

ENSEÑANZA DEL NÚMERO  
RACIONAL POSITIVO EN  
EDUCACIÓN PRIMARIA: UN  
ESTUDIO DESDE EL MODELO  
COCIENTE

---

RAFAEL ESCOLANO VIZCARRA

*Universidad de Zaragoza*

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE  
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
Almería, Septiembre 2001



# ENSEÑANZA DEL NÚMERO RACIONAL POSITIVO EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO DESDE EL MODELO COCIENTE



RAFAEL ESCOLANO VIZCARRA\*

*Universidad de Zaragoza*

## RESUMEN

Presentamos una investigación en Didáctica de la Matemática en el ámbito de la innovación curricular en Educación Primaria, sobre un campo numérico concreto: el conjunto de los números racionales positivos. Nuestro trabajo, que está en fase de realización, se sitúa en el marco conceptual del Pensamiento Numérico y utiliza la metodología denominada Investigación-Acción. Contiene una propuesta curricular, basada en la utilización de modelos de aprendizaje, sobre los que los escolares de 4º y 5º curso de Educación Primaria significan y conectan los sistemas de representación fraccionario y decimal del número racional positivo.

## ABSTRACT

The research work on Didactics of Mathematics in the area of curricular innovation in Primary Education which we present is based on a concrete numerical field: the set of positive rational numbers. Our research work, which is still in its process of elaboration, can be integrated into the conceptual frame of Numerical Thought and uses Research. Action methodology. It presents a curricular project, based on the use of learning patterns, in which schoolchildren, in their fourth and fifth years of Primary Education, can understand and link the systems of fractionary and decimal representation of positive rational numbers.

## INTRODUCCIÓN

El concepto de número racional positivo presenta dificultades de aprendizaje. Los estudios sobre errores cometidos por los escolares, recogidos por Gairín (1999, pág 24) constatan una desconexión entre:

- a) los dos sistemas de representación simbólicos de los números racionales: la notación fraccionaria y la notación decimal.
- b) el conocimiento conceptual de los racionales y los procedimientos utilizados en la manipulación de símbolos, sobre todo con expresiones decimales.

\* Este trabajo está subvencionado por el proyecto UZ00-CIEN-02 de la Universidad de Zaragoza

c) los distintos significados del número racional.

Además, se constata que la enseñanza tradicional es altamente vulnerable a la crítica (Groff, 1996). La instrucción de los números racionales positivos, que se deriva del análisis de los textos escolares de las editoriales de mayor difusión de nuestro país, presenta características que nos parecen inadecuadas:

- a) Existencia de un único procedimiento para relacionar las notaciones fraccionaria y decimal: la ampliación de la división entera. No existe un modelo que conecte los dos sistemas de representación.
- b) Presencia de la fracción con el significado prioritario de parte-todo, mientras que otros significados como operador, medida, cociente o razón, se omiten o se presentan desconectados de los otros constructos.

En consecuencia, al priorizar el significado de la fracción como relación parte-todo se dificulta la plena comprensión del número racional, puesto que no hay representaciones de las ideas matemáticas que tengan carácter universal; cualquiera de ellas destaca algunos aspectos mientras que oscurece otros (Figueras, 1988).

De hecho este significado provoca la aparición de problemas como la pérdida del status de número de la fracción; sobrevaloración de la cardinalidad; dificultad de interpretación de las fracciones impropias, etc. Además, se facilita una traslación de significados ya consolidados para los números naturales que da lugar a concepciones no deseadas, tanto en las relaciones (cada número racional tiene un siguiente; dos números racionales están separados por una cantidad finita de números racionales; ...), como en las operaciones (la multiplicación produce un resultado mayor que cualquiera de los factores; no se puede dividir por un número más grande; ...).

## OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo principal del estudio es explorar las potencialidades y limitaciones de la propuesta de innovación curricular. Nuestra hipótesis de investigación es que la secuencia de enseñanza implementada favorece la comprensión de los números racionales positivos de los escolares de Educación Primaria que intervienen en la fase experimental.

