. Como punto de partida en estas cuestiones le sirvió el siguiente teorema [62].

Considérese el segmento $[a, b]$ en el eje x de un sistema cartesiano de coordenadas y en el eje y la sucesión de puntos $\{y_s\}$ convergente al punto y_0. A través de los puntos y_s están trazadas las rectas paralelas al eje x y en éstas, con las perpendiculares al x se cortan los segmentos $[a_s, b_s]$. Suponer, además, que en cada $[a_s, b_s]$ se toman, en número finito, los segmentos que no se cortan $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \ldots, \delta_{ks}$ de tal modo que se cumplen las condiciones: 1) el número de segmentos $\{\delta_{is}\}$ crece ilimitadamente a medida en que la curva $y = y_s$ se acerca a la curva límite $y = y_0$; 2) la suma de las longitudes de segmentos δ_{is} sobre cada segmento $[a_s, b_s]$ es siempre mayor que un número fijo δ.

Entonces, en el segmento $[a, b]$ existe un punto x_0 tal que la perpendicular $x = x_0$ corta a un número infinito de segmentos δ_{is}, $i = 1, 2, \ldots$ y $s = 1, 2, \ldots$.

Precisamente este peculiar teorema geométrico (es superfluo detenernos en su relación con el teorema de compacidad) fue demostrado por Arzelà en [62]. Después de quince años, volvería de nuevo a este teorema [34, pp. 130-134], tomándolo como lema básico de toda la memoria, dándole una demostración más sencilla, según su opinión, y aplicándolo ampliamente. En cambio, en [62], Arzelà había deducido de este resultado sólo dos consecuencias, la primera de las cuales es la que exponemos a continuación.

Sea $F(x, y)$ una función de dos variables reales definida en los segmentos $[a_s, b_s]$ del lema, de modo tal que para cada $x \in [a, b]$ existe un límite determinado y finito

$$\lim_{y_s \to y_0} F(x, y_s) = F(x, y_0)$$

Entonces, si en cada segmento $[a_s, b_s]$ existe un número finito de segmentos $\{\delta_{is}\}$ cuyo número, al variar y_s, puede crecer ilimitadamente, de modo que en cada punto de ellos

$$|F(x, y_0) - F(x, y_s)| > \sigma ,$$

donde $\sigma > 0$ es tan pequeño como se quiera, la suma d_s de longitudes de estos segmentos cuando $y_s \to y_0$ tiende a cero.

De aquí, en particular, al pasar a las series, se deduce que cuando

$$F(x, y) = F_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

donde cada $U_i(x)$ es una función de variable real definida en $[a, b]$, lo que significa $F(x, y_0) - F(x, y_s) = R_n(x)$, es decir, es un resto, si $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ es una serie de funciones convergentes en cada punto de [a, b], entonces, la suma de segmentos en cada punto de los cuales y para el mismo valor de n se cumple la desigualdad

$$|R_n(x)| > \sigma,$$

donde $\sigma > 0$ y tan pequeño como se quiera, disminuye ilimitadamente al tender n a infinito. Esta última afirmación no es otra cosa que la proposición -conocida hoy como teorema de Lebesgue- que A. Lebesgue demostraría en 1906 [63, p. 10]. El matemático francés lo había formulado en [64, p. 1229], y todavía antes lo había aplicado en la demostración de las condiciones de integración por partes de las series [65, p. 259]. Este mismo teorema fue usado y demostrado en 1905 por Borel [66, p. 37], el cual señalaba que era debido a Arzelà; pero lo relacionaba con el trabajo [34] del 1899, cuando que Arzelà había establecido el teorema ya en 1885 y luego lo aplicaría repetidamente.

Nos hemos detenido tan detalladamente en la consecuencia indicada, porque ésta, que es una forma del teorema de Lebesgue más general, está relacionada con muchas concepciones fundamentales de las matemáticas (pongamos por caso, la convergencia en medida introducida por F. Riesz [66, p. 396]) por medio de las cuales las ideas que nos interesan, esto es, las ideas de finito e infinito, de limitado, compacidad, carácter cerrado, etc., se trasladan a nuestros días. Es aquí donde estas ideas adquieren, probablemente, nuevas cualidades que todavía han de merecer ulteriores reflexiones por parte autores de futuros libros sobre el infinito matemático.

Señalaremos un episodio curioso más, que tiene que ver con la nota [62] de Arzelà. L. Bieberbach [67], con objeto de dar una demostración más sencilla del teorema de integración por partes de las series, propuso una demostración del lema citado que constituye un caso particular del teorema de Lebesgue. Bieberbach veía una ventaja especial en su demostración porque no necesitaba recurrir al concepto de medida. Pero, de hecho, su lema se reducía a la formulación del teorema de Lebesgue en la forma de Arzelà, y el esquema de razonamiento de su demostración se distinguía poco del de Arzelà mismo. E. Landau [68] llamó en seguida la atención sobre esto, pero, demostrando un teorema más general que el de Bieberbach con ayuda del lema mencionado, el teorema sobre la integrabilidad de una sucesión de funciones[28], cometió el mismo error que este último: su teorema ya aparecía en otro trabajo de Arzelà de 1885 [40]. En su demostración, Arzelà se apoyaba en el mismo lema y, aunque era más complicada que la de Landau, él, en cambio, demostraba un resultado más amplio.

Citemos algunos otros resultados de Arzelà.

