

# LES DEFINITIONS DU LIVRE V D'EUCLIDE DANS LA COLLECTION HERONIENNE ET DANS LES *INSTITUTIONES* DE CASSIODORE

GERMAINE AUJAC

Professeur émérite à l'Université de Toulouse-Le Mirail

## RÉSUMÉ

Dans les *Eléments* d'Euclide, les dernières définitions du livre V se présentent de façon bizarre. La définition 17 (in Heiberg), du *di isou logos*, se compose de deux énoncés donnés comme équivalents mais qui ne le sont pas; la définition suivante, de la proportion (*analogia*) réglée, absente de certains manuscrits, (dont le préthéonien P), est refetée par Heiberg; la définition de la proportion dérégulée (18 chez Heiberg) est anormalement développée.

L'examen de la tradition indirecte (Héron et Cassiodore) fournit des arguments en faveur de la thèse, suggérée par la logique interne du texte, que, à l'origine, la définition 17 d'Euclide comprenait seulement le second énoncé, et qu'elle était suivie de deux définitions, comparables par leur brièveté, de la proportion réglée

## ABSTRACT

In Euclid's *Elements* V, the last definitions seem rather strange. Definition 17 (in Heiberg), of *di isou logos*, consists of two statements presented as (but which are not) equivalent; the following definition, of the ordered proportion (*analogia*), lacking in some manuscripts (in particular in the pretheonian P), is rejected by Heiberg; the definition of the perturbed proportion (18 in Heiberg) is unusually developed.

Investigating into the indirect tradition (Heron and Cassiodorus), one finds arguments to confort the thesis, based on internal logic of the text itself, that Euclid's original definition 17 was the second statement only, followed by two definitions, of the ordered and of the perturbed proportion, expressed with the same brevity. Which means that

*et de la proportion dérégulée. La conclusion, c'est qu'il faut amputer l'actuelle définition 17 de sa première partie, rétablir la définition de la proportion réglée à sa place normale et débarrasser celle de la proportion dérégulée des additions qui l'encombrent.*

*the actual definition 17 should be deprived of its first part, the definition of the ordered proportion restored at its normal place, and definition 18 greatly shortened.*

Palabras clave: Histoire des Mathématiques, Euclide, Proportion, Héron, Cassiodore, Tradition indirecte.

La définition 17 du livre V se présente, dans tous les manuscrits grecs des *Éléments* d'Euclide<sup>1</sup> sous une double forme, dont l'une, la seconde, se situe dans le droit fil des cinq définitions précédentes, tandis que l'autre reproduit, dans un libellé différent, le théorème 22, démontré par Euclide au cours de ce même livre V. Il vient donc immédiatement à l'esprit que le texte original ne comportait que la seconde version de la définition, la première s'étant glissée à cette place par l'inadvertance d'un copiste qui a inséré dans le texte ce qui était peut-être simple note marginale. L'unanimité des manuscrits sur ce point suggère en tout cas que cette insertion s'est faite à date très ancienne et, chose plus curieuse, a été adoptée sans discussion par tous les copistes et éditeurs successifs. Comment expliquer la persistance au cours des siècles de ces deux définitions présentées comme équivalentes alors qu'elles sont loin de l'être? Le mieux est de consulter là dessus les quelques témoins anciens du texte d'Euclide dont nous disposons, entre autres les définitions rassemblées dans la collection héronienne<sup>2</sup>, et celles traduites vraisemblablement par Boèce qui sont ajoutées au chapitre des *Institutiones* II de Cassiodore<sup>3</sup> consacré à la géométrie.

La définition 17 constitue une sorte de charnière entre cinq définitions décrivant un "rapport" (λόγος) obtenu par une opération effectuée sur un rapport donné, et une (ou deux) définitions se rapportant à des types de "proportion" (ἀναλογία). Pour plus de clarté, nous examinerons chacun de ces groupes de définitions dans les diverses traditions manuscrites avant d'aborder l'étude de la définition 17, celle du (διείσου λόγος) ou rapport "transégal"<sup>4</sup>.

## 1. Les définitions 12 à 16 (H)

Dans le texte édité par Heiberg et conforme à tous les manuscrits, les définitions 12 à 16 se présentent sous un schéma uniforme:

" Un rapport... (...λόγος) est quand on prend... (ἐστὶ λήψισ...)"; ou  
 "Une... de rapport (... λόγος) est quand on prend... (ἐστὶ λήψισ...)"

