*LLULL, vol. 14, 1991, 7-30*

# ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y TEXTOS ALGEBRAICOS DEL SIGLO XIX

LEO CORRY
Edelstein Center for the History and Philosophy of Science
The Hebrew University (Jerusalem)

*RESUMEN*

*El presente trabajo analiza el contenido de algunos de los principales libros de texto de álgebra utilizados en Francia y en Alemania a finales del siglo XIX y a principios del siglo XX. Especial énfasis se otorga al* Lehrbuch der Algebra *(1895) de Heinrich Weber y a* Moderne Algebra *(1930) de B.L. van der Waerden.*

*Dicho análisis es parte de un programa más amplio cuyo objetivo es una reconstrucción histórica del ascenso de las tendencias estructuralistas en matemática desde finales del siglo XIX. Se parte del supuesto que el término* estructura matemática *designa un concepto* informal, *contrariamente a lo que la existencia de diversas definiciones formales existentes del término puedan hacer pensar.*

*ABSTRACT*

*In the present article, we analyze the contents of some of the more widely used textbooks of algebra in France and Germany by the turn of the century. Special attention is giben to Heinrich Weber's* Lehrbuch der Algebra *(1895) and B.L. van der Waerdn's* Moderne Algebra *(1930).*

*Such an analysis is part of a wider program aimed at providing an historic account of the rise of the structural approach in mathematics since the late nineteenth century. The basic assumption behind this program is that the term* mathematical structure *denotes an* non-formal *idea, contrary to what the existence of several formal definitions of it may leads us believe.*

*Recibido el 12 de noviembre de 1990*

*Dicho término informal designa una forma especlfica del hacer matemático, una serie de preguntas que llegaron a considerarse como las más relevantes para la investigación matemática, y un cierto tipo de respuestas que se consideran como las legítimas e interesantes. El uso del* método axiomático moderno *es tan sólo uno de los aspectos que caracterizan dicha forma de hacer matemáticas.*

*El análisis de los textos considerados en el presente artículo permite definir con mayor precisión las concepciones dominantes en el álgebra antes y después de la publicación del libro de van der Waerden. Al demarcar más claramente en qué consiste el carácter* estructural *de éste último, se abre el camino hacia una reconstrucción más fiel del ascenso de las tendencias estructurales en la matemática del siglo XX.*

*This non-formal term denotes a certain way of doing mathematics, a specific kind of questions that came to be considered as the most relevant to mathematical research, and a specific kind of answers that came to be considered as legitimate and interesting. The use of the* modern axiomatic method *is only one among several features that characterize this specific way of doing mathematics.*

*The texts analyzed in the present article allow a more precise definition of the dominating conceptions in algebra before and after the publication of van der Waerden's textbook. Having at hand a clearer demarcation of the features that confere this textbook it peculiar* structural *character, the way is open to a more faithful historic account of the rise of the structural trends in twentieh century mathematics in general.*

Palabras clave: Matemáticas, Algebra, Siglo XIX, Estructuras Matemáticas.

Uno de los motivos centrales que aparecen recurrentemente al hablar del álgebra moderna es la idea de estructura algebraica. En 1930, el matemático holandés B.L. van der Waerden publicó su libro de Texto *Moderne Algebra*, donde esta idea dominaba por primera vez, de manera sistemática, la presentación de numerosas disciplinas matemáticas que se habían desarrollado hasta entonces por canales separados, si bien no totalmente disconexos. El presentar esas disciplinas como instancias particulares de la idea general de estructura algebraica ponía de manifiesto un nexo, que con anterioridad existía, a lo sumo, sólo de manera implícita. La imagen del álgebra manifiesta en el texto de van der Waerden fue difundida rápidamente entre los algebristas, y a fin de cuentas muchas otras ramas centrales de la matemática adoptaron una imagen inspirada por aquélla.

Es indudable que la investigación matemática llevada a cabo dentro de la tendencia conocida como *estructural* trajo consigo resultados de gran valor, particularmente en lo que respecta al álgebra. Sin embargo, los indiscutibles logros de esta escuela han acarreado no pocos malentendidos en campos tales como la filosofía, la didáctica y la historia de las matemáticas[1].

Un serio malentendido historiográfico producido por el éxito de la corriente estructural consiste en la interpretación de la historia del álgebra, en especial la del siglo XIX, exclusivamente en términos del desarrollo de la idea de estructura. Dicha interpretación considera -explícita o implícitamente- el desarrollo de las diversas disciplinas, que a la postre serían expuestas en *Moderne Algebra*, como un mero preludio conducente al tratamiento que la idea de estructura algébrica nos proporciona de ellas. El propio van der Waerden, quien es conocido también por sus escritos sobre la historia de la matemática, es un típico representante de esta corriente historiográfica. En un pasaje tomado de su libro sobre la historia del álgebra leemos:

"El álgebra moderna se inicia con Evariste Galois. Con Galois el carácter del álgebra cambió radicalmente. Antes de Galois, los esfuerzos de los algebristas estaban dirigidos principalmente hacia la solución de ecuaciones algebraicas... Después de Galois, los esfuerzos de los algebristas más destacados se dirigieron hacia la estructura de anillos, cuerpos, álgebras y otros conceptos parecidos".

[Modern álgebra begins with Evariste Galois. With Gaolis, the character of algebra chaged radically. Before Gaolis the efforts of algebraists were mainly directed towards the solution of algebraic equations... After Galois, the efforts of the leading algebraists were mainly directed towards the structure of rings, fields, algebras, and the like]. (Van de Waerden 1985, 76).

Una interpretación de este tipo se basa en la lectura retrospectiva de las ideas del pasado en términos de conceptos desarrollados posteriormente, lo cual es historiográficamente erróneo por definición. Ella implica también un segundo error, más específico, consistente en la atribución de una importancia desmesurada a cualquier atisbo de abstracción en la formulación de los conceptos manejados por los algebristas, viendo en tales formulaciones decisivos avances hacia la concepción estructural del álgebra.

Si los más destacados algebristas dirigieron desde 1840 sus esfuerzos hacia la estructura de los anillos, cuerpos, etc.., ¿cómo explicar el tedioso trabajo invertido en estudiar diferentes ejemplos de lo que, posteriormente, precisamente con ayuda de aquellos conceptos, llegaría a considerarse uno y el mismo problema? ¿Cómo explicar, por ejemplo, los esfuerzos de Dedekind y Kronecker tendentes a elucidar, hacia fines del siglo XIX, las leyes de la factorización de los números algebraicos, por un lado, y los esfuerzos de E. Lasker y de F.S. Macaulay, a principios del siglo XX, tendentes a elucidar las de los polinomios, por el otro lado, si ambos problemas se disciernen más sencillamente a través de la teoría de ideales en anillos abstractos desarrollada por Emmy Noether con posterioridad, y de la cual ambos problemas resultan ser casos particulares?[2] Más aún: si efectivamente el álgebra moderna empezó con Galois, tal como lo expresa van der Waerden, cabe preguntarse en qué consistió la tan elogiada innovación aportada por el libro de texto del propio van der Waerden.

La idea que guía el presente artículo (así como otros trabajos en proceso de preparación) es que la publicación de *Moderne Algebra* significó, en efecto, un importante hito en la historia del álgebra, al establecer una nueva concepción de esa disciplina basada en el concepto de *estructura*. Sin embargo, el verdadero significado de esa nueva concepción ha sido insistentemente tergiversado al identificarla, única y exclusivamente, con la adopción del método axiomático moderno. Una exposición históricamente fiel del ascenso de la perspectiva estructural en matemáticas debe empezar por aclarar el significado real del concepto de *estructura matemática*, para luego identificar sus raíces y describir su desarrollo.