En [40] encontró las condiciones necesarias y suficientes para que la serie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

cuyos sumandos son funciones R-integrables y cuya suma S(x) está determinada en cada punto $x \in [a, b]$ y acotada, tenga suma R-integrable S(x) (pero sin que necesariamente la integral de S(x) sea igual a la suma de las integrales de los sumandos de la serie). Esta condición consistía en un cierto tipo de convergencia denominada por Arzelà "convergencia por segmentos uniforme en general" *(convergenza uniforme a tratti in generale)* y definida por él de siguiente manera:

"La serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergente en cada punto x entre a y b se dice que converge en igual grado por segmentos si, dados los números positivos σ y ε tan pequeños como se quiera y quitados entre a y b los segmentos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ en un número finito, cuya suma es menor que ε, para cada número entero m_1 se puede encontrar un número entero $m_2 \geq m_1$ tal que para todos los valores de x entre a y b, salvo en todo caso los contenidos en los trocitos $\tau_1, \tau_2, \ldots,$

τ_p, para el número m que puede variar con x pero permanece siempre comprendido entre m_1 y m_2, se tiene

$$|R_m(x)| < \sigma,$$

donde $R_m(x)$ es el resto de la serie" [40, p. 326].

No hemos encontrado en la literatura docente moderna un concepto de convergencia equivalente a la convergencia cuasi uniforme en general de Arzelà, al igual que el teorema mencionado. Llamaremos a esta convergencia, siguiendo a Ch.-J. de la Valleé Poussin [70, p. 437], cuasi uniforme con precisión hasta ε. Se podría considerar que tanto la convergencia introducida por Arzelà como esta convergencia de Valleé Poussin representan variaciones de la convergencia que hoy se denomina, casi universalmente, convergencia uniforme [71, p. 90][29]. No obstante, no nos atreveríamos a asegurar esto de manera categórica. De todos modos, queremos hacer notar que es legítimo considerar aquí dicho concepto de Arzelà, ya que son más que evidentes las relaciones entre los conceptos de convergencia casi uniforme y de compacidad.

En su siguiente trabajo [72], Arzelà encontró las condiciones necesarias y suficientes para que no sólo la suma de la serie $S(x)$ de funciones R-integrables sea integrable sino que además la integral de la suma sea igual a la suma de integrales de los términos de la serie. El teorema correspondiente de Arzelà dice así:

"Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ es una serie de funciones siempre finitas[30] e integrables entre a y b, y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ es también finita e integrable, entonces, para que se tenga

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(x)$$

para todo x entre a y b, es necesario y suficiente que la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(x)\, dx$$

sea una función finita y continua de x entre a y b, es decir, que la serie de integrales de los términos, estando determinada en cada punto x entre a y b, posea en este intervalo la convergencia uniforme por trozos" [72, p. 566].

La segunda parte de esta afirmación se deduce del anteriormente citado teorema de Arzelà, según el cual la convergencia cuasi uniforme de la sucesión de funciones es necesaria y suficiente para la continuidad de la función límite.

De esta manera, si se sabe que la suma de una serie es integrable, entonces la condición de integrabilidad por partes es la convergencia cuasi uniforme; para la integrabilidad de la misma función límite, según Arzelà, es necesaria y suficiente la convergencia cuasi uniforme con precisión hasta ε (o la convergencia en casi en todo punto).

El segundo teorema de Arzelà, como regla general, tampoco es considerado en los textos habituales. Con la mayor frecuencia se habla de la siguiente condición suficiente de integrabilidad por partes:

la serie de funciones R-integrables que tiene suma R-integrable puede ser integrada por partes si los residuos de la serie son uniformemente acotados, es decir, $|R_n(x)| < M$ para todo n y para todo x.

En esencia, esta afirmación fue demostrada por E. Landau [68], pero, a la vez, fue obtenida por Arzelà como consecuencia de su segundo teorema [72, p. 566]. Como ya se ha dicho, este resultado se conoce como teorema de Lebesgue: este autor simplemente generalizó esta consecuencia a su integral. Parece ser que no conocía entonces los trabajos de Arzelà correspondientes, o los había olvidado, lo cual no es del todo perdonable, ya que todos los resultados considerados en este párrafo, con toda una serie de adiciones y especificaciones, en ocasiones con demostraciones alternativas, fueron reunidos Arzelà en la amplia memoria citada [34].

7. Algunos resultados de un primer estudio de los conjuntos de funciones.

El primero de ellos consiste en observar que muchos problemas de las matemáticas llevaban al estudio de los conjuntos de funciones. En primer lugar, las cuestiones de análisis en sentido amplio: el estudio de las condiciones de convergencia de las sucesiones de funciones continuas a una función también continua, las condiciones de integrabilidad y de diferenciabilidad de sucesiones de funciones, el problema de Dirichlet, el teorema de existencia en la teoría de ecuaciones diferenciales y muchos, muchos otros[31]. Llama la atención que tanto los problemas enunciados, como el número todavía mayor de los no mencionados, irrumpían en las matemáticas no por sugerencia de alguien, ni tampoco gracias al pensamiento puro de un matemático, fuera éste genio o simple mortal, sino que se imponían debido a las necesidades prácticas más vitales.

Pasando al segundo resultado, cabe notar que, indudablemente, el desarrollo previo de la teoría de conjuntos puntuales constituyó una condición indispensable para proceder al estudio de los conjuntos de funciones. Pero ya los primeros pasos conscientes en el dominio de estos últimos condujeron a un descubrimiento de suma importancia: se advirtió la inconsistencia general del teorema principal del análisis, el teorema de Bolzano-Weierstrass[32], para conjuntos acotados diferentes de los conjuntos puntuales en los espacios euclídeos n-dimensionales. El afán de establecer, cuando fuera cierto, el análogo del teorema de Bolzano-Weierstrass para los conjuntos de funciones llevó a la introducción del concepto fundamental de equicontinuidad de los conjuntos de funciones y al establecimiento de las condiciones de compacidad. Tanto uno como otro son enteramente una aportación de Ascoli; Arzelà, a su vez, sólo precisó y demostró de otra manera el teorema de compacidad y empezó a utilizarlo en las más diversas cuestiones de las matemáticas, principalmente las dedicadas al conjunto de ciencias de la naturaleza.