Euclide définit ainsi successivement:

- un rapport alterne (def. 12), "quand on prend l'antécédent par rapport à l'antécédent et (ou) le conséquent par rapport au conséquent";

- un rapport inverse (def. 13) "quand on prend le conséquent comme antécédent par rapport à l'antécédent pris comme conséquent";

- une composition de rapport (def. 14) "quand on prend l'antécédent plus le conséquent comme un seul terme par rapport au seul conséquent";

- une division de rapport (def. 15) "quand on prend l'excédent de l'antécédent sur le conséquent par rapport au seul conséquent";

- une reversion<sup>5</sup> de rapport (def. 16) "quand on prend l'antécédent par rapport à l'excédent de l'antécédent sur le conséquent".

Dans cette série, on constate une anomalie, qui fait difficulté. Tandis que les définitions 13 à 16 définissent un rapport nouveau à partir d'un rapport donné, la définition 12 exige au départ la présence de deux rapports, entre lesquels se fait l'échange d'un antécédent et d'un conséquent.

### 1.1. Les définitions 12 à 16 dans la collection héronienne

Est-ce cette difficulté qui a incité l'auteur de la collection héronienne (ou celui du manuscrit sur lequel elle a été copiée) à rejeter la définition du rapport alterne en cinquième position, après la définition 16? C'est fort possible. Il est à noter en effet que, dans la collection héronienne, les définitions ci dessus sont précédées d'une introduction où il est indiqué: "On appelle rapport la position relative de deux objets homogènes; dans le cas particulier des grandeurs, on dira qu'un rapport est une certaine position de deux grandeurs homogènes au regard de la quantité; de même, la similitude de tels rapports constitue une proportion". Il était sans doute difficile, après avoir défini le

rapport comme la relation entre deux grandeurs, d'en présenter un qui, pour exister, nécessitait la présence d'au moins quatre termes au départ.

L'addition de ce petit texte introductif, le déplacement de la définition 12 ne sont pas les seules infidélités au texte d'Euclide tel que nous le connaissons. D'abord, dans les deux définitions consacrées au rapport alterne et au rapport inverse, l'auteur de la collection héronienne (ou le manuscrit qui en a été la base) supprime  $\lambda\eta\psi\iota\sigma$  ("quand on prend..."). Et donc le rapport inverse est simplement "celui du conséquent à l'antécédent"; le rapport alterne, "celui de l'antécédent à l'antécédent et du conséquent au conséquent".

Puis les trois termes à définir qui, dans le texte grec d'Euclide, indiquent l'opération à effectuer (def. 14 à 16), désignent ici seulement le nouveau rapport, une fois l'opération effectuée. Les définitions sont en effet libellées ainsi:

- "un rapport après composition<sup>6</sup> est quand on prend l'antécédent plus le conséquent par rapport au seul conséquent" (= def. 14);

- "un rapport après division est quand on prend l'excédent de l'antécédent sur le conséquent par rapport au conséquent" (= def. 15);

- "un rapport après réversion est quand on prend l'antécédent par rapport à l'excédent de l'antécédent sur le conséquent" (= def. 16).

Le vocabulaire nouveau employé dans la collection héronienne (participe aoriste au datif) n'est pas habituel dans les démonstrations d'Euclide, où il est seulement question de grandeurs "composées" ou "divisées". A la fin de la proposition 19 pourtant, mais dans un commentaire jugé interpolé, et dans le porisme qui le suit, est employée à deux reprises la formule  $\alpha\nu\alpha\sigma\tau\rho\epsilon\psi\alpha\nu\tau\iota$  qui en fait semble hors de propos aussi bien dans le commentaire rejeté par Heiberg que dans le porisme qu'il conserve. L'analogie avec le libellé héronien serait à mon avis un argument supplémentaire pour considérer tout ce passage, y compris le porisme, comme apocryphe.

## 1.2. Les définitions 12 à 16 chez Cassiodore

La traduction que Boèce fait de ces mêmes définitions réserve d'autres surprises. Tout d'abord le terme de "rapport" n'y apparaît plus. En second lieu, et c'est le plus important, à la définition se substitue plus ou moins clairement un théorème. Enfin la traduction (ou ce qui en tient lieu) de la définition 12 vient après celle de la définition 13.

