Anales cientìficos UNALM Vol 70 N° 2, 2009
ISSN 0255-0407

Recibido: 31/11/2006
Aceptado: 22/01/2007

Fibrados vectoriales y el semigrupo V(X)

Ana Zela Apaza[1]

Resumen

Se presenta un estudio de una estructura que es la generalización del fibrado tangente denominada **Fibrados Vectoriales** con ésta estructura se formaría el conjunto **V(X)** constituido por clases de isomorfismos de fibrados vectoriales que al ser dotado con la Suma de Whitney se convierte en un semigrupo abeliano. Este semigrupo daría origen a la K-teoría topológica.

Palabras clave:

Abstract

It is presented a study of a structure that is the generalization of the bundle tangent denominated Vector Bundles with this structure will form the semigroup V(X) constituted by isomorphism classes of Vector Bundles that to the being endowed with the Sum of Whitney, it becomes a commutative semigroup. This semigroup will give origin to the topological K-theory.

Key words:

1. Introducción

El objetivo del estudio de los fibrados vectoriales sobre un espacio base X de Hausdorff y compacto; es para formar el semigrupo abeliano V(X) de una forma topológica, tomando clases de fibrados vectoriales isomorfos; la importancia de éste semigrupo se vé en el desarrollo de la teoría de los K-grupos básicamente es la equivalencia que existe entre la K-teoría topológica y la K- teoría algebraica, para ésta equivalencia es impresindible el uso del teorema de Swan (Ver Teorema 2) el cual demostraremos en éste trabajo introduciendo para ello el fibrado Universal $\mathbb{E}_n$ sobre la variedad Grassmaniana $\mathbb{G}_n$, dicho teorema afirma que la de suma de dos fibrados vectoriales sobre un espacio base X compacto es un fibrado trivial (Ver Ejemplo 4).

El trabajo está organizado como sigue: en la revisión literaria tenemos dos secciones: en la primera se dá las definiciones y ejemplos básicos de Categoría y Funtores puesto que al semigrupo V(X) lo podemos ver de una manera funcional tomando V como un funtor contravariante (Ver Definición 2). En la segunda sección introducimos la noción de fibrados vectoriales.

En los materiales y métodos tenemos 3 secciones: En la primera construimos nuevos fibrados vectoriales apartir de los ya conocidos; entre los más importantes está el fibrado vectorial Pullback que sería utilizado para visualizar al semigrupo V(X) de una manera funcional y el fibrado Universal que utilizaremos para la demostración del teorema de Swan. En la segunda sección se presenta la operación Suma de Whitney y en la tercera sección veremos el estudio del semigrupo abeliano V(X).

1.1. Categorías y factores

Definición 1 (Categorías). Una categoría está formada por:

1. Una clase de objetos (conjuntos, espacios topológicos, grupos, etc).

2. Para cada par de objetos X y Y se le asocia el conjunto:
hom(X, Y) := {f:X→Y} donde f es un morfismos con dominio X y rango Y .

3. Para cada terna de objetos X, Y y Z y los morfismos f : X →Y ; g : Y → Z existe la composición de morfismos g o f : X→Z que satisface:

• Asociativa: Si f : X →Y , g : Y→Z y h: Z →W satisfacen h o (g o f) = (h o g) o f.

• Linealidad: Para todo objeto Y existe un morfismo $Id_Y : Y \to Y$ tal que si f : X → Y , entonces $Id_Y \circ f = f$ y si h : Y → Z entonces $h \circ Id_Y = h$.

Nota.- Una categoría se llama pequeña si y sólo si la clase de objetos es un conjunto.

Ejemplo 1. Los espacios vectoriales V sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ forman una categoría cuyos morfismos son las transformaciones lineales entre ellos.

Ejemplo 2. Las álgebras sobre $\mathbb{R}$ forma una categoría donde los morfismos son los homomorfismos de álgebras.

Ejemplo 3. Los grupos forma una categoría con morfismo, los homomorfismo de grupos.