Posteriormente Arzelà descubrió el concepto de convergencia cuasi uniforme y lo aplicó también a un amplio complejo de tareas matemáticas; más aún, conocía ya implícitamente el concepto de continuidad cuasi equivalente.

Se abriría posteriormente el período de reflexión y de asimilación de este poderoso instrumento, que continúa hasta hoy con intensidad cada vez mayor. Pongamos sólo dos ejemplos.

En 1906 fue publicada la disertación ya mencionada de M. Fréchet [9] que es considerada una de piedras angulares del análisis funcional (la historia de éste se hace empezar a veces precisamente con esta disertación), así como de la topología. El punto básico de mayor importancia de este trabajo consiste en el concepto de compacidad para conjuntos abstractos en la forma de Ascoli-Arzelà, como señaló sin dar lugar a equívocos el propio Fréchet [9, pp. 8, 10, 11, etc.]. Este generalizó los conceptos de convergencia uniforme y equicontinuidad y demostró el teorema de compacidad para funcionales dados en espacios bastante generales (pp. 9-14). En este trabajo se generalizaba también el concepto de convergencia cuasi uniforme a sucesiones de funcionales continuos (p. 10), así como también el teorema de Arzelà de continuidad de un funcional que es límite de una sucesión convergente cuasi uniformemente de funcionales continuos (p. 10).

Para darse cuenta de lo grandiosa y difícil que ha sido esta empresa, veamos cómo percibía aquella situación J. Hadamard [76], que era consciente del significado de dicho problema, no sólo para las matemáticas.

La situación del inicio del siglo la caracterizaba Hadamard de la manera siguiente.

En la creación del análisis funcional se había destacado en primer plano la cuestión siguiente. Los primeros analistas, al crear el análisis clásico, sabían obtener las propiedades de las funciones más útiles para aplicaciones, mucho antes de que a nadie se le ocurriera pensar en el estudio de las propiedades de los conjuntos puntuales. Entonces ¿no sería razonable en el desarrollo del análisis funcional actuar de modo análogo y estudiar primero diferentes funcionales y operadores sin recurrir a las ideas de teoría de conjuntos, y sobre tal estudio construir, por así decir, el análisis funcional clásico? Y ya después, si surgía la necesidad, se pasaría a la construcción de la teoría de conjuntos y en particular de una teoría de conjuntos de funciones más general que la teoría de conjuntos puntuales.

J. Hadamard planteó precisamente esta cuestión en 1912 [76] y le dió respuesta negativa, en el sentido de que tal analogía no era justa, ya que el universo en el que habían de entrar los analistas en la creación del análisis funcional era demasiado complejo e incierto. Los clásicos consideraban conocido el continuo espacial en que venían dadas las funciones estudiadas por ellos. Como tal continuo poseían el continuo de la geometría elemental, que les era muy familiar, como se suele decir, lo habían mamado en la leche materna, y, por lo tanto, no les hacía falta recurrir a ningún concepto de teoría de conjuntos.

No sucedía así con los funcionales y los operadores, incluso tratándose del caso particular del continuo compuesto por funciones. Se entraba en un mundo completamente nuevo y desconocido que se presentaba en la forma de *continuo funcional, es decir, la multiplicidad obtenida haciendo variar continuamente una función de todas las maneras posibles* [76, p. 17][33]. Y este universo resultó ser incomparablemente más complejo. Por lo tanto, Hadamard planteaba el problema del estudio previo de ese continuo funcional, como tarea primordial para los analistas del siglo XX. Hadamard consideraba que el iniciador de este movimiento del pensamiento matemático era M. Fréchet. Hemos visto que esto no era exacto aunque, efectivamente, Fréchet fue una figura decisiva en dicha empresa. Además, al gran científico le debe ser perdonado el deseo de premiar el afán de su discípulo.

Fréchet, por su parte, al repetirse la pregunta de Hadamard, la desarrolla. Teniendo en cuenta las objeciones contra la construcción previa de la teoría de conjuntos de funciones o teoría hadamardiana del "continuo funcional", Fréchet seguía:

"J. Hadamard ya les ha recordado a ustedes (a los participantes del congreso de matemáticos en Bolonia en 1928-F. M.) esta objeción y la ha rechazado en pocas palabras (en este mismo congreso, interviniendo antes de Fréchet-F. M.). El ha podido ser breve, puesto que en su memoria profética sobre el cálculo funcional publicada en 1912 en 'L'Enseignement mathematique' (es decir, en [76]-F. M.) previó dicha objeción y la contestó más detalladamente".

"El Sr. Hadamard ya ha notado que el conocimiento intuitivo del continuo lineal o espacial podía ser suficiente para los primeros analistas, pero que, en cambio, nuestro desconocimiento del continuo funcional nos obliga a crear su teoría rigurosa, si queremos cimentar el análisis funcional sobre una base sólida. ¡Qué papel tan decisivo juega en esto en el análisis general![34].

Intuitivamente no conocemos las propiedades del continuo funcional, pero sabemos, al menos, que los elementos de este continuo son funciones (es decir, objetos bien conocidos-F.M.). En cambio, en el análisis general no sabemos ni siquiera la naturaleza de los elementos del continuo a estudiar" [79, p. 271].

Por lo tanto, Fréchet consideraba inevitable la creación de una teoría especial, como un capítulo de la teoría de conjuntos abstractos que incluiría el conjunto de las curvas, y se ocupó de la resolución de esta tarea. Se necesitaría mucho espacio para caracterizar, aunque fuera de modo superficial, sus esfuerzos en esta dirección. Pero esto tampoco es imprescindible, ya que sus trabajos, incluyendo [9], han sido discutidos muchas veces, empezando por las memorias fundamentales de A. Schoenflies [11] y S. Pincherle y terminando por el reciente libro de J. Dieudonné [22]. Notemos sólo que en esta empresa de M. Fréchet se pusieron de relieve muchas particularidades de la concepción del infinito matemático: la interrelación del finito con el infinito, de la potencialidad con la actualidad[35], la variedad de órdenes de lo pequeño y lo grande, el desarrollo de la teoría de relaciones, etc. Nos detendremos un poco más en una de tales particularidades.