Voici à peu près, pour les définitions 12 à 16, le libellé de Boèce:

- "Prendre en inversant, c'est que le conséquent est à l'antécédent comme l'antécédent est au conséquent" (cf. def. 13).

- "Prendre en alternant, c'est, comme l'antécédent est à l'antécédent, le conséquent l'est au conséquent" (cf. def. 12).

- "Prendre en composant, c'est, comme l'antécédent plus le conséquent pris comme un seul terme est au seul conséquent" (cf. def. 14).

- "Prendre en divisant, c'est, comme l'excédent de l'antécédent sur le conséquent est au seul conséquent, l'excédent de l'antécédent sur le conséquent l'est au seul conséquent" (cf. def. 15).

- "Prendre en reversant, c'est, comme l'antécédent est à l'excédent de l'antécédent sur le conséquent, l'antécédent l'est à l'excédent de l'antécédent sur le conséquent" (cf. def. 16).

On voit la distance qui sépare les définitions d'Euclide de leur traduction par Boèce. En effet, au lieu de donner la définition d'un rapport nouveau obtenu par une opération effectuée sur un rapport donné, ou bien la définition d'une opération à effectuer, Boèce, qui sous-entend toujours l'existence au départ de deux rapports égaux, indique que l'égalité persiste entre les nouveaux rapports obtenus par l'opération demandée. C'est ainsi que; pour lui, faire une inversion, c'est renverser les termes de deux rapports égaux (à condition bien sûr de corriger<sup>7</sup> avec Mynors le texte des manuscrits) et obtenir une nouvelle égalité de rapports. En d'autres termes, si  $A : B = C : D$ , "prendre en inversant", c'est  $B : A = D : C$ . C'est ce qu'Euclide exprimait, après démonstration, dans le porisme de la proposition 7, mais cela n'était nullement inclus dans la définition 13.

L'exemple le plus frappant, parce que le moins équivoque, est la soi-disant définition du rapport alterne; ce que dit Boèce<sup>8</sup> fait l'objet chez Euclide du théorème 16 qui si énonce ainsi: "Si quatre grandeurs sont en proportion, alternes aussi elles seront en proportion".

La traduction de la définition 14 (composition de rapport) semblerait échapper à la critique dans la mesure où, telle qu'elle se présente, elle ne fait pas explicitement allusion à une égalité; mais le *ut* qui suit le verbe être ne peut s'interpréter que comme le corrélatif qui annonce le second terme de la comparaison, probablement omise par le copiste par saut (classique) du même au même. Les deux définitions suivantes confirment clairement que Boèce (ou

le manuscrit d'Euclide dont il se servait) avait partout substitué à la définition d'Euclide un énoncé reproduisant la teneur un théorème (V, 17 pour la définition 15; porisme, contestable, de V, 18 pour la définition 16).

Ainsi la traduction de Boèce montre qu'à date assez ancienne, les définitions d'Euclide avaient été supplantées par des formules plus complexes intégrant le contenu de théorèmes démontrés au cours du livre V. C'est d'ailleurs ce que confirment certaines traductions arabes, ou plutôt certaines traductions latines issues de l'arabe. Les traductions d'Hermann et d'Adelard<sup>9</sup> dérivent de cette version contaminée, où le théorème a remplacé la définition; la traduction annexée au commentaire d'Anaritius<sup>10</sup> en revanche, comme celle de Gérard de Crémone, conserve aux définitions leur forme primitive (mais Anaritius commente la définition en faisant appel au théorème dans lequel elle est utilisée).

## 2. La définition 18 (H)

Si nous laissons de côté provisoirement la définition 17, dont le texte grec fait problème, il reste à examiner une, ou deux, définitions qui concernent la proportion  $\tau\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$ . La proportion avait été définie par Euclide (?) comme une "identité de rapports" ou une "similitude de rapports", définitions proposées par certains manuscrits<sup>11</sup>, omises par d'autres, et rejetées par Heiberg. Euclide avait en tout cas précisé qu'une proportion exigeait au moins trois termes (def. 8), la norme étant probablement de quatre.