Nuestra propuesta didáctica es original, ha sido elaborada explícitamente para este estudio y ha sido implementada por el autor de este informe que ha actuado como profesor de aula. La secuencia de enseñanza excluye el significado de la fracción como parte-todo y aborda los significados propios de la fenomenología del racional positivo como medida y reparto.

Describimos los objetivos parciales que sustentan el diseño de la propuesta:

1. Conceptualizar la fracción con significado de medida de cantidades de magnitud.

En cuarto curso de Educación Primaria se introduce la fracción como resultado de una medida (longitud, peso, superficie y cardinalidad) y se estudian las relaciones de equivalencia y orden de fracciones.

Cuando los escolares de cuarto curso trabajan con los modelos de medida asociados a estas magnitudes, la necesidad de comunicar el resultado de la medida les obliga a introducir la representación usual de la fracción.

Así,  $\frac{a}{b}$  indica que han fraccionado la unidad de longitud en  $b$  subunidades iguales y que han necesitado colocar  $a$  subunidades, una tras otra, para completar la cantidad de magnitud del objeto a medir.

$$a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

2. Dar significado y justificar desde los modelos de medida las operaciones entre números racionales positivos.

Los alumnos de quinto curso de Educación Primaria identifican las operaciones de suma y resta de fracciones, y las de multiplicación y división de una fracción por un natural en un contexto de resolución de problemas. Además, justifican desde el modelo los procedimientos de cálculo.

3. Conceptualizar la fracción como el resultado de un reparto.

Los escolares de quinto curso reciben enseñanza de la fracción con significado de cociente partitivo. El modelo viene caracterizado por cuatro variables:

objetos: barras de regaliz, todas de la misma la longitud.  
 acción: reparto igualitario.  
 magnitud: longitud.  
 técnicas de medida: reparto en una fase y reparto en varias fases.

Si el reparto se realiza en una sola fase aparece la notación fraccionaria. La expresión admite una doble evaluación semántica. Por un lado posee el significado de medida e indica el resultado del reparto. Y por otro lado expresa las condiciones iniciales del reparto; así,  $a$  es el número de barras de regaliz y  $b$  es el número de personas que van a participar en el reparto.

4. Conectar los sistemas de representación fraccionario y decimal.

Una variación de la técnica del reparto permite introducir el número decimal. En efecto, si modificamos la técnica del reparto de modo que éste se realiza por fases, aplicando el *criterio de la mayor parte* (Gairín, 1999), y fraccionando las partes sobrantes en diez partes iguales, el resultado del reparto aparece como una suma de partes enteras y partes alícuotas de la unidad cuyos tamaños son las sucesivas potencias de  $\frac{1}{10}$ . Esta suma recibe el nombre de representación polinómica decimal del reparto.

Se recuerda que el *criterio de la mayor parte* consiste en dar en cada fase del reparto la mayor cantidad posible de magnitud.

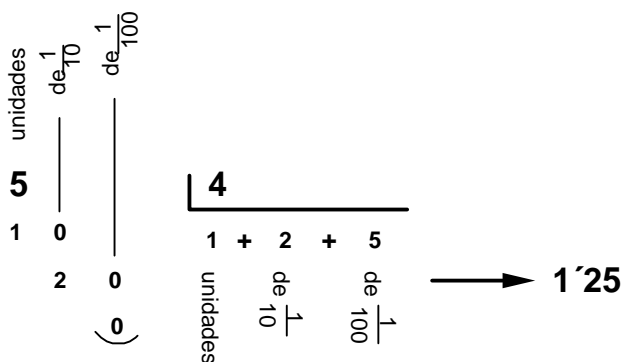
Ejemplificamos el reparto “5 barras de regaliz entre 4 personas” realizado con esta técnica:

Fase del reparto	Acción	Cantidad que recibe cada persona	Cantidad que queda por repartir
Primera	Repartir	1 barra	1 barra
Segunda	Fraccionar en 10 partes iguales 1 barra y después repartir	$\frac{2}{10}$ de barra	$\frac{2}{10}$ de barra
Tercera	Fraccionar en 10 partes iguales $\frac{2}{10}$ de barra y después repartir	$\frac{5}{100}$ de barra	No sobra cantidad

La representación polinómica decimal de este reparto es  $1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$  barras de regaliz.