Antes se ha dicho que, debido a la variedad inverosímil de los tipos de conjuntos sometidos a estudio, era imposible abordar el tema por el camino tradicional, es decir, estudiar algunos de ellos y posteriormente generalizar los hechos descubiertos y construir teorías amplias. Hicieron falta métodos de pensamiento matemático completamente nuevos. Al inicio del siglo XX, estos nuevos métodos ya habían cristalizado en buena medida. Se trataba, ante todo, de la abstracción extremadamente desarrollada que entonces había quedado reflejada especialmente en la teoría general de conjuntos y en la lógica matemática (y, por consiguiente, la relación íntima entre las matemáticas y la filosofía); se trataba, a continuación, del método axiomático que se había manifestado de modo particularmente brillante en la geometría (pero no sólo en ella); se trataba, también, del pensamiento estructural que se estaba cimentando en aquel entonces, etc. Los momentos aislados de esta transformación están siendo estudiados, aunque todavía no en la medida suficiente. Como ejemplos de investigaciones de este tipo citaremos solamente los mencionados en la bibliografía: los trabajos de N. Bourbaki [35], M. Bernkopf [25], [26], P. Dugac [5], W. Felscher [75], J. W. Dauben [6], R. Siegmund-Schultze [10], [81], H. Mehrtens [15], J. Dieudonné [22], W. Purkert y H. J. Ilgauds [7] (situados, aproximadamente, en orden cronológico). Esta lista podría ser ampliada.

Fréchet dominó casi todas estas materias y las aplicó con gran maestría en la creación del análisis funcional, lo que condicionó el impacto producido por él en la evolución del pensamiento matemático.

Un eslabón importante en este desarrollo fueron los resultados correspondientes a los conjuntos de funciones. Por eso les hemos dedicado tanta atención, tanto más en cuanto que ejercieron su influjo no sólo en el análisis funcional, sino también en muchos otros campos de las matemáticas, como la teoría de funciones de variable compleja, por ejemplo, en las cuestiones de familias normales de funciones. No podemos resistir la tentación de incluir una cita más, relacionada con estas últimas:

"Las investigaciones de Ascoli y Arzelà sobre la equicontinuidad, las primeras investigaciones de Arzelà, Hilbert y Lebesgue en el problema de Dirichlet y los estudios de este último en el problema de Plateau tuvieron durante mucho tiempo carácter de trabajos aislados, de curiosidades matemáticas. Pero estas investigaciones han demostrado la necesidad del estudio de las sucesiones de funciones (de variable compleja-F. M.) que tienen función límite. Ha resultado lógico y útil saber si una familia de funciones posee esa propiedad; esa familia se denomina normal.

Por consiguiente, la teoría de familias normales de funciones ha sido creada para determinar los criterios que permiten afirmar que una cierta familia es normal" [82, p. 174].

Esta teoría ha permitido obtener una serie de refinados teoremas de teoría de las funciones de variable compleja; una buena revisión de la literatura sobre el tema es presentada en I. I. Privalova [83].

Al final de esta conclusión notemos que, a pesar de la ampliación enorme del campo de investigaciones, en este proceso se produjo un inevitable empobrecimiento de los objetos de estudio que se obtenían en el estudio de los conjuntos de funciones concretas. Algunas propiedades de estos últimos no se trasladaban a una situación tan general, como había sucedido en la geometría elemental; pero en este tema ya no podemos entrar.

NOTAS

1 Esta situación se analiza hasta cierto punto en el trabajo [8].

2 Algunos momentos de este "juego" están bien representados en la disertación de R. Siegmund-Schultze [10, pp. 68-83], a la que recurriremos más de una vez.

3 Cabe señalar, desde luego, que, en un aspecto, Euler reduce de modo muy preciso esta indeterminación; en efecto, requiere constantemente que todas las curvas examinadas o sus partes se relacionen con segmentos determinados del eje de abscisas o, como él dice, correspondan a "una misma abscisa", teniendo en cuenta que la abscisa izquierda del segmento se halla en el origen de coordenadas: es decir, hablando con otras palabras, que todas las funciones analizadas estén dadas en un intervalo fijo.

4 Debemos reconocer que no podíamos resistir la tentación de interpretar las palabras de Euler "curvas que poseen alguna propiedad dada de antemano" como la descripción del concepto correspondiente al término actual de "conjunto de curvas". K. A. Ríbnikov las interpreta como la descripción del concepto correspondiente al término actual "funcional" [13, p. 473]; este último es más próximo a lo expuesto por el propio Euler [12, p. 318], quien destacaba los conjuntos de curvas con la ayuda del funcional que toma valor constante en el conjunto de curvas analizado (por ejemplo, las que tienen longitud fija, las que comprenden el valor dado del área, etc.). Pero, en primer lugar, incluso en el caso de mantener la última interpretación, todo lo dicho antes se conserva. Además, la definición formal hecha por Euler del término "propiedad común de las curvas", sólo se inserta como tal en la p. 318, en tanto que, con anterioridad, el científico lo utilizaba con relativa libertad, sustituyéndo bien por las palabras "poseen alguna propiedad común", bien por la expresión de que son "en cierto modo determinadas" (p. 38), etc. El enfoque de Euler está condicionado por una época en que los conjuntos se caracterizaban,

no por sus propiedades descriptivas, sino por cierta fórmula analítica o por alguna idea geométrica.