Qué debe entenderse por *la concepción estructural de la matemática* ha sido discutido en artículos anteriores[3], cuyos argumentos serán tan sólo condensados en lo que sigue. Subsecuentemente -y es esto lo que constituye la contribución específica del presente trabajo- se comparará la concepción del álgebra manifiesta en *Moderne Algebra* con la de otros textos que los precedieron, con el fin de comprender el valor histórico de dicha obra, y de señalar los niveles a los cuales debe explicarse el ascenso de la perspectiva estructural del álgebra.

## Estructuras Algebraicas - Un Concepto No Formal

Dos tipos de preguntas pueden formularse concernientes a una disciplina científica: preguntas substantivas *de* la disciplina, y preguntas *sobre* la disciplina como tal, o meta-preguntas.

Correspondiendo a estos dos tipos de preguntas respectivamente, podemos considerar dos componentes del conocimiento en cualquier campo científico: el *cuerpo* del conocimiento y las *imágenes* del conocimiento. En el primero se incluyen teorías, *hechos*, métodos, problemas abiertos, etc. El segundo concierne a metapreguntas tales como ¿cuál es la metodología legítima que debe adoptarse en la disciplina? ¿Qué constituye una buena teoría? ¿Cuáles son las preguntas que requieren consideración más urgente dentro de la disciplina?, etc... El estudio de la interacción entre esos dos componentes del conocimiento es fundamental para entender el crecimiento de cualquier sistema científico, y en particular, el de las matemáticas[4].

No es suficiente descubrir un nuevo teorema, una nueva prueba o un nuevo concepto para poder afirmar con propiedad que el conocimiento matemático ha cambiado. Son las imágenes del conocimiento (las cuales se establecen en un proceso de interacción entre factores sociológicos, filosóficos, científicos, etc...) las que determinarán si nuevos ítems de conocimiento serán absorbidos en el cuerpo existente, si serán considerados de algún valor, o si, por el contrario, serán ignorados. Los componentes del cuerpo de conocimiento no poseen cualidades intrínsecas que determinan, indiferentemente de todo contexto, su importancia relativa dentro del sistema de conocimiento existente. Precisamente, son las imágenes del conocimiento las que proporcionan el contexto necesario para tal determinación. Así sucede que descubrimientos percibidos por la comunidad científica como faltos de interés en el momento de su publicación pueden adquirir posteriormente gran relevancia, al producirse un cambio en las imágenes del conocimiento.

La diferenciación entre cuerpo e imágenes de conocimiento puede servir, entonces, de útil guía historiográfica. Existen diferencias esenciales entre el cuerpo y la imágenes del conocimiento, de manera que los procesos de cambio en uno de esos componentes y los factores que los afectan son a veces irrelevantes para el otro, y viceversa. Por ejemplo, un nuevo teorema es agregado al cuerpo del conocimiento cuando viene acompañado de su prueba. La demostración, por tanto, constituye el principal criterio de cambio en el cuerpo de conocimiento. Pero bien sabemos, que los criterios de aceptación de un argumento como prueba válida han variado a lo largo de la historia y a través de las diferentes disciplinas matemáticas. Dichos criterios pertenecen a las imágenes del conocimiento matemático y sus procesos de cambio difieren de los del cuerpo mismo. Vemos entonces que el proceso de cambio científico, y en particular el matemático, no es de pura *acumulación cuantitativa* de resultados y conceptos. Tal acumulación es, evidentemente, de gran importancia, pero no lo es menos el proceso de *transformación cualitativa* de la manera en que entendemos y evaluamos dichos resultados, vale decir la transformación de las imágenes de la matemática.

El significado de la corriente estructural en matemática puede ser claramente explicado en términos de cuerpo e imágenes del conocimiento. Así, dicha corriente no surge con la formulación de algún concepto específico (por ejemplo, un concepto formal de estructura matemática) ni con el descubrimiento de algún nuevo resultado o método (por ejemplo, el método axiomático moderno), sino con la consolidación de una nueva imagen del conocimiento matemático. Tal imagen no puede ser descrita en términos de tal o cual concepto formal, sino que se caracteriza por la interacción de una serie de factores no-formales que la conforman. En otras palabras, la concepción estructural de la matemática consiste en cierta manera de concebir los objetivos y los métodos relevantes de ciertas disciplinas matemáticas, y para caracterizar dicha concepción es necesario detallar el tipo de pregunta considerada relevante dentro de ella, los conceptos y métodos básicos usados para responderlas, y el tipo de respuestas que se esperan y se consideran legítimas e interesantes.

El presente artículo asume que los libros de texto usados en determinada época proveen información considerable sobre las imágenes de conocimiento imperantes en la disciplina inspeccionada. En el caso de *Moderne Algebra* se adopta una suposición más comprometedora aún: se asume que la concepción estructural del álgebra no es sino la nueva imagen del álgebra propugnada por dicho texto. Analizaremos, entonces, las imágenes del álgebra imperantes a fines del siglo XIX y el cambio producido en ellas con la publicación de *Moderne Algebra.*

## Heinrich Weber y su *Lehrbuch der Algebra*

Cuando la primera edición del *Lehrbuch der Algebra* de Heinrich Weber (1842-1913) apareció en 1895, su autor estaba bien al corriente de los avances del álgebra en su tiempo. También la posibilidad de formular conceptos algebraicos en términos abstractos le era conocida de primera mano; de hecho, él mismo había sido el primero en publicar un artículo donde se definían conjuntamente, y en formulación abstracta, los conceptos de grupo y cuerpo, considerando al segundo como un caso particular del primero. Más aún, en colaboración con Richard Dedeking, Weber había publicado en 1882 un trabajo sobre funciones algebraicas, en el cual se aplicaban muchos de los conceptos que Dedekind había desarrollado en su teoría de ideales, y que han sido considerados como pioneros del punto de vista abstracto en álgebra.

El éxito que alcanzaría el *Lehrbuch* como texto estándar del álgebra en Alemania desde fines de siglo y hasta los años veinte[5], por un lado, y la participación directa de Weber en los adelantos de la investigación algebraica de su época, por el otro, confieren al estudio de los trabajos de este autor un interés especial como patrón de medida del significado de los métodos abstractos y, más generalmente, de las imágenes del álgebra reinantes antes de la publicación de *Moderne Algebra*. En la presente sección, por tanto, se discutirán brevemente algunos trabajos de Weber.

En 1893 Weber publicó su artículo *Fundamentación general de la teoría de las ecuaciones de Galois*, cuyo objetivo era presentar dicha teoría desde el punto de vista más general que era posible para la época[6]. Weber presentaba la teoría, no como una teoría que se ocupa de ecuaciones, sino más bien de grupos y cuerpos. Así, el artículo se inicia con la siguiente aserción:

"La teoría se presenta aquí como una consecuencia inmediata del concepto de cuerpo, que no es sino una extensión del concepto de grupo, visto como una ley formal, independiente del significado numérico de los elementos relacionados... Así, la teoría aparece como un formalismo absoluto, el cual cobra vida y contenido, sólo al otorgársele a los elementos valores numéricos".

[(Die Theorie) ergibt sich hier als eine ummittelbare Consequenz der zum Körperbegriff erwiterten Gruppenbegriffs, als ein formales Gesetz ganz ohne Rücksicht auf die Zahlenbedeutung der verwandete Elemente... Die Theorie erscheint bei dieser Auffassung freilich als ein reiner Formalismus, der durch Belegung der einzelnen Elemente mit Zahlenwerthen erst Inhalt und Leben gewinnt]. (Weber 1893, 521).

Y, en efecto, Weber define consecuentemente los conceptos considerados en términos totalmente abstractos. No sólo son los conceptos de grupo y cuerpo definidos dentro de un mismo contexto, sino que también lo son los grupos finitos y los infinitos. Aunque Weber no fue el primero en considerar grupos finitos e infinitos conjuntamente[7], no hay duda que es ésta la primera oportunidad en que los dos son extensivamente tratados en el marco de una presentación abstracta común. En consecuencia, al definir un cuerpo como un grupo al que se le añade una operación adicional, que cumple ciertas restricciones, Weber añade otra importante innovación, al incluir automáticamente el caso de los cuerpos finitos dentro de su definición general. Veamos esto con más detalle.