El criterio de economía en la representación escrita del resultado del reparto lleva a introducir la notación decimal del reparto. En nuestro ejemplo, la representación decimal 1’25 barras de regaliz expresa el resultado del reparto porque la aplicación del principio del valor relativo de las cifras hace que éstas informen de las cantidades que se han repartido en cada fase.

Los escolares proceden de forma simbólica evocando mentalmente las acciones realizadas, en tareas anteriores, con el material manipulativo. El proceso del reparto por fases lo simbolizan del siguiente modo:



Se observa que la notación fraccionaria y la notación decimal tienen un mismo significado y surgen de simbolizar una misma acción, el reparto igualitario, con técnicas diferenciadas. Ambas representaciones admiten una misma evaluación semántica como cocientes partitivos, y poseen la misma estructura numérica subyacente, de la que informa la representación polinómica decimal asociada al reparto.

5. Dar significado y justificar desde modelos de aprendizaje las relaciones y operaciones entre números decimales.

Los alumnos de quinto curso de Educación Primaria ordenan números decimales desde el modelo de medida; identifican las operaciones de suma y resta de decimales, y las de multiplicación y división de un decimal por un natural. Además, justifican desde los modelos de medida y de reparto los procedimientos de cálculo.

## MARCO TEÓRICO

Nuestro marco conceptual se denomina Pensamiento Numérico. Esta línea de investigación tiene una triple orientación: por un lado, se ocupa de las estructuras numéricas específicas; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades numéricas; en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y se resuelven mediante la estructura numérica considerada (Castro, 1994; González, 1995; Rico, 1995).

Dentro de esa línea, nuestro trabajo se ocupa de la segunda dimensión de las tres mencionadas; es decir, del aspecto cognitivo. La noción de comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992) del número racional positivo está caracterizada por el dominio de sus sistemas de representación y de los distintos tipos de actividades cognitivas asociadas a los mismos (Duval, 1995).

Nuestras herramientas conceptuales son los sistemas de representación y los modelos de aprendizaje.

El instrumento elegido para poner de manifiesto las concepciones de los alumnos es la noción de sistema de representación (Kaput, 1987; Duval, 1993; Rico, Castro y Romero, 1996). Hipótesis importante en los estudios basados sobre la noción de representación es que, para alcanzar la comprensión del concepto que se considera es necesario, entre otros aspectos, el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, 1992; Romero, 1995). Un objetivo prioritario de nuestro estudio es conectar los sistemas de representación fraccionario y decimal.

El instrumento utilizado para formular las propuestas de trabajo de campo es la noción de modelo (Lesh, 1997). Pensamos que la construcción del conocimiento exige que el aprendiz actúe sobre un entorno o modelo con objetos y acciones bien definidas (Kieren, 1988). En nuestra propuesta didáctica los modelos de aprendizaje juegan un papel esencial porque los alumnos aprenden cuando actúan sobre el modelo con la intención de resolver situaciones problemáticas; en consonancia con la tercera dimensión en nuestra línea de investigación en Pensamiento Numérico que hemos mencionado anteriormente.

## METODOLOGÍA

Este trabajo es un estudio de tipo exploratorio e interpretativo, que se enmarca en el paradigma cualitativo.