5 Véanse, por ejemplo [3, pp. 79-84 y 102-107] y [5, pp. 29-33, 65-72 y 75-77]. Consideraciones muy interesantes al respecto han sido desarrolladas por H. Mehrtens [15], especialmente en lo que atañe a la teoría de las relaciones. Dichas consideraciones, no obstante, son algo ajenas a nuestra exposición, aunque en muchos aspectos están vinculadas con el interesantísimo problema de las definiciones por medio de la abstracción.

6 La expresión "al parecer" se debe en este caso a la circunstancia de que no teníamos a nuestra disposición varios de los trabajos de estos autores referentes al problema examinado; en particular, no disponíamos de sus primeros artículos, "Curvas límites de una variedad de curvas" de G. Ascoli [17] y "Una observación en torno a la serie de funciones" de C. Arzelà [18]. Infringiendo la costumbre de hacer referencia sólo a los trabajos que han pasado por las manos del autor y han sido estudiados en mayor o menor grado, en adelante, en una serie de casos, nos referiremos también a aquellos trabajos que conocemos por otras fuentes.

7 Estas han sido variadamente analizadas, por ejemplo, en [19], [20], [10], [21] y [22].

8 Se acostumbra a considerar que los primeros analistas actuaban precisamente de este modo y que V. Volterra simplemente seguía esta línea. Semejante enfoque parece muy verosímil y, sin embargo, esta impresión es a todas luces falsa. Habitualmente, detrás de cada concepto (o método) nuevo se halla un inmenso trasfondo del pasado. Se puede decir que cuando los primeros analistas abordaron el estudio de las funciones, en la composición de este trasfondo entraba la geometría elemental (al igual que muchas otras cosas). El lector moderno, cuando hace intelección de sus resultados, los considera tan "evidentes" y tan "intuitivamente claros" que simplemente no les presta atención. Además, como si esto fuese poco, muchas cosas del trasfondo indicado permanecen incomprensibles, ya sea debido a su carácter remoto, o bien, porque no se desea tomarlo en consideración.

9 Tal concepción no resulta tan nueva a principios del siglo XX. La teoría de las funciones de variable real, por ejemplo, se desarrollaba desde hacía mucho tiempo siguiendo este camino. Lo nuevo radicaba en la envergadura del camino que desbrozaba Hadamard (pero no tenemos la posibilidad de desarrollar ulteriormente esta última tesis).

10 Esta poca claridad ha sido notada abundantemente. Así, por ejemplo, N. Dunford y J. T. Schwarz escriben que "ambos trabajos (de Ascoli y de Arzela, de los cuales uno -[17]- se ha mencionado-F.M.) utilizan la terminología geométrica, y no es fácil extraer de los mismos estos resultados" (referentes a la compacidad-F. M.) [28, p. 416]. Les hace eco R. Siegmund-Schultze: "En general, acerca del trabajo de Ascoli ([17]-F.M.) se puede decir que sus enunciados se obtienen de modo bastante complicado y, en parte, incomprensible, y, en todo caso, no tienen nada en común con la sencillez y la claridad de las demostraciones en el análisis abstracto moderno. Esta circunstancia podría ser la causa de que hoy en día Ascoli haya quedado casi

olvidado..." [10, p. 76]; este autor también simplifica algunos puntos en la exposición de Ascoli; véase por ejemplo [10, p. 74].

11 A propósito, y qué se puede decir acerca de la variedad terminológica de su obra. "Conjunto", "diversidad", "grupo", "sistema", "colección", "serie", "complejo", todas estas denominaciones se engloban actualmente en un solo término: "conjunto"; mientras que cada una de ellas aparece en media página del texto de Ascoli. Y esta circunstancia no es exclusiva de este lugar y de lo que se refiere a los conceptos mencionados.

12 Se trata de la oscilación o del valor absoluto de la diferencia entre los valores de la función o de las ordenadas de la curva en los extremos del intervalo contenido en el intervalo de longitud *h*. La formulación adoptada actualmente puede verse, por ejemplo, en [30, p. 519], donde se habla no de la continuidad uniforme, sino de la equicontinuidad.

13 Ascoli no incluyó explícitamente esta desigualdad en las condiciones del teorema, pero se trata de una condición que está contenida en su requerimiento inicial de que todas las curvas examinadas estén dispuestas en un rectángulo finito.

14 Véase la demostración actual en el libro citado [30, pp. 519-520].

15 Véase, por ejemplo, [28, p. 416].

16 Véase [30, p. 519].

17 Véase [31, p. 69].

18 Cabe mencionar que R. Siegmund-Schultze [10, p. 68] sostiene a su vez la opinión de que Ascoli demostró tan sólo la suficiencia, alegando, en este caso, lo afirmado en nuestro libro [3]. Sin embargo, en este último, en la página señalada por Siegmund-Schultze (p. 160), en general no se examina el problema sobre la demostración de Ascoli y la propia suficiencia se mencionaba en otra explicación.

19 Véase con más detalles [35, p. 215].

20 La formulación del concepto de continuidad uniforme generalizada dada por Dini no nos hace falta aquí y por ello la omitimos. La terminología que estamos usando es la del libro de N. N. Luzin [37]. El propio Dini la llamó "convergencia uniforme simple". Notemos que Luzin [37, pp. 252-253] expuso, no la definición original de Dini, sino la modificación de ésta introducida por E. Borel.

21 N. N. Luzin, aun reconociendo que su autor fue C. Arzelà, sobrevalora la aportación de E. Borel en este asunto. Véase [42, pp. 96-98], donde se han descrito otros tipos de convergencias mencionados aquí (pp. 75-102).

22 Sirvint utiliza el término "cuasi equicontinuidad", mientras que nosotros empleamos el término "continuidad cuasi uniforme" de Dunford y Schwartz [28, pp. 417-418].