Nuestro interés en las categorías es por la existencia de aplicaciones entre categorías, esas aplicaciones las cuales tienen la propiedad de preservar la identidad y Composición son llamados funtores.

Definición 2 (Funtores). Sean C y D dos categorías. Un funtor covariante (ó funtor contravariante) T:C→D consiste de una función objeto la cual asigna a cada objeto X $\in$ C un objeto T(X) $\in$ D y una función morfismo la cual asigna a cada morfismo f : X → Y de C un morfismo:
T(f) : T(X) → T(Y) $\in$ D ó (T(f) : T(Y) → T(X)) tal que

1. $T(Id_X) = Id_T(X)$

2. T(gf) = T(g)T(f) ó (T(gf) = T(f)T(g)) (si f es contravariante).

1.2. Fibrados Vectoriales

Informalmente un fibrado vectorial es una construcción geométrica donde a cada punto de un espacio topológico X unimos un espacio vectorial n-dimensional de una manera compatible, dándole al

[1] Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Agraria La Molina. E-mail: azela@lamolina.edu.pe.

nuevo espacio así obtenido una estructura topológica y que se vea localmente como un producto cartesiano de cierto abierto U del espacio X por $\mathbb{R}^n$.

Definición 3. Sea X un espacio topológico llamado espacio Base. Un fibrado vectorial E sobre X es un espacio topológico llamado espacio total junto con:

1. Una aplicación continua y sobreyectiva
$p : E \to X$
denominada proyección tal que para todo $x \in X$ los conjuntos $E_x = p^{-1}(x)$ llamados fibras tienen una estructura de espacio vectorial de dimensión finita.

2. Una topología sobre cada E_x, la cual es compatible con la de E, es decir podemos inducir una topología sobre cada E_x conociendo la topología sobre E.

3. E satisface la condición de trivialidad local. Esto significa que para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x de x, donde $E|_{U_x} = p^{-1}(U_x)$ es isomorfo al producto cartesiano $U_x \times \mathbb{R}^n$, es decir, existen homeomorfismos:

$$h_x : p^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times \mathbb{R}^n.$$

h_x es llamado trivialización local del fibrado vectorial E y al restringirnos a $p^{-1}(y)$ en $\{y\} \times \mathbb{R}^n$, h_x es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada $y \in U_x$.

De acuerdo con la Definición 3, los fibrados vectoriales son vistos como la unión de fibras $p^{-1}(x)$ para cada $x \in X$ parametrizado por X y pegados juntos por una topología del espacio E. En general a un fibrado vectorial lo vemos como una terna (E,p,X) ó simplemente E si p y X son sobreentendidos.

Ejemplo 4. El fibrado vectorial $E = X \times V^n$ sobre el espacio topológico X con la proyección p sobre el primer factor, dado por:

$$\begin{aligned} p \quad : \quad & E \longrightarrow X \\ & (x, v) \longmapsto x \qquad \text{para todo } x \in X \end{aligned}$$

con fibras el espacio vectorial

$$E_x = p^{-1}(x) = \{x\} \times V^n \cong V^n$$

E es llamado Fibrado Vectorial Trivial.

Al igual que el Ejemplo 5, la condición de trivialidad local está dado por $h_z : p^{-1}(U_z) \to U_z \times \mathbb{R}^n$ son obtenidos por la proyección ortogonal de las fibras $p^{-1}(x)$ sobre $p^{-1}(z)$ para $x \in U_z$.

Definición 4. Sean (E, p,X) y (F, q, Y) dos fibrados vectoriales, un morfismo de fibrados vectoriales es un par (μ, f) de aplicaciones continuas para las cuales se cumple q o μ = f o p ó es equivalente decir que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

y además $\mu : p^{-1}(x) \to q^{-1}(f(x))$ es una transformación lineal de espacios vectoriales.

El caso particular de morfismo es cuando la aplicación f es la identidad, así los fibrados vectoriales están definidos en el mismo espacio base

A los fibrados vectoriales triviales los denotaremos por ε_n donde n representa la dimensión del espacio vectorial V.

