Anales Científicos, 76 (2): 256-260 (2015)
ISSN 0255-0407 (Versión impresa)
ISSN 2519-7398 (Versión electrónica)

DOI: http://dx.doi.org/10.21704/ac.v76i2.789

Presentado: 20/05/2014
Aceptado: 3/10/2014

K(*X*) EL GRUPO DE GROTHENDIECK DEL SEMIGRUPO ABELIANO *V* (*X*)

THE *K*(*X*) GROTHENDIECK GROUP OF THE ABELIAN SEMIGROUP *V* (*X*)

[1]Ana M. Zela A.

Resumen

Se presenta *K*(*X*) como el grupo de Grothendieck del semigrupo abeliano

V (*X*), con este grupo se har un estudio topol ogico de la *K*-teor a, esta teor a se formula principalmente en base a brados vectoriales.

Palabras claves: grupo, brados, semigrupos, topol ogico.

Abstract

It is *K*(*X*) as the semigroup Grothendieck group Abelian *V* (*X*), with this group we will do a topological *K*-theory study, this theory is mainly formulated on the basis of vector bundles.

Key words: group, bundles, semigroups, topological.

---

1. Introducción

Un procedimiento clasico del algebra nos explica como obtener grupos abelianos a partir de semigrupos abelianos. Este procedimiento es bien conocido para el caso de los numeros enteros Z, los mismos que se consiguen a partir de los numeros naturales N a traves de la operacion adicion (+). Otro ejemplo es el de $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ que se consigue a partir del semigrupo multiplicativo $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Estos grupos abelianos asi obtenidos se conoce con el nombre de grupo de Grothendieck o grupo universal.

El objetivo de este trabajo es aplicar esta construcción al semigrupo adeliano *V* (*X*) para obtener el grupo de Grothendiek, que en este caso es *K*(*X*), el cual est a formado por diferencia de clases de equivalencia de brados vectoriales. Asimismo probar que *K*(*X*) es un grupo.

El presente trabajo est a organizado como sigue: materiales y m etodos; en resultados y discusi on presentamos tres secciones en la primera se d a los conceptos b asicos que se em-plear an en el desarrollo de este trabajo: las de niciones y ejemplos b asicos de Categor a y Funtores puesto que al grupo *K*(*X*) lo podemos ver de una manera funcional tomando

K como un funtor contravariante (Ver De nici on 2), tambi en de nici on y ejemplos de brados vectoriales. en la segunda secci on de nimos al grupo de Grothendieck para un semigrupo en general, luego construimos el Grupo de Grothendieck para *V* (*X*). Final-mente en la tercera secci on se presenta al grupo *K*(*X*) y demostramos que es un grupo y presentando ejemplos respectivos.

2. Materiales y métodos

La metodolog a utilizada en este trabajo es cuantitativa y comparativa. Los materiales utilizados son bibliográcos (Ver Bibliografía).

3. Resultados y discusión

Categorias y Funtores

Denicion 1 (Categoras). Una categora esta formada por:

1. Una clase de objetos.
2. Para cada par de objetos X y Y un conjunto hom(X; Y) de morsmos con dominio X y rango Y de modo que si f 2 hom(X; Y) implica f : X ! Y .
3. Para cada triplete de objetos X, Y y Z una funcion asociando a un par de morsfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ la compuesta $g \circ f : X \to Z$ satisface los siguientes dos axiomas:

Asociativa: Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$ satisfacen $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Linealidad: Para todo objeto *Y* existe un morfismo $Id_Y : Y \to Y$ tal que si $f : X \to Y$, entonces I $Id_Y \circ f = f$ y si $h : Y \to Z$, entonces $h \circ Id_Y = h$.

[1]Universida Nacional Agraria La Molina, Lima, Perú. E-mail: azela@lamolina.edu.pe

Ejemplo 1. Los espacios vectoriales V sobre R o C forman una categora cuyos morfismos son las transformaciones lineales entre ellos.