El estudio se articula en dos Etapas, en las que se evalúa una experiencia de aula sobre una innovación curricular, en la línea de Investigación-Acción empírica y diagnóstica. En la Primera Etapa se evalúa la propuesta didáctica implementada en 4º curso de Educación Primaria y en la Segunda Etapa la de 5º curso de Educación Primaria.

La utilización del método de Investigación-Acción se ajusta a nuestro propósito porque queremos reflexionar sobre la práctica educativa a través de una indagación introspectiva colectiva (Kemmis-McTaggart, 1988, pág. 9), con la intención de mejorar la calidad educativa (McNiff, 1991, pág. 1) y porque permite al investigador participar directamente en la experiencia de aula.

La componente experimental de nuestro estudio se ha llevado a cabo con dos grupos naturales de docencia de 4º y 5º curso de Educación Primaria de un colegio de la ciudad de Zaragoza durante dos años académicos consecutivos. Así, hemos implementado la propuesta didáctica en dos grupos de 4º de Educación Primaria durante el curso 1999-2000 y, en el siguiente curso 2000/2001, hemos implementado, con los mismos escolares, la propuesta correspondiente a 5º curso de Educación Primaria.

Las actuaciones en las dos Etapas de la investigación se suceden en torno a las siguientes fases:

### *Planificación*

- a) Análisis y caracterización de la enseñanza de las fracciones y de los números decimales en la Educación Primaria.
- b) Delimitación de los errores y dificultades de aprendizaje de las fracciones y números decimales.
- c) Diseño de la propuesta de enseñanza a implementar en las dos Etapas. Se han diseñado nueve sesiones referidas a la medida de magnitud longitud, superficie, masa y capacidad que se implementan en cuarto curso antes de que reciban enseñanza de la fracción con el significado de medida.

### *Acción*

En la Primera Etapa se han implementado los contenidos de medida de magnitudes (9 sesiones de clase, entre el 12-1-00 y el 24-1-00); la fracción con significado de medida y las relaciones de equivalencia y orden (26 sesiones entre el 25-1-2000 y el 8-3-2000).

En la Segunda Etapa se han implementado los contenidos de operaciones con fracciones, la fracción y el decimal como cocientes partitivos, y las relaciones y operaciones de números decimales (47 sesiones de clase, entre el 2-11-2000 y el 1-3-2001).

Entre ambas Etapas los alumnos de 5º curso han realizado, durante los días 13 y 14 septiembre de 2000, una prueba de evaluación de los aprendizajes alcanzados en el curso anterior. Con los datos obtenidos se reformuló la propuesta didáctica a implementar en la fase de acción de la Segunda Etapa.

*Observación*

Los datos de la experimentación se han obtenido del diario del investigador, de las grabaciones de audio o video, de los documentos escritos de los alumnos y de las observaciones de los profesores de aula.

Se ha elaborado un sistemas de categorías para informar de la Organización del Contenido, de la Comprensión del Contenido y de la Interacción Didáctica.

## CONCLUSIONES

En este momento, nuestro estudio está en fase de realización avanzada aunque no está concluido. Queda por completar las fases de observación y de reflexión de la Segunda Etapa de la Investigación. En estas condiciones, adelantamos algunos resultados referidos a la comprensión de los escolares y a las potencialidades y limitaciones de la propuesta experimentada en la Primera Etapa del diseño de investigación.

A) Sobre la comprensión de los escolares:

1º Los alumnos no intuyen la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida.

2º Los alumnos construyen con facilidad el sistema de representación en las tareas en las que utilizan material con las magnitudes longitud, superficie y cardinalidad. Sin embargo, han tenido dificultades con la magnitud masa.

3º Los alumnos saben construir la cantidad de magnitud a partir del conocimiento de la representación simbólica de la fracción. No obstante, obtienen mejores resultados en tareas en las que se construye el sistema de representación que en las tareas de evaluación semántica del sistema de representación

4º La mitad de los escolares saben expresar, por escrito, el significado del numerador y denominador de la fracción.