23 Pues "todos los demás problemas discutibles de índole metodológica son derivados de este problema básico" [44, p. 20].

24 Citado por [50, p. 18].

25 No hemos podido acceder a este trabajo, por lo que tenemos que basarnos en gran parte en los artículos de S. S. Petrova [56], [57].

26 El mismo ha escrito con respecto a ello: "Mi trabajo principal es el tratamiento nuevo de leyes de la Naturaleza conocidas. Es decir, una expresión

de ellas a través de otros conceptos básicos que diera la posibilidad de aprovechar los datos experimentales sobre la interacción entre el calor, la luz, la electricidad y el magnetismo para una investigación de la relación mutua de estos fenómenos. He llegado a ello estudiando, principalmente, los trabajos de Newton y Euler por un lado y de Herbart por otro" [59, p. 542]. A la relación mencionada se ha hecho referencia más de una vez, especialmente por parte de F. Klein. Esta relación se pone de manifiesto prácticamente en todos los trabajos de Riemann dedicados al problema de Dirichlet entre otros.

27 Aquí y en algunos otros lugares más adelante no citamos los trabajos correspondientes: éstos vienen dados en [42] donde también se aclaran algunos conceptos que aparecen más abajo sin definición.

28 Bieberbach lo obtuvo para las sucesiones de funciones continuas, pretendiendo sólo simplificar la demostración de W. F. Osgood [69], mientras que Landau lo demostraba para las sucesiones de funciones R-integrables.

29 En [42, pp. 96-108] se puede ver algo sobre el contexto histórico de la introducción de esta última.

30 Se tienen en cuenta las funciones acotadas; lo mismo es válido a la continuación de la cita. Arzelà, como la mayoría de matemáticos del siglo pasado, no distinguía la acotación y el finito de las funciones y, como ya se ha notado en el punto 5, aparentemente sólo Darboux en 1875 [36, pp. 61-62] se dió cuenta claramente por primera vez de la diferencia de la acotación de una función y de su carácter finito, poniendo un ejemplo elemental correspondiente. He aquí una situación muy curiosa, pero exponer algo coherente sin análisis adecuado (y esto sería muy largo y aburrido) hubiera sido imperdonable. No existe, por lo visto, estudio histórico de este asunto, a excepción de una nota muy breve en [73, pp. 196-197].

31 Es difícil abstenernos de mencionar también que ya B. Riemann planteó el problema del estudio de los espacios funcionales [35, pp. 139-140].

32 Los historiadores de las matemáticas lo han consideraro en numerosas ocasiones; véase, por ejemplo, [74, pp. 74-76] o [75, pp. 156-160].

33 Tales *variaciones continuas de las funciones de todas posibles maneras* eran consideradas, por ejemplo, en el cálculo variacional, y por eso mismo Hadamard veía en el cálculo variacional la fuente principal de la cual surgía el análisis funcional. Había, desde luego, también otros orígenes, cuya descripción propuso en otro trabajo dedicado a la prehistoria del análisis funcional [77]. Un comentario más detallado sobre éstos se puede ver en [78, pp. 59-61, 65-67].

34 Bajo el término "análisis general", Fréchet entiende aquí, valiéndonos de la terminología de E. G. Moore, el análisis funcional en el sentido más general.

35 A propósito sea dicho, esto se refleja bien en W. Felcher [75, pp. 150-160] y en R. Siegmund-Schultze [10].

BIBLIOGRAFIA

1 JOURDAIN, Ph. E. B., "The development of the theory of transfinite numbers". *Archiv der Math. und Phys.*, 10(1906), 254-281; 14(1909), 289-311; 16(1910), 21-43; 22, 1-21.

2 CAVAILLÉS, J. (1938) *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, I. Paris, Hermann. También en: Cavaillés, J. (1962) *Philosophie mathématique*. París, Hermann.

3 MEDVEDEV, F. A. (1965) *El desarrollo de la teoría de conjuntos en el siglo XIX*. Moscú, Nauka (en ruso).

4 MESCHKOWSKI, H. (1967) *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*. Braunschweig, Vieweg und Sohn.

5 DUGAC, P. (1976) *Richard Dedekind et les fondaments des mathématiques (Avec de nombreux textes inédits)*. París, Vrin.

6 DAUBEN, J.W. (1979) *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*. Cambridge (Mass.)/ London, Harvard Univ. Press.

7 PURKERT, W. (1987) *Ilgauds H. J. Georg Cantor*. Basel/Boston/Stuttgart, Birkhäuser Verlag.

8. MEDVEDEV, F.A. (1990) "Angulos corniformes en los *Elementos* de Euclides y en los *Comentarios* de Proclo". *Estudios en historia de la matemática, XXXII-XXXIII*, 20-34 (en ruso).

9 FRÉCHET, M. (1906) "Sur quelques points du calcul fonctionnel". *Rend. del Circ. mat. di Palermo, 22*, 1-74.

10 SIEGMUND-SCHULTZE, R. (1979) *Der Strukturwandel in der Mathematik um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert, untersucht am Beispiel der Entstehung der ersten Begriffsbildungen der Funktionalanalysis*. Tesis doctoral, Fakultät für Wissenschaftlichen Rates der Martin-Luther Universität Halle-Wittenberg.

11 SCHOENFLIES, A. (1908) *Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeitslehre*. Zweite Teile. Leipzig, Teubner.

12 EULER, E. (1744) *Methodus inveiendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissio sensu accepti*. Lausannae/Genevae.

13 RYBNIKOV, K.A. (1949) "Primeras etapas del desarrollo del cálculo variacional". *Estudios en historia de la matemática, II*, 355-498 (en ruso).