En la definición dada por Weber, los grupos quedan definidos por una ley de composición cancelable por la derecha y por la izquierda. Se cumple la ley asociativa, pero, en general, no la conmutativa. Que una tal ley produce un resultado unívocamente determinado para cada par de elementos es demostrable en el caso de un grupo finito, pero Weber debe introducir esa condición como axioma adicional, ya que en el caso de grupos infinitos, esto no se deriva de los axiomas (p. 524). La existencia de elemento neutro y elemento inverso (para cada elemento del grupo), por el contrario, se deriva como consecuencia de las axiomas anteriores. Weber define isomorfismo y establece que dos grupos isomorfos constituyen un mismo concepto genérico (*Gattungsbegriff*) y que, por tanto, es indiferente tomar uno u otro representante al estudiar sus propiedades en tanto que grupo.

En lo que respecta a los cuerpos, Weber afirma que un producto es nulo si y sólo si uno de los factores lo es, y señala la existencia de cuerpos finitos, ejemplificados por el cuerpo Zp de las clases de congruencia de los enteros módulo p, con p primo. Como posible direcciones, no realizadas, de generalización de este concepto, Weber menciona cuerpos con divisores de zero (Zp, con p no primo), o la adición de una tercera operación. Cabe mencionar que el concepto de característica no es mencionado explícitamente en el artículo.

Como vemos, entonces, este artículo de Weber presenta los conceptos de grupo y cuerpo desde una perspectiva muy parecida a la contemporánea, aunque, como leemos en la cita anterior, para Weber dichos conceptos cobran vida y verdadero significado, sólo al otorgárseles valores numéricos. Sin embargo, es conveniente señalar desde ya que dicho artículo no produjo ningún cambio digno de mención en la práctica matemática de su tiempo. Tendrían que transcurrir casi veinte años hasta que en 1910 Ernst Steinitsz publicase su trabajo sobre los cuerpos (que será discutido más abajo), trabajo que significaría un auténtico cambio de dirección, al presentar, no ya el mero *concepto* abstracto de cuerpo, sino la *teoría* abstracta de cuerpos como tal. Pero, lo que es más sorprendente aún, Weber mismo, en el libro de texto que publicaría pocos años posteriormente a su propio artículo, parece no haberse convencido que sus formulaciones tuvieran algún significado revolucionario especial para el álgebra. Así, lejos de recurrir a las formulaciones arriba descritas, seguiría presentando el álgebra tal y como se venía haciendo a lo largo del siglo XIX. Aún en 1924 se publicará y entrará en uso un nuevo texto de álgebra explícitamente inspirado en el libro de Weber[8], y en el cual, como veremos, el uso de conceptos abstractos no llega aún a producir un cambio radical en las imágenes de álgebra.

Pasemos a describir el libro de texto de Weber y veamos qué imágenes del álgebra se reflejan en él. El *Lehrbuch* apareció en tres sucesivos volúmenes, cada uno de los cuales fue re-editado varias veces. En el primer volumen se exponen las partes elementales del álgebra, designadas por Weber con el calificativo general de *cálculo con letras* (*Buchstabenrechnung*). Esto incluye las reglas para la solución de ecuaciones polinomiales, y culmina con la exposición de la teoría de Galois. En la introducción a dicho volumen se anunciaba ya el contenido del segundo, que aparecería al año siguiente y habría de contener la teoría de grupos finitos y de las substituciones lineales, y culminaría con la teoría de números algebraicos.

El álgebra, tal como aparece en el *Lehrbuch*, es la disciplina cuyo problema central es el de la resolución de ecuaciones polinómicas. Este problema es considerado desde varios puntos de vista, pero en todo caso se trata de ecuaciones polinómicas cuyas raíces son números reales o complejos, y cuyas propiedades dependen directamente de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos considerados. Obviamente, entonces, el libro tiene que dedicar su capítulo introductorio a la discusión de las propiedades de los diferentes sistemas numéricos. A lo largo de esa discusión se hace evidente la influencia de las ideas desarrolladas por Dedekind en sus libros sobre la fundamentación de los diferentes sistemas de números[9]. Primero aparece un breve recuento de las propiedades de los enteros, y se introduce el concepto de conjunto. Se definen conjuntos densos (*dicht*), ordenados, discretos y continuos, y asimismo Weber define las cortaduras al estilo de Dedekind. Los números racionales constituyen un conjunto denso no-continuo mientras que los reales forman un sistema denso y continuo. Como Dedekind antes de él, Weber trabaja aquí con formulaciones que pueden clasificarse de abstractas, y sin embargo los sistemas de números no son considerados entes arbitrariamente definidos en forma axiomática, de los cuales es posible deducir una serie de teoremas, sino entidades *particulares* cuyas propiedades quedan especificadas de antemano, implicando una serie de consecuencias para el álgebra en general. Al seguir tan de cerca el tratamiento de Dedekind, Weber incluye en las definiciones propiedades tales como densidad o continuidad, que son irrelevantes para lo que hoy consideramos la investigación algebraica de las ecuaciones.

El conocimiento de Weber de los recientes avances del álgebra se manifiesta en la introducción de novedosos conceptos, técnicas y resultados relacionados con la teoría de grupos y la teoría de Galois, pero debe subrayarse que el uso de estos queda reducido a un papel auxiliar en la tarea principal de estudiar las ecuaciones polinómicas, cuyas propiedades, como queda ya dicho, han sido determinadas de antemano por las propiedades de los sistemas numéricos. Así, en el primer volumen, libro 1, capítulo II, Weber discute determinantes y permutaciones, pero las propiedades de grupo satisfechas por éstas ultimas no son mencionadas, ni son conectadas en forma alguna con el concepto de grupo. Más adelante, en el capítulo XI, se discuten las raíces de la unidad, nuevamente sin mencionar sus propiedades de grupo.

La teoría de Galois es discutida en el libro 2 del primer volumen, después de casi quinientas páginas dedicadas a la resolución de ecuaciones. Se define el concepto de cuerpo, pero, en lugar de hacerlo en la misma forma abstracta y general ya conocida de su anterior artículo, Weber define los cuerpos, al igual que Dedeking en sus propios trabajos, como *conjuntos de números reales o complejos* cerrados bajo las cuatro operaciones (p. 491-492), y la única posible generalización que se menciona es la que se obtiene al considerar funciones en lugar de números, tal como Weber lo había hecho junto con Dedekind en su artículo conjunto de 1882. Weber no deja de mencionar su artículo de 1893, pero, a diferencia de lo que se hace en él, Weber considera aquí únicamente cuerpos infinitos de característica zero.

Los grupos son mencionados por primera vez en la página 511, aunque el tratamiento general del concepto, tal y como se le conocía por aquella época, es diferido a un capítulo posterior. En este punto Weber sólo discute las propiedades de grupo de las sustituciones de raíces de un polinomio dado, definiendo grupo de permutaciones, y el grupo de Galois de un cuerpo dado. En el capítulo XIV (p. 529), Weber muestra las aplicaciones de los grupos de permutaciones a la teoría de aquellos, en tanto que directamente relevantes para este asunto. El llamado teorema de Lagrange es demostrado aquí para el caso de grupos de permutaciones (y es atribuido a Cauchy, p. 554), quedando la demostración del caso general para el segundo volumen del *Lehrbuch*.