Ejemplo 5. (El Fibrado Tangente a la Esfera Unitaria $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sea $E = \{(x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}; \quad x \perp v\}$ el fibrado vectorial sobre $\mathbb{S}^n$, siendo υ un vector del plano tangente a $\mathbb{S}^n$ en x, con la proyección p sobre el primer factor:

$$\begin{aligned} p \quad : \quad & E \longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (x, v) & \longmapsto x \end{aligned}$$

Con fibras

$$E_x = p^{-1}(x) = \{(x, v) \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1};\ x \perp v\}$$

espacios vectoriales, con las operaciones: $m + n = (x, v_1 + v_2)$; donde $m = (x, v_1)$ y $n = (x, v_2) \in E_x$.

Además E satisface la condición de trivialidad local. Para ello elegimos un punto $z \in \mathbb{S}^n$ y una vecindad abierta $U_z \subset \mathbb{S}^n$ conteniendo a z y acotado por el hiperplano que pasa por el origen, que es ortogonal a z.

Así definimos los homomorfismos:

$$\begin{aligned} h_z \quad : \quad & p^{-1}(U_z) \longrightarrow U_z \times p^{-1}(z) \cong U_z \times \mathbb{R}^n \\ & (x, v) \longmapsto (x, \pi_z(v)) \end{aligned}$$

Donde π_z es la proyección ortogonal sobre el plano tangente $p^{-1}(z)$ definido por:

$$\pi_z(v) = v - \frac{< v, z > z}{< z, z >} = (z, v)$$

; de esto h_z es una trivialización local puesto que si restringimos a $p^{-1}(x)$ sobre $p^{-1}(z)$ es un isomorfismo para cada $x \in U_z$.

Ejemplo 6. (El Fibrado Normal de la Esfera Unitaria $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$)

Sea

$$\begin{aligned} E \quad &= \quad \{(x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}; \quad v \perp T_x(v)\} \\ &= \quad \{(x, v); \quad v = tx, \quad t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

con proyección sobre el primer factor

$$\begin{aligned} p \quad : \quad & E \longrightarrow S^n \\ & (x, v) \longmapsto x \end{aligned}$$

X, esto convierte a μ en un isomorfismo. Veamos la siguiente definición.

Definición 5. Sean E y F dos fibrados vectoriales sobre el mismo espacio topológico X diremos que son isomorfos sobre X, si existe una aplicación continua

$$\mu : E \longrightarrow F$$

para la cual el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

es decir q o μ = p y en cada fibra se tiene en μ un isomorfismo de espacios vectoriales.

En general no es fácil decir, si un fibrado vectorial es trivial o nó; los Ejemplos 5 y 6 nos muestran fibrados vectoriales no triviales; existen aplicaciones continuas denominadas secciones que nos ayudaran ha reconocer si los fibrados vectoriales son triviales.

Definición 6. Una sección de un fibrado vectorial E, es una función continua s : X → E que satisface p o s = Id; dicho de otra manera $s(x) \in p^{-1}(x)$, la fibra sobre x, para todo los $x \in X$.

Definición 7. Una sección local de un fibrado vectorial E, es una aplicación continua s: U → E tal que p o s(x) = x, para todo $x \in$ U, es decir una elección continua de un vector en cualquier fibra.
Un subconjunto importante del espacio E es el subespacio $\widehat{E}$ llamado el espacio nulo de E, que consta de todos los elementos e$\in$E nulos en sus respectivas fibras.
A éste espacio se le puede identificar con el espacio base, porque son homeomorfos, así mismo podemos definir secciones sobre dicho espacio.
Definición 8. Una sección se denomina nula si s es una aplicación continua de E al espacio nulo $\widehat{E}$, ésto es, una sección nula, es la unión de los vectores nulos en todas las fibras.
Proposición 1. Toda sección s de un fibrado vectorial trivial ε_n tiene la forma $s(x) = (x, w(x))$ donde $w : X \to V^n$ es una función únivocamente definida para s.
Prueba.- Toda aplicación $s : X \to V^n$ tiene la forma $s(x) = (s'(x), w(x))$, donde $s' : X \to X$ y $w : X \to V^n$ son aplicaciones unicamente definidas por s.
Desde que p o s(x) = x, s es una sección si y solamente si s $s(x) = (x, f(x))$ para cada $x \in$ X. |
Al conjunto formado por todas las secciones de un fibrado vectorial E, lo denoremos por Γ(E).
Observación.-
Un fibrado vectorial trivial "n tiene secciones no nulas. Si:

$$s : X \to \varepsilon_n$$

$$x \mapsto (x, \upsilon_0), \qquad \upsilon_0 \in V - \{0\}$$

son secciones constantes, además p o $s(x) = p(x, \upsilon_0) = x$.
Teorema 1. Un fibrado vectorial n-dimensional $p \to X$ es isomorfo a un fibrado vectorial trivial, si y solo si, este tiene n secciones $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ de modo que $\{s_1(x), s_2(x) ...,\}$son linealmente independientes en cada fibra $p^{-1}(x)$.
Prueba.- Sea

$$\psi : X \times \mathbb{R}^n \to E$$

un isomorfismo de fibrados, entonces consideremos las secciones si $s_i = \psi(x,_i)$.

El caso contrario, sean $\{s_i\}_{i \in I}$ secciones linealmente independiente y construyamos la aplicación:

$$\psi : X \times \mathbb{R}^n \to E$$

dada por

$$\psi(x, v) = \sum_{i=1}^{n} v_i s_i(x)$$

por la definición de es un homeomorfismo que si restringimos a cada fibra es un isomorfismo de espacios vectoriales.

2. Materiales y métodos

2.1. Construcción de Fibrados Vectoriales

En ésta sección, mostraremos cómo construir fibrados vectoriales a partir de otros conocidos, entre los principales es usando una aplicación continua $f : X \to Y$ para transformar fibrados vectoriales sobre Y en fibrados vectoriales sobre X.
a) El Fibrado Restricción.- Sea X es un espacio topl´ogico, $Y \subset X$ subespacio de X y E un fibrado vectorial sobre X con proyección p entonces $E|_Y$ junto con la proyección $p : p^{-1}(Y) \to Y$ es un fibrado sobre Y, el cual llamaremos restricción de E a Y; las trivilizaciones se pueden elegir en forma natural como las aplicaciones rectricción si el caso lo amerita.
b) El Fibrado Inducido ó Pullback.- Este fibrado será uno de los mas empleados en éste trabajo y a la vez uno de los más importantes. Para su construcción tomaremos un fibrado vectorial (E,p,X) y una aplicación continua $f : X \to Y$ los fibrados vectoriales sobre X son inducidos por fibrados vectoriales sobre Y através de una construcción Pullback. Definamos el fibrado vectorial Pullback ó Inducido como:

$$f^*(E) = \{(x, e) \in X \times E; \quad f(y) = p(e)\}$$

con proyección

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^*(p) \quad : \quad f^*(E) &\longrightarrow X \\ (x, e) &\longmapsto x \end{aligned}$$

con fibras:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^*(p^{-1}(\{x\})) &= \boldsymbol{f}^*(E_x) \\ &= \{x\} \times p^{-1}(f(x)) \\ &= \{x\} \times E_{\boldsymbol{f}(x)} \end{aligned}$$