Or, à la fin de la série des définitions, certains manuscrits<sup>12</sup> décrivent successivement la proportion réglée, puis la proportion dérégulée, tandis que d'autres (dont P, le manuscrit préthéonien que Heiberg choisit de suivre) s'en tiennent à la seule définition de la proportion dérégulée.

Voici ces deux définitions:

- "Il y a proportion réglée ( $\tau\epsilon\tau\alpha\gamma\mu\epsilon\nu\eta\ \tau\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$ ) quand il se fait que, comme un antécédent est à un conséquent, un antécédent l'est à un conséquent, et, comme un conséquent est à une autre grandeur, un conséquent l'est à une autre grandeur". Ce que l'on peut schématiser ainsi: soient A, B, C et A', B', C'; il y a proportion réglée entre ces grandeurs si  $A : B = A' : B'$  et  $B : C = B' : C'$ .

- "Il y a proportion dérégulée ( $\tau\epsilon\tau\alpha\rho\alpha\gamma\mu\epsilon\nu\eta\ \tau\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$ ) quand, étant donné trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre à celles-là, il arrive que, comme dans la première série un antécédent est à un conséquent,

dans la deuxième série un antécédent l'est à un conséquent, et, comme dans la première série un conséquent est à une autre grandeur, dans la deuxième série une autre grandeur l'est à un antécédent". En d'autres termes, étant donné A, B, C, et A', B', C' il y a proportion déréglée si  $A : B = B' : C'$  et  $B : C = A' : B'$ .

On constate une différence assez sensible dans le libellé de ces deux définitions: la première est brève et elliptique, la seconde beaucoup plus élaborée et précise, ce qui suggère qu'il a pu y avoir, quelque part, réfection. Les deux définitions se trouvent côte à côte dans certains manuscrits dits théoniens; la dernière seule figure dans le texte, dans le manuscrit préthéonien P et dans d'autres manuscrits théoniens (généralement alors, la définition de la proportion réglée est ajoutée en marge<sup>13</sup> par une main tardive).

### 2.1. Collection héronienne

Dans la collection héronienne, il n'existe aucune des deux définitions concernant la proportion ( $\alpha\lambda\omicron\gamma\acute{\iota}\alpha$ ); mais la définition 17, qui est largement corrompue et pratiquement incompréhensible dans le libellé livré par les manuscrits, rapporte bizarrement à la proportion réglée, nommément citée, le rapport "transégal". D'où l'on peut au moins conclure que, dans quelques manuscrits d'Euclide, un certain désordre s'était introduit à date assez ancienne dans les dernières définitions du livre V.

### 2.2. La traduction de Boèce

La traduction de Boèce confirme cette opinion. On y trouve en effet la seule définition de la proportion déréglée, *confusa proportionalitas*, mais placée avant la définition du rapport "transégal". La définition de la proportion déréglée qui, chez Boèce, est pour le contenu général conforme au texte grec, en diffère parce qu'elle ne contient pas la précision préalable "étant donné trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre à celles-là", ni les indications "dans la première série..., dans la deuxième série...". Plus courte que la définition des manuscrits grecs, elle ressemble dans son énoncé à celle de la proportion réglée.

Voici en effet la traduction de ce qu'on peut lire dans les manuscrits latins<sup>14</sup> de Cassiodore qui comportent cet appendice: "Il y a proportion déréglée quand il arrive que, comme l'antécédent est à un conséquent, un conséquent l'est à un antécédent, et come un conséquent est à une autre grandeur, une autre grandeur l'est à un antécédent". Il est bien évident qu'une erreur s'est glissée ici dans le texte des manuscrits et qu'il faut restituer: "comme un antécédent est à un conséquent, un antécédent l'est à un

conséquent" (ce que ne fait pas Mynors, à tort me semble-t-il); on a alors une définition de même type que celle de la proportion réglée évoquée ci-dessus.

### 3. La définition 17

Venons-en maintenant à la définition 17, la plus sûrement litigieuse. En voici à peu près la traduction (je traduis ici δι' ἴσου λόγος par "rapport transégal" pour conserver au terme son ambiguïté<sup>15</sup> et parlerai aussi de "transégalité"): "Il y a rapport transégal, étant donné plusieurs grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre qui, prises deux par deux, sont dans le même rapport, quand dans la première série le premier terme est au dernier comme dans la deuxième série le premier terme est au dernier; au autrement: quand on prend les extrêmes par suppression des moyens".