De esta forma, la teoría de grupos es considerada como una herramienta más -muy efectiva, eso sí- para el estudio de la teoría de ecuaciones. De hecho, Weber declara que la teoría de grupos se había convertido en la más útil de las herramientas desarrolladas en los últimos años por el álgebra para afrontar el problema de la resolución de ecuaciones *por radicales*. Pero debe entenderse que la resolución por radicales es una forma entre muchas (*Eine der ältesten*, p. 644) consideradas por el álgebra al estudiar los polinomios. Ya desde capítulos anteriores otro tipo de resoluciones, con sus correspondientes herramientas conceptuales, han sido discutidas. Así, en el capítulo III, la propia definición de raíz de un polinomio es formulada en términos *analíticos*, vale decir, en términos de límites, continuidad, argumentos del tipo $\varepsilon$ - $\delta$, etc. En el capítulo VIII se discute el teorema de Sturm y otros problemas relacionados que se resuelven por medio de derivadas y otros conceptos analíticos. Igualmente, el capítulo X trata de aproximaciones e interpolaciones, discutiendo métodos de carácter netamente analítico, tales como el método de aproximación de Newton. El que la resolución de ecuaciones *por radicales* haya pasado a ser la única forma de resolución considerada en textos algebraicos contemporáneos es una consecuencia del cambio sufrido por el álgebra desde entonces, pero el *Lehrbuch* de Weber muestra claramente que la situación era muy diferente para el álgebra aun a fines del siglo XIX.

Solamente en el segundo volumen del Lehrbuch define Weber los grupos en términos similares a aquellos utilizados en su artículo de 1893. El objetivo del estudio de los grupos abstractos es descrito entonces como sigue:

"La definición de grupo contiene mucho más de lo que puede parecer a primera vista, y la cantidad de grupos que es posible definir para un número dado de elementos es bastante limitada. Los teoremas generales que son válidos aquí son al principio reconocidos sólo parcialmente, de modo que cada nuevo grupo especial,... ofrece un renovado interés y nos lleva a nuevos estudios.

¿Qué grupos se pueden definir para un número dado de elementos? Esta es la pregunta general que consideramos, pero que aún estamos muy lejos de poder resolver satisfactoriamente".

[In der Definition der Gruppe ist mehr enthalten, als es auf den ersten Blick den Anschein hat, und die Zahl der möglichen Gruppen, die aus einer gegeben Anzahl von Elementen zusammengefasst werden konnen, ist ein sehr beschränkte. Die allgemeinen Geseteze, die hier herrschen, sind erst zum kleinsten Theile erkannt, so dass jede neue spezielle Gruppe... ein neues Interesse bietet und zu eingehendem Studium auffordet.

Welche Gruppe sind swischen einer gegebenen Zahl von Elementen, d.h. bei gegebenen Grade überhaupt möglich? Das ist die allgemeine Frage um die es sich handlet, von deren vollständingen Lösung wir aber noch weit entfert sind]. (p. 121).

El problema de determinación del número de grupos existentes para un orden dado, como bien se sabe, fue planteado por vez primera en 1851 por Cayley, quien también definió el concepto de grupo con una formulación altamante abstracta. El planteamiento de Weber, y el lugar relativamente periférico que el problema ocupa en su libro, atestiguan hasta qué punto a fines del siglo XIX todavía el mundo algebraico estaba lejos de haber visto en este tipo de problema abstracto, el tipo de problema central del cual debería ocuparse la disciplina. Weber discute algunos casos particulares de grupos (grupos de caracteres, substituciones lineales, grupos poliédricos) y algunas de las aplicaciones de la teoría, pero su exposición está lejos de ser un informe exhaustivo de los avances de la teoría para aquel entonces.

La segunda parte del segundo volumen presenta la teoría de los números algebraicos, en la cual se siente la profunda influencia de Dedekind. En particular, los cuerpos utilizados no corresponden al concepto abstracto introducido en el artículo de 1893, sino más bien a los cuerpos de números utilizados por Dedekind en su trabajo.

El tercer volumen del *Lehrbuch* apareció en 1908 y constituye una segunda edición del libro que Weber mismo había publicado en 1891, y que trata de funciones elípticas y números algebraicos. Por lo tanto, su contenido no viene al caso de la presente discusión.

Para resumir esta sección diremos que si bien Weber fue capaz de definir los conceptos de grupo y cuerpo por medio de una formulación abstracta común a ambos, la imagen del álgebra que se refleja en su libro, y que representa la imagen imperante a fines del siglo XIX, seguía viendo en la resolución de ecuaciones algebraicas, y no en la elucidación de conceptos tales como los dos mencionados, la tarea central de la disciplina. En particular, esos conceptos no fueron entendidos como dos individuos pertenecientes a la misma especie (la reputada especie de las *estructuras algebraicas*), sino como dos herramientas auxiliares a la tarea central del álgebra. En la medida en que grupos y cuerpos aparecían ya como campos de estudio que ofrecían interés en sí mismos, y si bien las definiciones abstractas mostraban similaridad, el tipo de preguntas planteadas respecto a ambos, el tipo de respuesta que se esperaba y los conceptos desarrollados alrededor de ambos, diferían considerablemente. Es esta última característica la que cambiará con la publicación de *Moderne Algebra*.

## Robert Fricke y su *Lehrbuch der Algebra*

Para confirmar la opinión expresada en la sección anterior con respecto a la imagen del álgebra imperante en Alemania previo a la publicación de *Moderne Algebra* y comprender hasta qué punto éste último significó un cambio radical, conviene considerar el libro homónimo del de Weber *Lehrbuch der Algebra*, de Robert Fricke (1861-1930), publicado en 1924. Fricke había colaborado con Felix Klein en su trabajo de fundamentación de la teoría de funciones automorfas. La contribución de Fricke había sido decisiva al formular el papel central representado por los grupos en esa disciplina[10]. Fricke también participó en la edición de las obras de Klein (1921-23) y posteriormente participaría también en la edición de las de Dedekind (1930). Obviamente, entonces, Fricke no era un layo en cuestiones de álgebra.

Fricke escribió su libro a raíz de una proposición directa que recibiera de F. Vieweg, quien había editado el texto de Weber, y quien, habiéndose agotado las existencias del *Lehrbuch*, solicitó a Fricke que escribiera un libro sobre el mismo tema. Fricke asintió a la proposición de buena gana, y cuando el libro se publicó en 1924, agregó el subtítulo: *Escrito en base al libro homónino de Heinrich Weber* [*Verfasst mit Benutzung vom Heinrich Webers gleichnamigem Buche*]. El deseo de un editor tan importante como Vieweg de publicar un nuevo libro que preservase la línea de un texto usado durante ya casi treinta años atestigua la gran influencia de éste último para establecer, y ciertamente reflejar, las imágenes de álgebra de la época.

Aunque la influencia del texto de Weber se refleja claramente a lo largo del libro de Fricke, encontramos también algunas diferencias dignas de mención. Estas diferencias conciernen, en especial, al tratamiento de los grupos y de los cuerpos, atestiguando las transformaciones sufridas por las imágenes del álgebra en el período transcurrido entre los dos libros. Pero es de notar que, a pesar de esos cambios, la imagen general del álgebra presentada por Fricke es básicamente la misma de la de Weber, y difiere de la de van der Waerden. Esto nos llevará a concluir que la mera posibilidad de formular abstractamente los conceptos no llevaba inevitablemente a la reformulación del álgebra toda en base al concepto de estructura, y que la innovación de *Moderne Algebra* va más allá de la simple aplicación consecuente del método axiomático moderno. Veamos algunos detalles del *Lehrbuch* de Fricke.