Siendo $f^*(p)^{-1}(x) =$e $\in$ E un espacio vectorial y $f^*(E)$ satisface la condición de trivialidad local cuando E lo es. En efecto: Sea (U, h) un sistema de coordenadas de E que satisface

$$h : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$$

si tomamos U1 = f−1(U) obtenemos:

$$\begin{aligned} h \quad : \quad U_1 \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow f^*(p)^{-1}(U_1) \\ (y, x) &\longmapsto (y, h(f(y), x)) \end{aligned} \quad :$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto vemos que $(f^*(E), f^*(p), X)$ es un fibrado vectorial sobre X.
Un ejemplo trivial que podemos mencionar es el siguiente. Sí f es la función inclusión de subespacios $Y \subset X$ entonces $f^*(E) \cong p^{-1}(y)$ así la restricción sobre el subespacio es un caso particular de Pullback.
c) El Fibrado Vectorial Producto.- Sean (E_1, p_1, X_1) y (E_2, p_2, X_2) fibrados vectoriales; el

producto $E_1 \times E_2$ es un fibrado vectorial, con proyección

$$p_1 \times p_2 \ : \ E_1 \times E_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$$
$$(e_1, e_2) \longmapsto (p_1(e_1), p_2(e_2))$$ p1 × p2 : E1 × E2 −!

y fibras

$$\begin{aligned}(E_1 \times E_2)_{(x_1,x_2)} &= (p_1 \times p_2)^{-1}((x_1, x_2)) \\ &= p_1^{-1}(x_1) \times p_2^{-1}(x_2) \\ &= E_{x_1} \times E_{x_2}\end{aligned}$$

Analicemos la condición de trivialidad local. Si tomamos $U = U_1 x U_2$ donde $p_1^{-1}(U_1) \cong U_1 \times \mathbb{R}^n$ y $p_1^{-1}(U_1) \cong U_1 \times \mathbb{R}^n$, obtenemos: $(p_1 \times p_2)^{-1}(U_1 \times U_2) \cong (U_1 \times U_2) \times \mathbb{R}^{n+m}$

d) El Fibrado Universal.- Para definir el fibrado universal primero introduciremos la noción del Grassmaniano infinito $\mathbb{G}_n$ que es la unión de las variedades Grasmanianas $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ formado por todos los planos n dimensionales en $\mathbb{R}^k$ que pasan por el origen. Comencemos definiendo el espacio vectorial: $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \ ; \ x_i \neq 0$ para un número finito de índices}

donde el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es visto como $(x_1, x_2, ..., 0...) \in \mathbb{R}^\infty$, así tenemos que $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty$. El Grassmaniano infinito se define como sigue:

$\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^\infty) = \{ B \text{ subespacios n- dimensionales de } \mathbb{R}^\infty \}$

Existe otra manera de definir el Grassmaniano infinito utilizando una relación de equivalencia que identifica las n-tuplas de vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^\infty$, para ello definamos el espacio:

$(\mathbb{R}^\infty)^n = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n); \ u_i \in \mathbb{R}^\infty \text{ son linealmente independiente}\}$

Sobre éste conjunto definamos una relación de equivalencia de la siguiente forma:

$(u_1, u_2, ..., u_n) \sim (\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n)$ si y sólo sí existe una matriz $(a_{ij})_{nn}$ no singular de modo que $(u_1, u_2, ..., u_n) = (a_{ij})_{nn}(\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n)$; notemos que al ocurrir esto la n-tupla $(u_1, u_2, ..., u_n)$ es combinación lineal de los vectores $(\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n)$ generando así el mismo espacio vectorial; ésto es los planos generados son los mismos. Si tomamos el cociente de éste espacio por esta relación de equivalencia podemos identificar un plano como una clase de equivalencia en el espacio cociente pudiendo concluir:

$$\mathbb{G}_n = (\mathbb{R}^\infty)^n / \sim$$

Luego definamos los conjuntos: $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) = \{(B, v) \in \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k; \ v \in B\}$ notemos que las inclusiones $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+1} \subset \cdots$ inducen las inclusiones $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^{k+1}) \subset \ldots$ y estas a su vez inducen las inclusiones $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^{k+1}) \subset \ldots$ Así podemos definir $\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_k \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ y $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_k \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)$ que es el fibrado universal (Ver [4][pgna 13]).