On s'aperçoit aisément que ces deux formules ne sont pas le moins du monde équivalentes. La seconde, plus courte, est calquée sur les définitions précédentes; elle indique que, dans une série de grandeurs, A, B, C, D, le rapport transégal est celui qui établit la relation entre le premier terme et le dernier (ici, c'est  $A : D$ ); mais de même que le rapport *alterne* (ἑναλλάξ) nécessitait la présence de deux rapports comme point de départ, de même le rapport transégal (pour que le terme "égal" ait un sens) exige la présence de deux séries de grandeurs, A, B, C, D, et A', B', C', D', les rapports transégaux, par suppression d'un nombre *égal* de termes, étant alors  $A : D$  et  $A' : D'$ .

La première définition, très développée, contient d'abord une formule analogue à celle par laquelle débute la définition 18 ("étant donné..."); mais alors que, dans celle-ci, il n'était question que de trois grandeurs (comme dans le théorème V, 23), il est précisé dans la définition 17 que l'on peut avoir affaire à un "plus grand nombre" de grandeurs; le comparatif employé en grec surprend un peu à cette place, où il semble renvoyer le lecteur à une expression qui n'intervient que plus tard; tout se passe en effet comme si c'était par comparaison avec la définition 18 qu'avait été rédigée la définition 17, première manière. Quant à l'expression qui suit immédiatement: "qui prises deux par deux sont dans le même rapport", elle est utilisée systématiquement par Euclide dans l'énoncé des propositions 20, 21, 22, 23 où se trouvent indiquées, puis démontrées, les propriétés de la transégalité dans les cas de proportions réglées ou dérégées. La fin de cette définition première manière exprime sous une autre forme, plus claire, mais avec un vocabulaire insolite<sup>16</sup>, ce qu'Euclide démontre en V, 22 dans le cas de la proportion réglée, où en V, 23 dans le cas de la proportion dérégée; les deux fois dans ces propositions, Euclide se contente de dire: "Par transégalité aussi, elles (= les grandeurs) seront dans le même rapport".

### 3.1. La définition 17 dans la collection héronienne

Dans la collection héronienne, la définition 17 est très corrompue<sup>17</sup>, mais on peut tout de même faire quelques remarques sur le libellé que proposent les manuscrits. D'abord la définition du rapport transégal y est limitée au cas de la proportion réglée. La formule est en effet: "il y a rapport transégal de la proportion réglée quand...". Ensuite, les termes utilisés dans cet ersatz de définition font partie du vocabulaire généralement employé jusque là par Euclide (antécédent..., conséquent...), et le libellé lui-même, pour tronqué qu'il soit, présente de fortes analogies avec la définition de la proportion réglée. Quant à l'expression finale, "c'est-à-dire quand on a enlevé les termes intermédiaires alternes", elle rappelle la définition 17 (deuxième manière) des manuscrits grecs, mais sans qu'en soit reproduit complètement l'énoncé; le sens est pourtant à peu près le même, mise à part la présence de  $\epsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi$  ("alternes"), qui semble une intrusion étrangère.

### 3.2. La définition 17 chez Boèce

La traduction de Boèce en revanche est limpide. Ne trouvant probablement dans le manuscrit qu'il utilisait que la seconde définition, Boèce traduit, à peu près littéralement: "Ex aequo est sumptio extremorum mediis intermissis". Sans doute manque-t-il, pour que la traduction soit parfaitement exacte, le terme de "rapport", *logos* (que Boèce avait déjà omis dans les définitions précédentes); il n'en reste pas moins que Boèce, avec Euclide, affirme que: "Il y a rapport transégal (*ex aequo*) quand on prend les extrêmes par suppression (ou omission) des moyens". Tout conduit à penser que l'on a là l'écho du texte authentique d'Euclide, avant contamination.

## 4. Conclusion

Quelles conclusions tirer de ces analyses et de ces comparaisons?

La première, qui n'est d'ailleurs pas une découverte, c'est que le texte d'Euclide a été abondamment annoté, commenté, parfois refait, au cours des siècles, Théon n'étant pas seul en cause.