14 FRAENKEL, A. (1953) *Abstract set theory*. Amsterdam, North-Holland.

15 MERTHENS, H. (1979) "Das Skelett der modernen Algebra. Zum Bildung mathematischer Begriffe bei Richard Dedekind". In: *Zur Entstehung neuer Denk-und Arbeitsrichtungen in der Naturwissenschaft Festschrift zum 90. Geburtstag von Hans Schimauk*. Göttingen, Vandenhoeck y Ruprecht, pp. 25-43.

16 DEDEKIND, R.; WEBER, H. (1930) "Theorie der algebraischen Funktionen einer Verändlichen" (*Journ. für reine und angew. Math.*, 1882). In: *Ges. math. Werke*, vol. 1. Braunschweig, Vieweg, pp. 238-248.

17 ASCOLI, G. (1883-1884) "Le curve limite di una varietà di curve". *Memorie della R. Accad. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat.*, 3ª serie, *18*, 521-286.

18 ARZELÀ, C. (1882-1883) "Un'osservatione intorno alla serie di funzioni". *Rend. dell'Accad. R. delle sci. dell'Ist. di Bologna, 18*.

19 NATUCCI, A. (1959) "Saggio storico sulla teoria delle funzioni". *Giorn. di mat. di Battaglini*, 5ª serie, *87*, 89-146.

20 MONNA, A. F. (1973) *Functional analysis in historical perspective*. Utrecht, Oosthoek Publ. Co.

21 POLISHUK, E.M. (1977) *Vito Volterra*. Leningrado, Nauka (en ruso).

22 DIEUDONNÉ, J. (1973) *History of functional analysis*. Amsterdam/ New York/ Oxford, North-Holland Publ. Co.

23 HADAMARD, J. (1912) "Le calcul fonctionnel". *L'Enseign. math.*, *14*, 5-18.

24 FRÉCHET, M. (1929) "L'analyse générale et les espaces abstraits". In: *Atti del Congresso internationale di matematici* (Bologna, 3-10 settembre 1928). Bologna, pp. 267-274.

25 BERNKOPF, M. (1966) "The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory". *Archive for the History of Exact Sciences*, *3*, 1-96.

26 BERNKOPF, M. (1973) "Introducción de las concepciones abstractas en la teoría de espacios funcionales". *Estudios en historia de la matemática*, *XVIII*, 97-103 (en ruso).

27 ASCOLI, G. (1888) "Sul concetto di curva piana a distanza finita. Riassunto della mia Memoria 'Le curve limite di una varietà data di curve', ed osservationi critiche alla medessima". *Rend. del Ist. Lombardo di sci. e lett.*, 2ª serie, *21*, 226-239, 257-265, 294-300, 365-371.

28 DUNFORD, N. (1958) *Schwartz J.T. Linear operators. Parte I. General theory*. New York/ London.

29 DINI, U. (1878) *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*. Pisa, Nistri.

30 NATANSON, I. P. (1957) *Teoría de funciones de variable real*. Moscú, GITTL (en ruso).

31 STEPANOV, V.V. (1958) *Curso de ecuaciones diferenciales*. 7ª ed., Moscú, GIFML (en ruso).

32 ARZELÀ, C. (1895-1896) "Sulle funzioni di linee". *Memorie della R. Accad. delle sci. dell'Ist. di Bologna*, 5ª serie, *5*, 225-244.

33 ARZELÀ, C. (1895-1896) "Sull'integrabilità delle equazioni defferenziali ordinarie". *Ibid.*, 257-270.

34 ARZELÀ, C. (1899-1900) "Sulle serie di funzioni". 5ª serie, *8.*, 131-186, 701-744.

35 BOURBAKI, N. (1960) *Éléments d'histoire des Mathématiques*. París, Hermann.

36 DARBOUX, G. (1875) "Mémoire sur les fontions discontinues". *Ann. sci. de l'Ecole Norm. Sup.*, 2ª serie., *4*, 57-112.

37 LUZIN, N. N. (1948) *Teoría de funciones de variable real*. Moscú, Uchpedgiz (en ruso).

38 VOLTERRA, V. (1881) "Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue". *Giorn. di mat.*, *XIX*, 76-87. También en: *Opere matematiche*, vol. 1. Roma, Accad. Naz. dei Lincei, 1954, pp. 7-15.

39 BENDIXON, I. (1897) "Sur la convergence uniforme des séries". *Öfversicht auf Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Förlandligar, 54,* 605-622.

40 ARZELÀ, C. (1885) "Sulla integrabilità di una serie di funzioni". *Atti della R. Accad. dei Lincei. Rend.,* 4ª serie, *1,* 321-326.

41 ARZELÀ, C. (1883-1884) "Intorno alla continuità delle summa di infinite funzioni continue". *Rend. dell' Accad. R. delle sci. dell'Ist. di Bologna, 19,* 79-84.

42 MEDVEDEV, F. A. (1975) *Ensayos en la teoría de funciones de variable real.* Moscú, Nauka (en ruso).

43 SIRVINT, Yu. F. (1940) "Compacidad débil en los espacios de Banach". *Doklady de Academia de Ciencias de la URSS, 28,* 199-201 (en ruso).

44 RYBNIKOV, K. A. (1979) *Introducción en la metodología de la matemática.* Moscú, Editorial de la Universidad de Moscú (en ruso).

45 KAZAVELI, G. (SHILOV, G.E.) (1975) "Matemática y realidad.". *Estudios en historia de la matemática, XX,* 11-27 (en ruso).

46 VYGODSKI, M.Ya. (1937) "Felix Klein y su trabajo histórico". In: *F. Klein. Conferencias sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX.* Moscú-Leningrado, ONTI, pp. 11-25 (en ruso).

47 DIEUDONNÉ, J. (1976) "Sobre el progreso de la matemática" (Traducción del manuscrito por S. S. Petrova). *Estudios en historia de la matemática, XXI,* 9-21 (en ruso).