Con la ayuda de estas inclusiones podemos definir una topología sobre $\mathbb{G}_n$ tomando la aplicación inclusión $i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ induce una aplicación $I : \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{G}_n$ así un conjunto $A \in \mathbb{G}_n$ es abierto si y sólo si $A \cap \mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ es abierto en $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ para todo k llamada topología débil; análogo para $\mathbb{E}_n$.

Lema 1. $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)$ es un fibrado vectorial sobre $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^k)$ con proyección p(B, υ) = B para cada $k \leq \infty$.

Prueba.- Ver [4][pgna 13])

Las construcciones de fibrados vectoriales en base a los ya concidos, nos dan idea para definir operaciones entre ellos, aquí sólo desarrollaremos la Suma de Whitney pero también existe el producto de dos fibrados vectoriales denominado producto tensorial.

2.2. La Suma de Whitney

Si vemos a los fibrados vectoriales como una generalización de un espacio vectorial, esto es posible por la condición de trivialidad local de los fibrados vectoriales; podemos extender las operaciones entre espacios vectoriales a los fibrados vectoriales una de estas operaciones es la Suma de Whitney que es la generalización de la suma directa de dos espacios vectoriales.

La Suma de Whitney de dos fibrados vectoriales denotado por E $\oplus$ F es un fibrado vectorial, un caso particular de la restricción del Fibrado Vectorial Producto E × F sobre la diagonal $X = \{(x, x) \in X \times X\}$

Si E y F son fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base X, la Suma de Whitney es un fibrado vectorial definido como:

$\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F} = \{(e, f) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}; \quad p(e) = q(f)\}$

con proyección

$$p \oplus q \ : \ E \oplus F \longrightarrow X$$
$$(e, f) \longmapsto p(e) = q(f)$$

la fibra de $\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F}$ sobre $x \in X$, es el producto ó suma directa de los espacios vectoriales

$$\begin{aligned}(E \oplus F)_x &= p^{-1}(x) \times q^{-1}(x) \\ &= \{(e, f) / \quad p(e) = q(f) = x\} \\ &= E_x \oplus F_x\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F}, p \oplus q, X)$ es un fibrado vectorial con fibras que son la suma directa de espacios vectoriales de la suma de sus fibras.

Proposición 2. Sean E y F fibrados vectoriales sobre $X \ y \ f : X \to Y$ una aplicación continua entonces $f^*(\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F}) \cong f^*(\boldsymbol{E}) \oplus f^*(\boldsymbol{F})$.

Prueba.- Definamos la aplicación

$$\Phi \ : \ f^*(\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F}) \longrightarrow f^*(\boldsymbol{E}) \oplus f^*(\boldsymbol{F})$$
$$(x, (x, e, f)) \longmapsto (x, (x, e), (x, f))$$

es una aplicación continua y un isomorfismo en cada fibra y por lo tanto un isomorfismo de fibrados vectoriales. |

Proposición 3. Sean E y F fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base X entonces $\Gamma(E \oplus F) \cong \Gamma(E) \oplus \Gamma(F)$.

Prueba.- Si E y F son fibrados vectoriales entonces existe el isomorfismo:

$$\Psi \;:\; \Gamma(E \oplus F) \longrightarrow \Gamma(E) \oplus \Gamma(F)$$

$$s \longmapsto (s_1, s_2)$$

donde $s_1 : X \to E$ y $s_2 : X \to F$ con $s(x) = (s_1(x), s_2(x))$.

Observación.-

• Una de las consecuencias de la Suma de Whitney es: Si ε_n y ε_m son fibrados vectoriales triviales entonces $\varepsilon_n \oplus \varepsilon_m$ es un fibrado vectorial trivial puesto que existe el isomorfismo:

$$\phi \;:\; \varepsilon_n \oplus \varepsilon_m \longrightarrow \varepsilon_k$$

$$\big((x,v),(x,w)\big) \longmapsto (x, v+w)$$

donde $\upsilon + w = (\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n) + (w_1, w_2, ..., w_m = (\upsilon_1, ..., \upsilon_m) \in V^k$ con k = n+m.