La deuxième, c'est que, dans le cas particulier des définitions 12 à 17, des lecteurs studieux, à date très ancienne, ont probablement noté en marge, en regard de chaque définition, le théorème dans lequel entrait le terme défini.

La troisième, c'est que le dit théorème (ou son contenu) a été juxtaposé à la définition, dont il semblait constituer une variante (cf. la définition 17 dans la tradition manuscrite grecque); ou bien même il a purement et simplement supplanté la définition (cf. les définitions 12 à 16 chez Boèce et dans certaines traductions arabes).

Il ressort de là que la tradition manuscrite grecque, fidèle au texte primitif dans les définitions 12 à 16, est fautive dans la définition 17 où elle doit être débarrassée de l'intrusion étrangère que représente la première alternative proposée, simple rappel du théorème V, 22. Boèce d'ailleurs nous fournit la preuve que cette définition, dans un de ses états primitifs, a été unique, et conforme à la deuxième partie du libellé actuel.

Que penser en revanche de la dernière définition? Était-elle, ou non, précédée de celle de la proportion réglée? La logique voudrait que oui. La définition de la proportion réglée est en effet nécessaire si, comme je le crois, on doit supprimer la première partie de la définition du rapport transégal, dans laquelle précisément, comme le suggère l'énoncé de la définition dans la collection héronienne, il est fait appel au théorème V, 22, concernant la proportion réglée. On pourrait objecter, et l'objection est légitime, que le terme même de "réglée" n'intervenant nulle part dans le livre V, alors que celui de "dérégulée" s'y trouve au moins deux fois, en V, 21 et V, 23, Euclide n'avait pas besoin de définir un terme dont il ne comptait pas se servir. Il est possible, bien sûr, que la définition de la proportion dérégulée ait seule figuré dans la liste des définitions du livre V, mais il semble plus naturel de penser que c'est la présence du "doublet" de la définition 17 qui a chassé la définition de la proportion réglée, de même que, comme chacun sait, la mauvaise monnaie chasse la bonne. Les deux types de proportion, réglée et dérégulée, sont en tout cas fréquemment utilisés et nommément cités par Aristarque de Samos, Archimède, Apollonios de Perge, qui tous pratiquent la transégalité<sup>18</sup>.

Si donc l'on admet qu'à l'origine la liste des définitions du livre V s'achevait par les deux définitions symétriques, de la proportion réglée et de la proportion dérégulée, sous quel libellé exact se présentaient ces définitions? La définition de la proportion réglée conservée par certains manuscrits grecs et par certaines traductions latines issues de l'arabe<sup>19</sup> est très elliptique, comme le sont d'ailleurs les autres définitions d'Euclide (et voilà pourquoi elles ont suscité tant de commentaires et tant de controverses). Héron de même, dans son amalgame sur la définition 17, conserve le souvenir d'une définition elliptique de la proportion réglée. Par contraste, la définition de la proportion dérégulée se présente dans la tradition manuscrite grecque sous une forme beaucoup plus élaborée, enrichie sans doute d'éléments étrangers, alors que Boèce, dans sa traduction, offre de cette définition une version elliptique, parfaitement

symétrique de, la proportion réglée, ce que font aussi d'ailleurs les traducteurs latins de l'arabe.

Il paraît donc probable qu'à l'origine la définition 17, dans sa forme brève, était suivie des deux définitions, brèves elles aussi, de la proportion réglée et de la proportion dérégulée. Pour la proportion réglée, cette forme s'est maintenue dans la tradition manuscrite, du moins dans celle qui conserve cette définition. Pour la proportion dérégulée, il semblerait normal de restituer l'énoncé, symétrique du précédent et elliptique comme lui, qu'ont préservé la traduction de Boèce et les traductions latines fondées sur l'arabe. Il suffit donc, pour retrouver le texte original, de supprimer les additions faites probablement par un annotateur bien intentionné pour essayer de clarifier les choses, soit

1) "étant donné trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre à celles-là", probablement emprunté à V, 21 ou V, 23;

2) "dans la première série..., dans la deuxième série..., dans la première série..., dans la deuxième série...", termes qu'Euclide n'emploie nulle part dans le livre V.