Nuestro interes en las categoras es por la existencia de aplicaciones entre categorias, esas aplicaciones las cuales tienen la propiedad de preservar la identidad y composicion son llamados funtores.

De finicion 2 (Funtores). Sea C y D dos categorias. Un funtor covariante (ó funtor contravariante) $T:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ D consiste de una función objeto la cual asigna a cada objeto $X\in\mathcal{C}$ un objeto $T(X)\in\mathcal{D}$ y una función morfismo la cual asigna a cada morfismo $f:X\to Y$ de $\mathcal{C}$ un morfismo:

$$T(f):T(X)\to T(Y)\in\mathcal{D} \quad \text{ó} \quad (T(f):T(Y)\to T(X))$$

1. $T(Id_X)=Id_T(X)$

2. $T(gf)=T(g)T(f) \quad$ ó $\quad (T(gf)=T(f)T(g))$ (si f es contravariante).

Fibrados Vectoriales

Informalmente un brado vectorial sobre un espacio base X (el cual usualmente es tomado como un espacio de Hausdorff compacto) es una construccion geometrica donde a cada punto de un espacio topologico X adherimos un espacio vectorial n-dimensional, dandole al espacio as obtenido una estructura topologica local que en el contexto es como producto cartesiano de cierto abierto U del espacio X por K^n, donde K es R o C.

De nicion 3. Sea X un espacio topol ogico llamado *espacio base*. Un brado vectorial. E sobre X es un espacio topol ogico llamado espacio total junto con:

1. una aplicación continua y sobreyectiva

$$p:E\longrightarrow X,$$

denominada proyeccion, tal que para todo x $x\in X$ los conjuntos $E_x=p^{-1}(x)$ llamados *fibras*, tienen estructura de espacio vectorial de dimensión finita;

2. Una topologÍa sobre cada E_x, la cual es compatible con la de E, es decir podemos inducir una topología sobre cada E_x conociendo la topolog a sobre E;

3. el brado E satisface la condici on de trivialidad local, para cada $x\in X$ existe una vecindad U_x de x, donde $E|_{U_x}=p^{-1}(U_x)$ es isomorfo al producto cartesiano

$U_x\times\mathbb{K}^n$; es decir, existen homeomor smos:

$$h_x:p^{-1}(U_x)\longrightarrow U_x\times\mathbb{K}^n,$$

donde h_x es llamado trivializaci on local del fibrado vectorial E y al restringirnos a $p^{-1}(y)$ en $\{y\}\times\mathbb{K}^n$, h_x debe ser un isomor smo de espacios vectoriales para cada $y\in U_x$. La inversa de h_x es llamada parametrización.

De acuerdo con la Definición 3, los fibrados vectoriales son la union de bras $p^{-1}(x)$ para cada $x\in X$ parametrizadas por X y pegadas juntos por una topologa del espacio E. En general nos referimos a un brado vectorial como una terna ($E; p;X$) que llamaremos simplemente E, siempre y cuando p y X esten sobreentendidos.

Ejemplo 2. (El Fibrado Inducido ó Pullback) Para su construcción tomaremos unfibrado vectorial ($E; p; X$) y una aplicaci on continua $f:X\to Y$ los fibrados vectoriales sobre X son inducidos por fibrados vectoriales sobre Y atraves de una construcción Pullback. De namos el fibrado vectorial Pullback o Inducido como:

$$f^*(E)=\{(x,e)\in X\times E;\quad f(y)=\boldsymbol{p}(e)\}$$

con proyección

$$\begin{aligned} f^*(p) \ :\ f^*(E) &\longrightarrow X \\ (x,e) &\longmapsto x \end{aligned}$$

con fibras:

$$\begin{aligned} f^*(p^{-1}(\{x\})) &= f^*(E_x) \\ &= \{x\}\times p^{-1}(f(x)) \\ &= \{x\}\times E_{f(x)} \end{aligned}$$