5º No se detectan diferencias significativas en la comprensión de los escolares cuando actúan con los modelos longitud o superficie.

6º Los alumnos saben construir fracciones equivalentes a una dada utilizando como recurso didáctico materiales manipulativos. Desde las primeras tareas, observan que una misma cantidad de magnitud puede venir expresada por diferentes fracciones.

7º Los escolares saben ordenar fracciones que tienen el mismo denominador cuando se presentan de forma simbólica. Así, el 66% de los alumnos sabe ordenar y justificar el resultado. El rendimiento baja al ordenar fracciones con el mismo numerador, o con distinto numerador y denominador (entorno al 50%).

8º Cuando los alumnos de 4º curso ordenan fracciones utilizan como estrategia básica el significado de fracción como medida. Muy pocos alumnos se sirven de otras estrategias como la comparación con fracciones intermedias conocidas o la equivalencia de fracciones.

9º Los escolares de 4º curso, incluso los que muestran tener un nivel de comprensión alto, tienden a utilizar estrategias aditivas para construir fracciones equivalentes. Cuando afrontan las tareas de equivalencia de fracciones, al margen de los modelos manipulativos, y operan con representaciones simbólicas utilizan estrategias aditivas frente a las multiplicativas, aún en situaciones inapropiadas.

B) Sobre las potencialidades del modelo:

1º Los modelos de aprendizaje basados en la magnitudes continuas (longitud y superficie) han permitido a los escolares:

a) construir y evaluar semánticamente el sistema de representación fraccionario

b) dar significado a las relaciones de equivalencia y de orden



2º Las representaciones gráficas facilitan la transición entre las acciones realizadas con materiales manipulativos y las representaciones simbólicas.

C) Sobre las limitaciones del modelo:

1º Hemos detectado dificultades con el modelo masa asociadas a la complejidad de la percepción visual de la cantidad.

2º Hemos observado dificultades para gestionar la equivalencia de fracciones a nivel simbólico, porque los escolares de cuarto curso:

a) No enuncian la regla de obtención de fracciones equivalentes a una dada, a pesar de que pretendemos como objetivo de la enseñanza que los escolares conjeturen la regla de formación de fracciones equivalentes antes de que el profesor institucionalice este conocimiento en el aula.

b) No utilizan la equivalencia en las tareas de ordenación de fracciones.

Hemos constatado que los mismos alumnos, un año después, en quinto curso han utilizando la estrategia basada en la equivalencia de fracciones para resolver situaciones problemáticas sobre relaciones y operaciones con fracciones.

## REFERENCIAS

- Castro, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- Duval, R. (1993). *Semiosis y noesis. Lecturas en didáctica de la Matemática: Escuela francesa*. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang, S.A., Bern.
- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzado del IPN. México.
- Gairin, J. M. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.
- Gonzalez, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- Groff, P. (1996). Is Teaching a Waste of Time?. The Clearing House. A Journal for middle schools, junior and senior schools. (69), 3, pág. 177-179
- Hiebert, J. A. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D. A. (edit.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Company, New York.
- Kaput, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En Janvier, C. (edit.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hillsdale, N. J.
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company, New York.
- Kemmis, S y McTaggart (1992) *Cómo planificar la investigación-acción*. Laertes, Barcelona.
- Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers. Its Intuitive and Formal Development. En Carpenter, T. P.; Fennema, E. y Romberg, T. A. *Rational numbers. An integration of research*. Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hillsdale, N. J.
- Lesh, R. (1997). Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. En Enseñanza de las Ciencias, vol. 15, nº 3, pág. 377-391.
- McNiff, J. (1992). *Action Research: principles and practice*. Routledge, Canadá.

- Rico, L. (1995). *Conocimiento numérico y formación del profesorado*. Universidad de Granada, Granada.
- Rico, L.; Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceedings 20 International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Valencia, España.
- Romero, I. M. (1995). *La introducción del número real en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.