48 DIEUDONNÉ, J. (1961) *L'oeuvre mathématique de C. F. Gauss.* París, Palais de la Découverte.

49 DIEUDONNÉ, J. (1964) "L'École Français moderne des mathématiques" *Philosophia mathématica, 1* (2), 97-106.

50 SAWYER, W.W. (1969) *A path to modern mathematics.* Harmondsworth, Middlesex, Penguin Books.

51 MENDELEEV, I. D. (1913) *Método de la matemática. Lógica y gnoseología de los conocimientos matemáticos.* San Peterburgo, Obrazovanie (en ruso).

52 LENIN, V. I. (1963) *Cuadernos filosóficos.* Obras completas, vol. 39. 5ª ed., Moscú.

53 DIEUDONNÉ, J. (1975) "L'abstraction et l'intuition mathématique". *Dialectica, 29* (1), 39-44.

54 PETROVSKI, I. G. (1947) *Conferencias sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Moscú-Leningrado, Gostehizdat (en ruso).

55 ARZELÀ, C. (1896-1897) "Sul principio di Dirichlet". *Rend. della R. Accad. delle sci. di Bologna,* 2ª serie, *1,* 71-84.

56 PETROVA, S. S. (1969) "El principio de Dirichlet en los trabajos de Riemann". *Estudios en historia de la matemática, XVI,* 295 -310 (en ruso).

57 PETROVA, S. S. (1966) "Sobre el principio de Dirichlet". In: *Historia y metodología de las ciencias de la naturaleza.* Matemática, vol. V. Moscú, Ed. de la universidad de Moscú, p. 200-218 (en ruso).

58 ARZELÀ, C. (1889) "Funzioni di linee". *Atti della R. Accad. dei Lincei. Rend.,* 4ª serie, *5,* 342-348.

59 RIEMANN, B. (1892) *Gesammelte mathematische Werke.* Editadas al cuidado de R. Dedekind und H. Weber. 2ª ed, Leipzig, Teubner.

60 KLEIN, F. (1926) *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Parte I. Für den Druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer. Berlín, Springer.

61 PINCHERLE, S. (1911-1912) "Commemorazione del Prof. Arzelà". *Rend. della R. Accad. delle sci. dell'Ist. di Bologna*, nuova serie, *16*, 159-179.

62 ARZELÀ, C. (1889) "Un teorema intorno alla serie di funzioni". *Atti della R. Accad. dei Lincei. Rend.*, 4ª serie, *5*, 342-348.

63 LEBESGUE, H. (1906) *Leçons sur les séries trigonométriques*. París.

64 LEBESGUE, H. (1903) "Sur une propriété des fonctions". *Comptes rend. de l'Acad. des sci. de Paris*, *137*,1228-1230.

65 LEBESGUE, H. (1902) "Intégrale, longueur, aire". *Ann. di mat. pura ed appl.*, 3ª serie, *7*, 231-359.

66 BOREL, É. (1905) *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les developpements en séries de polinomes*. París, Gauther-Villars.

67 BIEBERBACH, L. (1918) "Über einem Osgoodsche Satz aus der Integralrechnung". *Math. Ztschr.*, *2*, 155-157.

68 LANDAU, E. (1918) "Ein Satz über Riemannsche Integrale". *Math. Ztschr.*, *2*, pp. 350-351.

69 OSGOOD, W. F. (1897) "Non-uniform convergence and the integration of series term by term". *Amer. Journ. of math.*, *19*, 155-190.

70 VALLÉE POUSSIN, Ch.-J. de la (1914) *Cours d'analyse infinitésimal*, vol. 1. París, Gauther-Villars.

71 HALMOS, P. R. (1950) *Measure theory*. New York.

72 ARZELÀ, C. (1885) "Sulla integrazione per serie". *Atti della R. Accad. dei Lincei. Rend.*, 4ª serie, *1*, 502-537, 566-569.

73 MEDVEDEV, F. M. (1974) *El desarrollo del concepto de integral*. Moscú, Nauka (en ruso).

74 GRATTAN-GUINNESS, I. (1970) *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass./ London, The MIT Press.

75 FELSCHER, W. (1978) *Naive Mengen und abstrakte Zahlen*, II. Algebraische und reelle Zahlen. Mannheim/Wien/Zürich, Bibliographisches Institut.

76 HADAMARD, J. (1912) "Le calcul fonctionnel". *L'Enseign. Math.*,*14*, 5-18.

77 HADAMARD, J. (1929) "Le développment du calcul fonctionnel". In: *Atti Congr. Intern. mat.*, vol. 1 (Bologna, 3-10 settembre 1928). Bologna, pp. 143-161.

78 MEDVEDEV, F.M. (1973) "Fundadores del análisis funcional sobre su historia temprana". *Estudios en historia de la matemática, XVIII*, 55 -70 (en ruso).

79 FRÉCHET, M. (1929), op. cit., pp. 267-274.

80 PINCHERLE, S. "Équations et opérations fonctionnelles". In: *Encycl. des math. pures et appl.*, II, vol. 5, fasc. 1.

81 SIEGMUND-SCHULTZE, R. (1982) "Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihre Platz im Umwälzungsprozess der Mathematik um 1900". *Arch. hist. math.*, *1*(1), 13-71.

82 MONTEL, P. (1962) "Le role des familles des fonctions dans l'analyse mathématique". In: F. Le Lionnais (ed.) *Les grands courants de la pensée mathématique*. París, A. Blanchard, pp. 173-178.

83 PRIVALOV, I. I. (192) "Estado actual de la teoría de funciones de variable compleja". In: *Memorias del Congreso de matemáticos de Rusia* (Moscú, 27 de abril - 4 de mayo de 1927). Moscú-Leningrado, Gostehizdat, pp. 33-49 (en ruso).