Siendo $f^*(p)^{-1}(x)=\{(x,e);\quad e\in E\}$ espacio vectorial y f*(E) satisface la condicion de trivialidad local cuando E lo es. En efecto: Sea ($U; h$) un sistema de coordenadas de E que satisface

$$h:U\times\mathbb{R}^n\longrightarrow p^{-1}(U)$$

si tomamos $U_1=f^{-1}(U)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} h \ :\ U_1\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow f^*(p)^{-1}(U_1) \\ (y,x) &\longmapsto (y,h(f(y),x)) \end{aligned}$$

es un homeomor smo. Por lo tanto vemos que $(f^*(E),f^*(p),X)$ es un brado vectorial sobre X.

Un ejemplo trivial que podemos mencionar es el siguiente. Si f es la funcion inclusion de subespacios $Y\subset X$ entonces $f^*(E)\cong p^{-1}(y)$ así la restricción sobre el subespacio es un caso particular de Pullback.

Mas adelante, este fibrado será empleado para demostrar que K es un funtor covariante. En el trabajo de investigacion Fibrados Vectoriales y el Semigrupo $V(X)$ podemos encontrar m as ejemplos de fibrados vectoriales.

El Grupo de Grothendieck

De nicion 4. Sea H un semigrupo abeliano conmutativo; es decir, un conjunto provisto con una operación (+) que satisface los axiomas de grupo abeliano excepto por la existencia de inversos. Construimos el grupo de Grothendieck $G(H)$ y una aplicación: $\tau : H \to G(H)$ que cumplen la siguiente propiedad universal. Sea S un grupo abeliano y $\phi : H \to S$ una aplicación aditiva. Entonces requeriremos la existencia de un unico homomorfismo de grupos: $\psi : G(H) \to S$ que convierte el diagrama en conmutativo.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi"'] & G(H) \arrow[dl, "\psi"] \\ S & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Pasemos a la construcci on. Si H es un semigrupo abeliano con operación aditiva, en el producto HxH de finimos una relación "$\sim$" como sigue: para (x_1, y_1), (x_2, y_2) en $H \times H$ pondremos $(x_1; y_1) \sim (x_2; y_2)$ si y solamente si existe $z \in H$ tal que $x_1 + y2 + z = x2 + y1 + z$. Además diremos que H tiene la propiedad de cancelación cuando x, y, z son elementos de H sujeta a $x + z = y + z$, se cumple $x = y$.

Lema 1. La relación "$\sim$" es de equivalencia.

Prueba.- *a*) Re exividad. Dado que se cumple la igualdad $x_1 + x_2 + z = x_2 + x_1 + z$
para todo z que pertenece a H, se tiene $(x_1; x_2)$ "$\sim$" $(x_1; x_2)$.

b) Simetr a. Si $(x_1; x_2)$"$\sim$"$(y_1; y_2)$, entonces existe z con $x_1 + y_2 + z = y_1 + x_2 + z$.

Al reescribir esto de derecha a izquierda resulta $y_1 + x_2 + z = y_2 + x_1 + z$, es decir $(y_1; y_2)$"$\sim$"$(x_1; x_2)$.

c) Transitividad. Probaremos que de $(x_1; x_2)$ "$\sim$" $(y_1; y_2)$ e $(y_1; y_2)$ "$\sim$" $(w_1; w_2)$ se pasa a $(x_1; x_2)$ "$\sim$" $(w_1;w_2)$. Cuando $(x_1; x_2)$ "$\sim$" $(y_1; y_2)$, existe z en H tal que $x_1 + y_2 + z = y_1 + x_2 + z$. Por otro lado, si $(y_1; y_2)$ "$\sim$" $(w_1;w_2)$ entonces existe u en H tal que $y_1 + w_2 + u = w_1 + y_2 + u$. Sumando y agrupando adecuadamente las ultimas igualdades obtenemos $x_1 + w_2 + (y_1 + y_2 + z + u) = x_2 + w_1 + (y_1 + y_2 + z + u)$. Por lo tanto $(x_1; x_2)$ "$\sim$" $(w_1;w_2)$.