Fricke expone la teoría de grupos en términos abstractos y de manera tal, que los resultados se encuentran ya a mano al ir a desarrollar, posteriormente, la teoría de Galois. En esto sí se asemeja el tratamiento de Fricke al de van der Waerden. Así, por ejemplo, en el capítulo III Fricke prueba teoremas generales sobre grupos, tales como el teorema de Jordan-Hölder (aunque sin mencionar esos nombres) (p. 281) y los teoremas de Sylow, con la demostración dada por Frobenius (p. 291). También hay una discusión sobre los grupos simples de órdenes inferiores, incluyendo una prueba de la simplicidad de $A_5$ (p. 303), y se prueba el teorema de la base para grupos abelianos (p. 311). En toda esta sección no se menciona la conexión entre dichos resultados y la teoría de ecuaciones, hasta el momento en que la teoría de Galois propiamente dicha es desarrollada (p. 354).

En lo que concierne a la teoría de cuerpos, encontramos un tratamiento mucho más tradicional, semejante al del *Lehrbuch* de Weber (y por tanto diferente del de su artículo de 1893). Fricke no desarrolla la teoría de cuerpos de antemano, sino como parte de su exposición de la teoría de Galois, y considera sólo cuerpos de números (*Zahlköper*), es decir, conjuntos de números cerrados bajo las cuatro operaciones aritméticas. Es en este contexto, en especial, donde el libro de Fricke nos sirve para entender cuán poco cambio en las imágenes del álgebra se había producido como consecuencia del artículo de Weber de 1893, y cómo, aún en 1924, un algebrista al tanto de los avances de la disciplina no había absorbido el concepto de estructura algebraica. Así, en una nota marginal agregada bajo la definición de cuerpo, Fricke confiesa que sería posible mejorar su propio punto de vista, siguiendo una sugerencia de Emmy Noether de definir los cuerpos de una manera similar a la usada para definir los grupos, es decir, postulando dos operaciones sobre un conjunto arbitrario y exigiendo ciertas condiciones sobre dichas operaciones. Fricke menciona inclusive el hecho de que tal método de definición había sido ya utilizado por Weber en 1893.

Vista retrospectivamente, la actitud de Fricke podría parecer un tanto sorprendente, y no se explica por qué hubo de esperar la sugerencia de Noether, para mencionar la posibilidad de este tipo de definición. Sin embargo, la situación se aclara al insistir en que la definición abstracta no fue entendida inmediatamente cómo digna de especial atención y que fue necesario demostrar primero su utilidad en varios contextos para que pasase a ser una herramienta estándar del álgebra. Desde principios de los años veinte Emmy Noether había estado usando con gran éxito la concepción abstracta de los anillos para desarrollar su teoría general de ideales, y de allí su entusiasmo por el método. Pero es claro que el potencial ya se había manifestado en la obra de Ernst Steinitz de 1910. Fricke mismo señala esta obra como el punto en el cual la definición propuesta por Weber veinte años atrás se transformó en relevante. En sus palabras:

> "E. Steinitz retomó [la definición abstracta propuesta por Weber] y la trabajó detalladamente entre 1908 y 1910 en su artículo *Teoría Algebraica de Cuerpos* (1910), demostrando que se trata de una fecunda extensión del concepto original de cuerpo de números".

> [Denn aber ist auf ihn E.Steinitz im den Jahren 1908 bis 1910 ausfürlich eingenommen in der Arbeit *Algebraische Theorie der Körper* (1910) und hat gezeigt, daß es sich hier um eine fruchtbare Erweiterung des unsprünglichen Zahleköpers Begriff haldet] (p. 354).

Nótese que al referirse a la definición de Weber, Fricke la relaciona al concepto original de cuerpo de números. Fricke agrega también un comentario sobre el concepto de característica introducido por Steinitz y advierte que todos los cuerpos tratados en su *Lehrbuch* son de característica cero, y por tanto algunos de los teoremas demostrados en él no son válidos para el caso general. Claramente, esto no afecta su propia exposición de la teoría de Galois, totalmente subsidiaria a la teoría de ecuaciones. El concepto de cuerpo de Fricke no sólo difiere de su propia concepción de grupo, siendo por tanto ajeno a la idea de estructura algebraica adoptada por van der Waerden, sino que ni siquiera ha absorbido la concepción más general desarrollada por Steinitz. Este hecho nos ayuda a comprender más precisamente el verdadero valor de la concepción de los cuerpos imperante en el siglo XIX y, en forma más general, el hecho de que aún para Dedekind y Weber, los más notables exponentes de las concepciones abstractas para la época, el álgebra seguía siendo la disciplina de las ecuaciones polinómicas en el sentido tradicional del término. La idea de estructura algebraica estaba aún por llegar.

La dualidad de perspectivas adoptadas por Weber en su artículo de 1893 y en su texto publicado por vez primera en 1895, y republicado en los años subsiguientes, ha sido explicada en base a los diferentes objetivos y las diferentes audiencias a las cuales estaban destinados ambos trabajos[11]. Sin negar toda validez a este argumento, debe agregarse que es un tanto limitado. Su limitación consiste en atribuir una importáncia exagerada a la formulación abstracta de los conceptos por Weber. Los grandes logros de los métodos abstractos en la matemática contemporánea no hacen válida en modo alguno la creencia de que el desarrollo del álgebra en el siglo XIX consistió en un creciente perfeccionamiento de los conceptos hasta que ésos adquiriesen su formulación abstracta. Por el contrario, la lección que podemos aprender del caso en discusión aquí, es que en el marco de las imágenes de conocimiento imperantes, determinada contribución al cuerpo del conocimiento (v.z., la formulación abstracta ofrecida por Weber) no fue considerada como digna de atención especial y como portadora de ventajas de gran valor para la matemática. Sólo al producirse posteriormente un cambio en las imágenes del conocimiento, cambió tal apreciación. De hecho, no tenemos evidencia alguna que indique que Weber haya considerado su formulación abstracta de los conceptos de grupo y de cuerpo como un gran descubrimiento. En realidad, el punto de vista adoptado en su libro parecería conducir a la conclusión de que Weber consideró dichas formulaciones como un resultado casi marginal, aunque interesante y digno de investigación adicional, pero ciertamente no el punto de partida de una nueva concepción del álgebra toda. Habrían de pasar muchos años todavía hasta que trabajos como los de Steinitz y Noether combinaran la formulación abstracta con un tipo muy particular de preguntas y con una serie de conceptos utilizados recurrentemente para investigar con éxito diferentes dominios algebraicos, hasta que se produjese el cambio en las imágenes del conocimiento del cual *Moderne Algebra* es la expresión más clara, y que mostró el verdadero potencial encerrado en la nueva concepción.

## Steinitz y la *Algebraische Theorie der Körper*

Antes de pasar a describir la nueva imagen del álgebra reflejada en *Moderne Algebra*, dedicaremos algunos párrafos al artículo de Ernst Steinitz (1871-1928), "Teoría algebraica de los cuerpos" (*Algegraische Theorie der Körper*), publicado en 1910. La influencia de este trabajo en el desarrollo del álgebra moderna ha sido repetidamente mencionada[12], pero en general no se ha definido claramente, como en el caso de *Moderne Algebra*, en qué reside su innovación. Por un lado, ya hemos visto que el concepto abstracto de cuerpo había sido plenamente formulado en 1893. Por otro lado, la teoría abstracta de grupos ya gozaba para esta época de existencia independiente. ¿Qué contribución específica de dicho trabajo le confiere su importancia histórica? Pues bien, podemos definir la innovación del artículo afirmando que fue el primer trabajo en el cual se elaboró explícitamente la *imagen estructural* en el estudio de una teoría algebraica particular.

Si bien es cierto que Weber había sido el primero en *definir* los cuerpos en forma abstracta, fue Steinitz el primero en *investigar* estructuralmente dicho concepto. Mas aún, Steinitz fue el primero en especificar qué tipo de preguntas conferían interés especial a esa investigación, y qué tipo de respuestas deberían esperarse.