Il y a de grandes chances en effet pour que le texte d'Euclide (qu'il soit ou non l'écho du travail d'Eudoxe) se soit présenté à l'origine, pour les dernières définitions du livre V, sous la forme suivante:

-def. 17: Il y a rapport transégal quand on prend les extrêmes par suppression des moyens;

-def. 18: Il y a proportion réglée quand il se fait que, comme un antécédent est à un conséquent, un antécédent l'est à un conséquent, et comme un conséquent est à une autre grandeur, un conséquent l'est à une autre grandeur;

-def. 19 (= 18 H): Il y a proportion dérégulée quand il arrive que, comme un antécédent est à un conséquent, un antécédent l'est à un conséquent, et comme un conséquent est à une autre grandeur, une autre grandeur l'est à un antécédent.

On conçoit aisément qu'une présentation aussi brutale ait surpris le lecteur, averti ou non. Comme pour les définitions précédentes, il s'est donc reporté aux théorèmes où intervenaient les termes définis, et les a probablement transcrits en marge. D'où, assez vite, l'intrusion constatée pour la définition 17; s'appliquant à la proportion réglée qu'elle décrivait, elle rendait caduque la définition 18. Restait donc la définition 19 (=18 H) que l'on

a trouvé bon d'élargir un peu pour la rendre plus claire et plus compréhensible. Mais ce n'était pas le dessein d'Euclide de donner, dans ses définitions, tous les détails utiles; son but était la concision, une concision qui ne pouvait tromper que le profane auquel le traité d'Euclide n'était pas destiné. C'est sans nul doute le profane (ou le commentateur tardif qui bien souvent en était un) qui, voulant comprendre, a fait perdre au texte beaucoup de sa concision, et parfois même son sens originel.

## NOTES

1 Euclide, *Opera Omnia*, ed. Heiberg-Menge, Leipzig, 1883-1916 (réed. des *Elementa* par E. Stamatis, Leipzig, 1915). Euclide, *Les Elements*, trad. française par Peyrard, Paris, 1814-1818 (réed. J. Itard, Paris, 1966); Euclide, *Les Eléments*, texte grec et trad. française libre par G. Kayas, Paris, 1978. Le texte de base utilisé pour cet article est celui de l'édition Heiberg-Stamatis. Le nombre des définitions (et donc leur numéro d'ordre) varie suivant les options prises. On convient généralement que tous les manuscrits qui contiennent le texte des *Eléments*, même s'ils ne l'indiquent pas expressément, sont les héritiers directs de l'édition procurée au IV<sup>e</sup> siècle ap. J. C. par Théon d'Alexandrie, tous, sauf un, le *Vaticanus gr.* 190 (= P ) copié au X<sup>e</sup> siècle, qui remonterait à une tradition préthéonienne.

2 *Les Définitiones* de la collection héronienne ont été éditées, avec l'oeuvre conservée de Héron, par Heiberg (Leipzig, 1912), après l'avoir été par Hultsch (Berlin, 1864). On en peut trouver le texte dans le *Paris. Suppl. gr.* 387, du XIV<sup>e</sup> siècle. On pense que cette collection d'extraits d'auteurs variés a été en fait réunie au XI<sup>e</sup> siècle par un Byzantin érudit. Les définitions 12 à 17 d'Euclidé se trouvent sous le numéro 127 des définitions.

3 Cf. *Cassiodori senatoris Institutiones*, ed. R.R.B. Mynors, Oxford, 1937, repr. 1963. Seule une partie des manuscrits de Cassiodore contient l'appendice en question; et celui ci est considéré comme une addition tardive au texte de Cassiodore. On pense généralement que l'on a là un maigre reste de la traduction (perdue) que Boèce avait procurée des *Eléments* d'Euclide. Aussi, sans prendre autrement parti dans le débat, désignerai-je Boèce comme l'auteur de la traduction conservée dans cet appendice.

4 Je m'expliquerai plus loin sur cette traduction qui trahit mon embarras et n'a d'autre but, par l'emploi de ce néologisme, que d'attirer l'attention du lecteur sur la spécificité propre de cette relation. Cf. sur ce point: Problèmes de traduction dans le livre d'Euclide, *Sciences et techniques en perspective*, 10 (1985-1986), 1-9.