Lema 2. El espacio cociente H $H=$ es un grupo aditivo con la adici on natural dada por

$$[(x_1, x_2)] + [(y_1, y_2)] = [(x_1 + y_1, x_2 + y_2)]$$

Prueba.- Primero probaremos que la suma así definida no depende de los representan-tes. Si $(x_1; x_2)$ "$\sim$" $(a; b)$ existe $z \in H$ tal que $x_1 + b + z = a + x_2 + z$. Similarmente si $(y_1; y_2)$ "$\sim$" $(c; d)$ existe $u \in H$ tal que $y_1 + d + u = c + y_2 + u$. Resulta entonces que $(x_1 + y_1; x_2 + y_2)$ es equivalente a $(a + c; b + d)$ y las clases son iguales.

A continuaci on probaremos que $H \times H/\sim$ es un grupo.

a) Asociatividad. $[(x_1; x_2)] + [(y_1; y_2)] + [(w_1; w_2)] = [(x_1; x_2)] + [(y_1; y_2)] + [(w_1; w_2)]$.

Partiendo del lado izquierdo por de nici on de suma de clases tenemos $([[(x_1 + y_1; x_2 + y_2)] + [w_1; w_2] = [(x_1; x_2)] + [(y_1; y_2)] + [(w_1; w_2)])$

b) El elemento $[(u; u)]$, que pertenece a $H \times H/\sim$ para cualquier u en H, es neutro para la suma pues $[(x_1; x_2)] + [(u; u)] = [(x_1; x_2)]$.

c) El inverso de $[(x_1; x_2)]$ es $[(x_2; x_1)]$.

El grupo $H \times H/\sim$ es el grupo de Grothendieck del semigrupo abeliano H el cual denotaremos por $G(H)$. Sus elementos son $(x_1; x_2)$ donde $x_i \in H, i = 1, 2$.

Lema 3. Sea H un semigrupo abeliano. Para cada $a \in H$, la aplicación

$$\tau \ : \ H \longrightarrow G(H)$$

$$h \longmapsto [(h + a, a)]$$

es independiente de la elecci on de a. Esta aplicación es llamada aplicaci on de Grothen-dieck.

Prueba.- Se debe probar, que para cualquier $h, a, b \in H$ se tiene $[h + a; a] = [h + b; b]$,

Lema 4. El semigrupo H tiene la propiedad de cancelación si T y solamente si es inyectivo.

Prueba.- Sean h_1 y h_2 elementos de H. Si $T(h_1) = T(h_2)$ por definición de T se cumple $(h_1+a; a)$"$\sim$"$(h_2+ b; b)$. Es decir existe z tal que $h_1 + (a + b + z) = h_2 + (a + b + z)$. Cancelado $a + b + z$ resulta $h_1 = h_2$ y es inyectiva.

Por otro lado, si se cumple $h_1 + a = h_2 + a$ se tiene tambien $(h_1 + a) + a = (h_2 + a) + a$, y con ello $[h_1 + a; a] = [h_2 + a; a]$, es decir, $T(h_1) =(h_2)$.Como T es inyectiva se concluye $h_1 = h_2$ y hemos cancelado a.