Steinitz abre su artículo con una declaración metodológica: su objetivo es investigar los cuerpos abstractos definidos por Weber en 1893, pero su investigación diferirá de la de su predecesor en un sentido importante[13]:

"Mientras que el objetivo del trabajo de Weber era el manejo de la teoría de Galois en una manera general, e independiente del significado numérico de los elementos, para nosotros se sitúa el propio concepto de cuerpo en el foco de interés".

[Während aber bei Weber das Ziel eine allgemeine von den Zahlenbedeutung der Elemente unabhängige Behandlung der Galoisschen Theorie ist, steht für uns der Körperbegriff selbst im Mittelpunkt des Interesses] (p. 5).

Pero, como ya se ha dicho, Steinitz no sólo señala el concepto abstracto como objeto central de investigación, sino que también especifica qué es lo que se pretende averiguar respecto a este concepto:

"El programa del presente trabajo consiste en *presentar una visión general de todos los tipos posibles de cuerpos y en determinar la esencia de sus interrelaciones*".

[*Eine übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen*, kann als Programma dieser Arbeit gelten]. (p. 5, subrayado en el original).

Stenitz va más allá en su declaración programática al detallar los pasos a seguir a fin de describir todos los cuerpos y entender la esencia de sus interrelaciones. Primero, es necesario determinar los cuerpos más simples. Luego, deben estudiarse los métodos por medio de los cuales pueden obtenerse nuevos cuerpos, partiendo de cuerpos dados y a través de extensiones, y detallando cuáles son las propiedades del cuerpo original que se transmiten a la extensión. Un concepto primordial, que nos ayuda en esta tarea, es el de característica, que, como se recordará, no aparecía explícitamente en el trabajo de Weber.

El primer resultado importante de Steinitz consiste en probar que todo cuerpo contiene un *cuerpo primo*, es decir, ese tipo básico de cuerpo que Steinitz buscaba. Dicho cuerpo es isomorfo al cuerpo de los racionales o al cuerpo cociente de los enteros módulo $p$ ($p$ primo), dependiendo, claro está, de la característica del cuerpo dado.

El mencionado concepto de isomorfismo es claramente una de las más importantes herramientas del programa de Steinitz, pero es notable que él mismo no mencionara explícitamente la centralidad del concepto. H. Hasse y R. Baer, que reeditaron el trabajo de Steinitz en 1930, parecen haber estado en una posición más ventajosa al poder aprovechar la más amplia perspectiva otorgada por el desarrolo posterior del álgebra, y poder señalar explícitamente el papel fundamental representado por el concepto de isomorfismo en el trabajo de Steinitz.

También debe mencionarse el cuidado especial que muestra Steinitz en el tratamiento del axioma de elección, tratando por separado aquellos resultados que dependen directamente de él. El progreso obtenido ya en la primera década del siglo en el estudio de los conjuntos, colocaba a los matemáticos en una posición muy ventajosa en lo que respecta a la definición de conceptos basados en un conjunto no vacío sobre el cual se define alguna relación.

El trabajo de Steinitz repercutió en diversas áreas de la matemática, en las cuales se presentaron trabajos que seguían un patrón similar al establecido por aquél. Tal vez el más importante ejemplo de esta tendencia está representado por los trabajos de Abraham Fraenkel, en los cuales se estudió por primera vez el concepto abstracto de anillo[14], mencionando explícitamente a Steinitz como fuente de inspiración, y que abrieron el camino para los importantes trabajos de Emmy Noether, Emil Artin y Wolfgang Krull sobre teorías algebraicas abstractas. El logro de *Moderne Algebra* consistirá en extender a un gran número de disciplinas el tipo de programa iniciado por Steinitz para los cuerpos, y profundizado por Noether y sus colaboradores en otras disciplinas algebraicas.

## Estructuras Algebraicas en *Moderne Algebra*

Pasemos finalmente a analizar el contenido de *Moderne Algebra*, a fin de precisar con mayor detalle los elementos no formales que determinan su carácter *estructural* y que explican su carácter innovativo.

Después de haber terminado su doctorado en Holanda, bajo la dirección de L.E.J. Brouwer (1881-1966), van der Waerden viajó a Alemania en 1924 y en 1926 para trabajar bajo la guía de los destacados matemáticos Emmy Noether, en Gotinga, y Emil Artin, en Hamburgo. Las contribuciones de estos dos matemáticos, junto con las de otros colegas y discípulos, tales como Kurt Hensel, Wolfgang Krull, y otros, se habían acumulado en los años precedentes, creando un enorme *corpus* de conocimiento en disciplinas tales como la teoría de anillos e ideales, los sistemas hypercomplejos y los números p-ádicos, etc. Este *corpus* se encontraba por aquel entonces disperso en diversas publicaciones, conteniendo abundantes redundancias y tal vez algunas omisiones, y por tanto ofrecía (y hasta podrá decirse exigía) la inevitable tarea de recopilación y exposición sistemática, a través de un sistema racional y unificado de notación y nomenclatura. Van der Waerden, inspirado por las lecciones de Artin, asumió esta tarea, y *Moderne Algebra* nació como resultado de ella.

El libro de van der Waerden no fue el único texto que se publicó por aquella época con la intención de actualizar la enseñanza del álgebra, llenando los vacíos que se había producido en la literatura matemática. Le precedieron *Höhere Algebra* de Helmut Hasse (1927), *Einführung in die Algebra* (1929) de Otto Haupt, y en los Estados Unidos *Modern Algebraic Theories* (1926) de Leonard Eugene Dixon, que también fue traducido al alemán[15]. Sin embargo fue *Moderne Algebra* el que se transformó en el texto de álgebra moderna por antonomasia, y a la vez, el álgebra moderna pasó a ser identificada como la disciplina expuesta en el libro de van der Waerden. Por tanto, para entender la imagen estructural del álgebra, describiremos a continuación la perspectiva desde la cual el álgebra es estudiada en *Moderne Algebra*.

El objetivo del libro puede ser resumido en una frase que parecerá trivial al matemático contemporáneo: *definir los diferentes dominios algebraicos y elucidar sus respectivas estructuras*. Para definir los diversos dominios algebraicos contaba van der Waerden con dos posibles alternativas: o bien se toma un conjunto no vacío y se dota de una o más operaciones abstractamente definidas, o bien, se toma un dominio existente y se define algún proceso especial que introduce una nueva construcción algebraica sobre la anterior (cuerpo cociente de un dominio de integridad, anillo de polinomios de un anillo, extensión de un cuerpo, etc...).

Pero una vez que aquéllos se han definido, ¿qué debe entenderse por *elucidar la estructura* de estos dominios? Esta es una pregunta para la cual no encontramos una respuesta tajante y que, de hecho, nunca es explícitamente discutida en el libro. El capítulo V, por tomar un ejemplo, se inicia con la siguiente declaración: *El propósito del presente capítulo es proporcionar una perspectiva inicial de la estructura de los cuerpos conmutativos y de sus subcuerpos y extensiones más sencillos.*

*[Ziel dieses Kapitels ist, über die Struktur der kommutativen Körper, über ihre einfachsten Unterkörper und Erweiterungskörpe eine erste Übersicht zu gewinnen.* [p. 95].

Los cuerpos son definidos entonces de la manera estándar, dotando a un conjunto con dos operaciones abstractamente definida. Pero, ¿qué es lo que debemos saber de ellos para poder afirmar con propiedad que hemos dilucidado su estructura? Como esto no se discute explícitamente en el libro, no queda más alternativa que averiguarlo a través de una descripción no formal de lo que efectivamente se hace en los diversos capítulos del libro como parte de esa elucidación. Tal descripción nos revela que, en efecto, existen una serie de preguntas comunes y un tipo estándar de técnicas y conceptos usados repetidamente para atacar dichas preguntas en la discusión de los diversos dominios. Esta serie de preguntas consideradas como importantes y el tipo de conceptos, argumentos y respuestas considerados como legítimos y relevantes es precisamente lo que constituye la *imagen estructural del álgebra*, la cual será descrita a continuación brevemente.