5 Le terme grec (ἀναστροφή) est difficile à traduire même si le sens en est éclairé par la définition. Peyrard et Kayas le rendent par "conversion", ce que j'avais fait moi-même dans un premier temps. Je préfère pourtant adopter ici une traduction plus "hermétique", à l'instar du terme grec.

6 Soit, en grec, συνθέντι λόγος; et plus loin διελόντι λόγος et βίναστρο έβαντι λόγος.

7 Les manuscrits portent en effet: "conversim sumere est sicut se habere consequens ad praecedens, sicuti est praecedens ad consequens", ce que Mynors corrige en "sicuti est consequens ad praecedens", comme il est légitime de le faire.

8 "Alternatim sumere est, ut se habet praecedens ad praecedens, sic se habet consequens ad consequens". L'énoncé de Boèce est très elliptique.

9 A propos des traductions latines issues de l'arabe, cf. M. Clagett (1963) *The medieval latin translations from the arabic of the Elements of Euclid, Isis*, 44, 13-42. Voir aussi, de H.L.L. Busard (1968) *The translation of the Elements of Euclid from the arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?)*, Leiden, et (1983) *The first latin translation of Euclid Elements commonly ascribed to Adelard of Bath*, Toronto. Bonne mise au point d'ensemble sur la transmission des *Eléments* par J.E. Murdoch, dans *Dictionary of Scientific Biography*, New-York, s.v. Euclid, p. 437-459.

10 L'édition en a été faite par M. Curtze (1899) *Anarithi in decem libros priores elementorum Euclidis Commentarii*, Leipzig, d'après le manuscrit de Cracovie n° 569. La traduction latine était due à Gérard de Crémone. Ce dernier a fait également une traduction des *Eléments*, indépendante de la précédente, et conservée notamment dans le ms de Boulogne-sur-mer n° 196 et dans le *Paris.lat.* 7216.

11 La première, conservée par Peyrard où elle porte le n°4, se trouve en effet après la déf. 3 d'Heiberg, notamment dans le *Bodleianus d'Orville* 301, le *Scorialensis* 224, le *Paris. gr.* 2466; mais elle est omise dans et dans le *Vindobonensis phil. gr.* 31, ainsi que dans la collection héronienne. La seconde, omise également par Peyrard, se trouve après la déf. 7 dans le *Laurentianus* 28.3, le *Paris. gr.* 2466 et le *Vindobonensis phil. gr.* 31.

12 Ce sont essentiellement le *Laurentianus* 28.3, le *Paris. gr.* 2466 et le *Vindobonensis phil. gr.* 31.

13 C'est le cas pour le *Bodleianus d'Orville* 301 et le *Scorialensis* 224, ainsi que pour *P.*

14 Cf. l'édition de Mynors déjà citée.

15 Le terme grec δι'ίσου, rarement employé en prose (cf. pourtant Platon, *Rep.* 617 b), l'est fréquemment en géométrie, où les théorèmes V, 22 et V, 23 d'Euclide sont souvent appliqués au cours des démonstrations.

16 Un exemple: l'emploi de "premier" et "dernier".

17 Voici le texte des manuscrits, tel qu'on peut le lire dans le *Paris. suppl. gr.* 387 et tel que l'édite Hultsch (en indiquant dans l'apparat que tout ce passage est corrompu: δι'ίσου λόγος ἐστὶ τεταγμένησ ἀναλογίασ ὅταν ἦ ὡσ ἡγούμενον πρὸσ ἐπόμενον, ἦ δὲ καὶ ὡσ ἐπόμενον πρὸσ ἄλλο τοῦ ἡγουμενου πρὸσ ἄλλο δέ τι τουτέστιν ὑπεξαίρεθεν τῶν μεταξὺ ἐναλλάξ ὄρων. Heiberg fait des restitutions qui ne semblent pas toujours opportunes.

18 Cf. le relevé des occurrences du terme *di isou* chez les géomètres grecs dans mon article: Le rapport *di isou* (*Euclide V*, définition 17): Définition, utilisation, transmission, *Historia Mathematica*, 13 (1986), 370-386.

19 Les traductions d'Hermann et d'Adelard ne comportent aucune des deux définitions des proportions; en revanche la traduction annexée au commentaire d'Anarithius et celle de Gérard de Crémone les présentent toutes les deux.