Ahora comprobaremos que $G(H)$ cumple con la propiedad universal aludida atrás. Para ello, cuando S sea un grupo abeliano, dada $\phi : H \to S$ aditiva de nimos : $\psi : G(H) \to S$ por $\psi([x_1, x_2]) = \phi(x_1) - \phi(x_2)$ Primero notemos la buena definición de . Si $(x_1; x_2)$ $(y_1; y_2)$ entonces existe $z \in H$ tal que $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$. Cuando aplicamos ϕ resulta

$\phi(x_1) + \phi(y_2) + \phi(z) = \phi(x_1 + y_2 + z) = \phi(x_2 + y_1 + z) = \phi(x_2) + \phi(y_1) + \phi(z)$:

Al tener S la propiedad de cancelaci on obtenemos $\psi([(x_1, x_2)]) = \psi([(y_1, y_2)])$. A continuacion chequeemos la conmutatividad del diagrama (1). Para ello consideremos la evaluación de $\psi \circ \tau$ en un elemento $h \in H$. Tenemos $\psi \circ \tau(h) = \psi([(h + a, a)]) = \phi(h + a) - \phi(a)$. Haciendo uso de la cancelación en S y la aditividad de ϕ conseguimos $\psi \circ \tau(h) = \phi(h)$.

Finalmente trabajemos la unicidad. Supongamos que existe otra aplicación $\overline{\psi}$ que cumple con las mismas condiciones de $\overline{\psi}$, es decir, $\overline{\psi}$ es un homomor smo que cumpleta el diagrama (1) $\overline{\psi} \circ \tau = \phi$.

$$\overline{\psi}([x_1, x_2]) = \psi(\tau(x_1)) - \psi(\tau(x_2)) = \phi(x_1) - \phi(x_2) =$$

$$\overline{\psi}(\tau(x_1)) - \overline{\psi}(\tau(x_2)) = \overline{\psi}([x_1, x_2]).$$

Lo hecho prueba que $\overline{\psi} = \psi$.

Ejemplo 3. El grupo de Grothendieck de N es

$$G(\mathbb{N}) = \{\, x - y : \ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\},$$

isomorfo a Z. Para el semigrupo multiplicativo ($(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ tenemos $G(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot) = (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$.

El grupo de Grothendieck podemos verlo de una manera funtorial como la imagen de un funtor covariante de la categoría de semigrupos abelianos SA a la categor a de grupos abelianos GA. Para esto apreciemos que toda aplicación $f : H_1 \to H_2$ de semigrupos abelianos induce un morfismo

$$G(f) : G(H_1) \longrightarrow G(H_2)$$

Vía $G(f)([(a, b)]) = [(f(a), f(b))]$. En este caso el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_1"'] & H_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ G(H_1) \arrow[r, "G(f)"'] & G(H_2) \end{tikzcd}$$

resulta conmutativo. Adem as, G satisface las propiedades restantes de un funtor cova-riante pues es compatible con la composición y la identidad. En efecto, si $H1$, $H2$, $H3$ $\in \mathcal{SA}$ y $f : H_1 \to H_2$, $g : H_2 \to H_3$, entonces $G(f \circ g) = G(g) \circ G(f)$. tenemos que para todo $H \in \mathcal{SA}$ se cumple $G(Id_H) = Id_{G(H)}$.

El grupo $K(X)$

En la secci on anterior vimos cómo a partir de un semigrupo abeliano H se construye el grupo de Grothendieck $G(H)$. Por otro lado, en el trabajo de investigación Fibrados Vectoriales y el Semigrupo $V(X)$, se probó que $V(X)$ es un semigrupo abeliano. Esto nos permite dar inicio al estudio del grupo $K(X)$.

Definicion 5. Si X es un espacio topol ogico de Hausdorf y compacto, definimos $K(X)$ como el grupo de Grothendieck de $V(X)$; esto es

$$K(X) = \{\ [E] - [E'];\ \ E,\ E' \text{ son fibrados vectoriales } \}/ \approx$$

donde $\approx$ identica $[E] - [E']$ con $[F] - [F']$ apenas exista un brado vectorial G tal que $E \oplus F' \oplus G \simeq E' \oplus F \oplus G$.

Teorema 1. K(X) dotado con la ley interna aditiva $([E] - [E']) + ([F] - [F']) = [E \oplus F] - [E' \oplus F']$ es un grupo.

Prueba.-Esto sigue directamente del Teorema 3 y el Lema 3.