Ya los capítulos introductorios del libro nos permiten notar la diferencia entre la nueva y la anterior imagen del álgebra. Los números naturales son definidos a través de un breve sumario de los axiomas de Peano. La extensión de aquéllos a los enteros por medio de la construcción de pares ordenados de naturales se menciona breve e informalmente. Pero los racionales y los reales no son siquiera mencionados, ya que ellos serán definidos posteriormente, como casos particulares de ciertos dominios algebraicos. Recordemos que la primera y más básica tarea de Weber, y del mismo Fricke más de treinta años antes, había sido una detallada discusión de las propiedades de esos dos sistemas de números, para luego poder basar en esas propiedades el álgebra en su totalidad. Van der Waerden, por el contrario, no considera ya el estudio de esos dos sistemas como fuente de información fundamental, sino como una tarea más de su libro. Más aún, de esos sistemas sólo se considerarán ciertos aspectos, es decir, sus propiedades *algebraicas*. Así, el concepto de cuerpo cociente de un dominio de integridad es analizado en el capítulo III, y los números racionales se estudian entonces como un caso particular de aquéllos. Propiedades tales como la continuidad o la densidad, a las cuales Weber había dedicado secciones de su introducción, son absolutamente ignoradas aquí.

Los reales, por su parte, merecen un tratamiento más elaborado y son introducidos por van der Waerden como un ejemplo de un *cuerpo ordenado*. Es interesante notar, sin embargo, que van der Waerden vaciló en este punto y mostró cierto apego a la vieja imagen del álgebra, cuando no se limitó a la susodicha definición puramente algebraica de los reales y agregó, para mayor seguridad, la definición analítica, usual en los anteriores libros de álgebra, por medio de sucesiones de Cauchy, o *sucesiones fundamentales*. Así, es éste el único lugar del libro donde se recurre a argumentos del tipo $\varepsilon$ - $\delta$, pero no se incluye, como en el libro de Weber, discusión alguna sobre interpolaciones, aproximaciones u otras técnicas de este tipo. Los pocos argumentos y definiciones analíticas que van der Waerden incluye en su libro no se utilizan, ni son citados en ninguna otra parte de él. Y en efecto, el mismo autor menciona lo ajeno que es este tipo de argumentos a su libro, pero justifica su inclusión en la mencionada sección, añadiendo que con ello no se altera el carácter puramente algebraico del texto, por no ser esos conceptos usados posteriormente. La definición analítica es usada con intenciones heurísticas y didácticas, y no por necesidad lógica.

La búsqueda de raíces reales y complejas de una ecuación polinómica -la tarea central del álgebra hasta entonces- fue relegada por primera vez en el libro de van der Waerden a un plano ancilario. Sólo en tres breves secciones del capítulo dedicada a la teoría de Galois se discute aquel tópico, como una aplicación de ésta, siendo innecesario para tal efecto conocer alguno de los sistemas de números a fondo.

La misma posibilidad de concentrarse en aspectos determinados de los sistemas de números, ignorando aquellos que son irrelevantes a la investigación algebraica propiamente dicha, es una de las características centrales del enfoque estructural del álgebra, y constituye una de las grandes innovaciones del texto aquí considerado. Es obvio, como se ha subrayado insistentemente, que esta posibilidad proviene del uso de conceptos abstractamente formulados. Sin embargo, la mera disponibilidad de la técnica de definición abstracta no hubiera bastado para producir el cambio de imágenes que implicó el paso del texto de Weber al de van der Waerden. Ya hemos visto que Weber conocía perfectamente la técnica de la definición abstracta de conceptos algebraicos, y no obstante la concepción del álgebra reinante en el siglo XIX persistió en su texto, y por tanto su presentación es totalmente dependiente del sistema de los reales considerados con *todas* sus propiedades. Es indispensable, por tanto, considerar otros aspectos constitutivos de la imagen estructural de van der Waerden, que dieron significado matemático definitivo al uso de conceptos abstractos.

Podemos discernir una serie de conceptos que desempeñan un papel central en el estudio de todos los dominios considerados en *Moderne Algebra*. Los más destacados de ellos son: isomorfismos y homomorfismos, subdominio y estructura cociente, series de composición y productos directos. Por otro lado, es notable que el autor no define en ningún lugar de su libro una noción general de *estructura*, lo cual implica que los anteriores conceptos no pueden ser definidos en general, para ser usados posteriormente en sus aplicaciones particulares. Por lo tanto, cada vez que esto es necesario, los conceptos son definidos y aplicados en el dominio estudiado. Asimismo, si algún resultado aparece similarmente en diferentes dominios, es enunciado y demostrado por separado.

Junto con los conceptos comunes a todos los dominios, aparecen también problemas comunes a ellos. Por ejemplo, la factorización y sus propiedades constituyen un fenómeno central en la discusión estructural. En cada dominio se ubica un tipo destacado de subdominio que desempeña, respecto al dominio discutido, un papel similar al que los números primos desempeñan respecto al anillo de los enteros. La elucidación de la estructura de un dominio incluye en la mayoría de los casos la identificación de tales subdominios y el estudio de la relación entre ellos y un dominio dado. Tal es el caso de los grupos simples, para la teoría de grupos; los cuerpos primos, en la teoría de cuerpos (y en este aspecto es obvia la influencia de Steinitz); los ideales primos, en la teoría de anillos; los polinomios irreducibles, para anillos de polinomios; y así sucesivamente. El capítulo XII, por ejemplo, sobre la teoría de anillos conmutativos, está dedicado en su totalidad a este problema, y abre con la siguiente declaración:

"En este capítulo investigaremos las propiedades de divisibilidad de los ideales en anillos conmutativos y determinaremos en qué grado las leyes simples que son válidas en el dominio de los enteros pueden ser trasladadas a anillos más generales".

[Wir wollen in diesem Kapitel die Teilbarkeitseigenshaften der Ideale kommutativer Ringe untersuchen und zusehen, inwieweit die einfachen Gesetze, die etwa im Bereich der ganzen Zahlen gelten, sich auf allgemeinere Ringe übertragen lassen] (Vol. 2, p. 18).

Otra clase común de problemas que se discuten separadamente en los diferentes dominios concierne a aquellas propiedades de un dominio dado que son heredadas al pasar a sus subdominios, al dominio cociente, o más generalmente, a un nuevo dominio construido en base al dominio dado. Ya se ha visto como Steinitz propuso estudiar las propiedades de los cuerpos primos para luego averiguar como éstas pasan a las sucesivas extensiones. Lo mismo hace van der Waerden, pero de una manera más general, para otros dominios. Por ejemplo, se demuestra que el anillo de polinomios de un dominio de integridad es también un dominio de integridad, y que si un anillo satisface la condición de la base (es decir, que todos sus ideales son finitamente generados), entonces sus anillos cocientes, así como su anillo de polinomios, satisfacen la misma propiedad.

Podríamos seguir ampliando de esta manera el inventario no formal de los problemas, conceptos y técnicas que guían el libro de van der Waerden, y que determinan la imagen del álgebra imperante en él. Sin embargo, nuestro planteamiento general debe ya estar claro. La innovación de *Moderne Algebra* se manifiesta al considerar la interacción de los elementos anteriormente mencionados. Ninguno de ellos hubiera bastado de por sí para determinar un cambio definitivo de la concepción misma del álgebra como disciplina matemática. La mayor parte de dichos elementos había ya aparecido, en una forma u otra, en diferentes trabajos que antecedieron a *Moderne Algebra*, pero sólo en la interacción que se produce aquí, sus verdaderas proyecciones se manifiestan claramente. El ejemplo más tajante de esto lo ofrece el método axiomático abstracto, que hizo su aparición en el álgebra mucho antes de 1930, pero que sólo a partir de *Moderne Algebra* fue adoptado definitivamente como lenguaje unificador válido para el tratamiento de todos los dominios algebraicos.