Dado cualquier elemento $[E]$-$[E']$ en $K(X)$ se puede escoger representantes de modo que uno de ellos sea un fibrado trivial. Si sumamos a $[E]$ y $[E']$ un fibrado vectorial $[E'']$ de modo que $E' \oplus E''$ sea un brado trivial ε_n para algun n (Ver [?] Teorema 2) obtenemos

$$[E] - [E'] = ([E] + [E'']) - ([E'] + [E'']) =$$

$$([E \oplus E'']) - ([E' \oplus E'']) = [F] - [\varepsilon_n].$$

En base a lo anterior, el elemento de $K(X)$ queda representado por la diferencia $[F] - [\varepsilon_n]$.

Si denotamos por ET la categoría de espacios topológicos de Hausdorff compactos y por GA la categoría de los grupos abelianos, entonces K es un funtor contravariante

$$K \ : \ ET \longrightarrow GA$$

$$X \longmapsto K(X).$$

La aplicacion $f : X \to Y$ donde X, Y son espacios topologicos induce el homomorsmo K(f) dado por

$$K(f) \ : \qquad K(Y) \longrightarrow K(X)$$

$$[E] - [E'] \longmapsto [f^*(E)] - [f^*(E')];$$

donde $f^*(E)$ es el pullback sobre X. Con ayuda del funtor contravariante V se origina el diagrama

$$\begin{tikzcd} V(Y) \arrow[r, "\tau_y"] \arrow[d, "V(f)"'] & K(Y) = G(V(Y)) \arrow[d, "K(f)"] \\ V(X) \arrow[r, "\tau_x"] & K(X) = G(V(X)) \end{tikzcd}$$

que es conmutativo, donde T_x es la aplicacion de Grothendieck denida por

$$\tau_x \; : \; V(X) \longrightarrow K(X)$$

$$[E] \longmapsto [E \oplus \varepsilon_n] - [\varepsilon_n].$$

para el brado trivial ε_n sobre X y similarmente

$$\tau_y \; : \; V(Y) \longrightarrow K(Y)$$

$$[f^*(E)] \longmapsto [f^*(E) \oplus \varepsilon_m] - [\varepsilon_m]$$

Con estos homomor smos el funtor K resulta ser contravariante. Trivialmente se verifica que preserva la composición y la identidad.

Ejemplo 4. En el trabajo de investigacion Fibrados Vectoriales y el Semigrupo $V(X)$, se vio que cumple $V(\{p\}) \cong \mathbb{N}$, de donde se concluye $K(\{p\}) \cong \mathbb{Z}$. Tambien se tiene la identicacion $K_{\mathbb{R}}(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, con generadores $[\varepsilon_1] \equiv (1,0)$ y $[M] \equiv (1,1)$.

4. Concluciones

En este trabajo, presento el caso particular de construir el grupo de Grothendieck $K(X)$ para el semigrupo abeliano $V(X)$ y adem as pruebo en el Teorema 1 que $K(X)$ es un grupo.

5. Bibliografia

Allen, H. 1998. Vector Bundles and K- Teor a, 1998.

Ana Mar a Zela Apaza, 2006. Fibrados Vectoriales y el Semigrupo $V(X)$, trabajo de investi-gaci on de la UNALM, octubre 2006.

Atiyah, M. F. 1964. Topologia Universal, Topology 3, Suppl. 1, 3-38, 1964.

James Munkres. 1975, Topolog a un Primer Curso, New Jersey 1975.

Lang, S. 1977. Complex Analysis, Addison Publishing Company in Andsterdan, 1977.

Manfredo Do Carmo. 1998. Geometr a Reimanniana, 1998.

Walter Rudin, M. F. 1964. An alisis funcional , Topology 3, Suppl. 1, 3-38, 1964.

Sze-Tsen Hu. 1974. Introducci on al algebra Homol ogica,Ed. Vicens-Vives 1974.