En las páginas anteriores se ha presentado un análisis tendente a explicar la esencia del álgebra estructural en términos de imágenes del conocimiento matemático. Al considerar libros de texto representativos de la época anterior al surgimiento del álgebra estructural, y compararlos con el libro de texto estructural clásico, hemos visto como esta forma específica de hacer matemática se caracteriza por una serie de factores interactuantes, y no solamente por la adopción indiscriminada del método axiomático moderno. Este análisis permite interpretar la historia del álgebra en el siglo XIX de una manera que nos parece más fiel a la realidad, es decir, sin presuponer que todos los esfuerzos de la disciplina tendían a la creación del concepto de estructura matemática que vendría a imperar en la práctica matemática desde la aparición de *Moderne Algebra*.

Numerosos trabajos en historia de la matemática han contribuido en las últimas décadas a esclarecer la cronología de las diferentes contribuciones al cuerpo de conocimiento constitutivo de la nueva álgebra. Siguiendo la perspectiva aquí ofrecida, parecería ahora necesario describir el desarrollo de las imágenes del conocimento que desembocó en el *enfoque estructural*, para explicar así de qué manera dichas imágenes permitieron la organización del recién creado cuerpo de conocimiento, dando lugar a la nueva concepción del álgebra.

## NOTAS

1 Los malos entendidos más comunes a este respecto atañen a las contribuciones del grupo Bourbaki y, en particular, a su teoría de *estructuras*. Este tópico es discutido en detalle en Corry 1991.

2 Edwards 1980 contiene un interesante recuento histórico de los trabajos de Dedekind y Kronecker en ese área, y constituye un buen ejemplo del tipo de interpretación histórica en el que se recurre mínimamente al uso de conceptos del álgebra moderna desarrollados con posterioridad.

3 Véanse Corry 1990a, 1991.

4 El proceso de desarrollo histórico de las matemáticas basado en este modelo se discute en detalle en Corry 1990.

5 La influencia del *Lehrbuch* es discutida en Mehrtens 1979, 145; Novy 1973, 228; Wussing 1984, 251.

6 Kiernan 1971 contiene una excelente descripción del desarrollo de la teoría de Galois en el siglo XIX. Sobre el papel del artículo de Weber en dicho desarrollo, véase pp. 135 y ss.

7 Para una exposición histórica del desarrollo separado de estos dos conceptos y de su posterior unificación, véase Wussing 1984, especialmente pp. 230-251.

8 Nos referimos aquí a Fricke 1924, que será discutido más adelante.

9 Nos referimos aquí a Dedekind 1872, 1888.

10 Véase Wussing 1984, 212-13.

11 Véase al respecto Kiernan 1971, 138 o Wussing 1984, 251.

12 Véase Bourbaki 1969, 109; Mehrtens 1979, 145; Purkert 1971, 20; van der Waerden 1966, 162.

13 Las citas están tomadas de la reedición de 1930.

14 Nos referimos aquí a Fraenkel 1914, 1916, 1921. El inicio del estudio de los anillos abstractos se ha atribuido en ocasiones a otros autores (Kummer, Dedekind, Hilbert, etc...), pero tal atribución es aceptable sólo si se leen retrospectivamente las ideas modernas en las obras de dichos matemáticos. La discusión de este punto quedará para una oportunidad futura.

15 Una comparación de todos estos textos nos llevaría demasiado lejos, y sólo será abordada en un futuro trabajo. Baste tal vez para comprender como las viejas imágenes del álgebra persistían en ellos, con citar brevemente de la introducción del libro de Hasse, tal y como aparece en la traducción inglesa de la tercera edición de 1951: *Algebra [has come] to be understood generally as the theory of solving equations (in this interpretation, only those equations are included which are formed by means of the four so-called elementary operations alone) with a numer of unknown quantities. These two volumes are dedicated to this problem.* (Hasse 1927 [1954], 9).

## BIBLIOGRAFIA

BOURBAKI, N. (1969) *Eléments d'Histoire des Mathèmatiques*. Paris, Hermann. Segunda edición corregida, revisada y aumentada.

CAYLEY, A. (1851) "On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation $\Theta^n=1$ . *Philosophical Magazine*, *7*, 123-130..

CORRY, L. (1990) "Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge". *Science in Context*, *3*, 280-409.

(1990a) "Reflexive Thinking in Mathematics - Formal and Non-formal Aspects". In: A. Diez, J. Echeverría y A. Ibarra, *Structures in Mathematical Theories*. San Sebastián, Servicio Editorial del País Vasco, 343-348.

(1991) "Nicolas Bourbaki and the Concept of Structure in Mathematics". En preparación.

DEDEKIND, R. (1930-32) (Werke) *Gesammelte mathematische Werke*. Ed. por R. Fricke, E. Noether y O. Ore, Braunschweig 1930-1932, 3 Vols.

(1872) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig. Reimpreso en (Werke) III, 315-334.

(1888) *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig. Reimpreso en (Werke) III, 335-391.

DEDEKIND, R. & WEBER, H. (1882) "Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen". *Journal re. ang. Math.*, *92*, 181-290. Reimpreso en Dedeking (Werke), I, 238-350.

EDWARDS, H.M. (1980) "The Genesis of Ideal Theory". *Arch. Hist. Ex. Sci.*, *23*, 321-378.

FRAENKEL, A. (1914) "Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen". *Journal re. ang. Math.*, *145*, 139-176.

(1916) *Über gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen*. Leipzig, Teubner.

(1921) "Über einfache Erweiterungen zerlegbare Ringe". *J.f. Math.*, *151*, 121-166.

FRICKE, R. (1924) *Lehrbuch der Algebra, verfasst mit Benutzung vom Heinrich Webers gleichnamigem Buche*. Braunschweig, Vieweg.

HASSE, H. (1927) *Höhere Algebra*. Leipzig. Traducción al inglés de la tercera edición alemana (1951) por Theodor Benac (1954). New York, Frederic Ungar.

HAUPT, O. (1929) *Einführung in die Algebra*. Leipzig.

KIERNAN, B.M. (1971) "The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin". *Arch. Hist. Ex. Sci.*, *8*, 40-154.

MEHRTENS, H. (1979) *Die Entstehung der Verbandstheorie*. Hildesheim.

NOVY, L. (1973) *Origins of Modren Algebra*. Leyden, Noordhof International Publications. Traducción inglesa de J. Taver.

PURKERT, W. (1971) "Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs". *Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaft, Technik, und Medizin, 10*, (1) 23-27, (2) 8-20.

STEINITZ, E. (1910) "Algebraische Theorie der Körper". *Journal re. ang. Math.*, *137*, 167-309. Nueva ed. de H. Hasse y R. Baer (1930) Berlin/Leipzign.

WAERDEN, B.L. Van Der (1930) *Moderne Algebra*. Berlin, Springer,. 2 vols.

(1966) "Die Algebra seit Galois". *Jahresbericht d. DMV*, *68*, 155-165.

(1985) *A History of Algebra. From al-Kharizmi to Emmy Noether*. Berlin/New York, Springer Verlag.

WEBER, H. (1983) "Die allgemeinen Gundlagen der Galis'schen Cleichungstheorie". *Math. Ann.*, *43*, 521-549.

(1895) *Lehrbuch der Algebra*. Vol. 1, Braunschweig, Vieweg. (2d. ed. 1898); Vol. 2, 1986 (2d. ed. 1899), Vol. 3, 1908.

WUSSING, H. (1984) *The Genesis of the Abstract Group Concept. A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Cambridge, Mass. MIT Press. Traducción al inglés por Abe Shenitzer de *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs*, Berlin (1969).