• La suma de fibrados vectoriales no triviales puede ser trivial, para ser más exactos: Un fibrado vectorial trivial podría muy bien resultar de la suma de dos fibrados no triviales. Lo que establece precisamente el teorema de Swan que todo fibrado vectorial con espacio base compacto tiene un complemento para la cual la suma es trivial.

Teorema 2 (Swan). Sea (E, p,X) un fibrado vectorial localmente trivial sobre un espacio base compacto X entonces existe un fibrado vectorial localmente trivial F sobre X tal que la suma $E \oplus F$ es trivial.

Prueba.- Probaremos para el fibrado vectorial $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)$ (Ver Lema 1) para este fibrado vectorial existe el fibrado vectorial $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)^{\perp} = \{(B,v) \in \mathbb{G}_n \in \mathbb{R}^{\infty};\ v \perp B\}$.

Si identificamos $\mathbb{G}_n(\mathbb{R}^n)$ con $\mathbb{G}_{k-n}(\mathbb{R}^k)$ esto es posible tomando su complemento ortogonal; así el fibrado vectorial $\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k)^{\perp}$ sobre $\mathbb{G}_n$ con proyección:

$$p \;:\; \mathbb{E}^{\perp} \to \mathbb{G}_n$$

$$(B,v) \longmapsto B$$

coincide con el fibrado $E_{k-n}(\mathbb{R}^k)$ sobre $\mathbb{G}_{k-n}(\mathbb{R}^k)$.

Así la suma:

$\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) \oplus (\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k))^{\perp}$ es isomorfo al fibrado trivial $\mathbb{G}_n \times \mathbb{R}^k$ bajo la aplicación:

$$g \;:\; \mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k) \oplus (\mathbb{E}_n(\mathbb{R}^k))^{\perp} \longrightarrow \mathbb{G}_n \times \mathbb{R}^k$$

$$(B,v,w) \longmapsto (B, v+w)$$

con esto demostramos que la suma de dos fibrados vectoriales es trivial.

2.3. El Semigrupo V (X)

En la definici´on 5, vimos la noción de isomorfismo entre fibrados vectoriales, al agrupar en una clase a todos aquellos fibrados vectoriales E que sean isomorfos, nace la clase de los fibrados vectoriales isomorfos entre si, el cual denotaremos por:

[E] = {F fibrado vectorial; F ≅ E}

y la clase de los fibrados vectoriales triviales $\varepsilon_n = XxV^n$ lo denotaremos por [ε_n] donde n es la dimensión de V.

El conjunto de las clases de isomorfismos [E] de fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base X, lo denotaremos por:

V (X) = [E] ;E fibrado vectorial sobre X}

Al dotar a V (X) de la suma de Whitney este conjunto se convierte en un semigrupo conmutativo con identidad la clase 0 dimensional [ε_0].

Teorema 3. V (X) junto con la operación adición [E]+[F] = [E $\oplus$ F] es un semigrupo.

Prueba.- La suma de dos clases de equivalencia está bien definida: Puesto que si $E \cong E'$ y $F \cong F'$ entonces $E \oplus F \cong E' \oplus F'$ además V(X) es un semigrupo al verificar:

1. Asociativa: Sean E, F y G fibrados vectoriales sobre el mismo espacio base X, satisfacen $(E \oplus F) \oplus G \cong E \oplus (F \oplus G)$. En efecto; existe el isomorfismo:

$$\varphi \;:\; (E \oplus F) \oplus G \longrightarrow E \oplus (F \oplus G)$$

$$(x,(e,f),g) \longmapsto (x,e,(f,g))$$

2. Si E es un fibrado vectorial con proyección p:E→X existe el fibrado vectorial $q : \overline{E} \to X$ donde $\overline{E} = X \times \{0\}$ el cual satisface $E \oplus \widehat{E} \cong E$.|

Otra forma de ver al semigrupo V (X) es como la imagen del un espacio topológico compacto; es decir V es un funtor contravariante (Ver Definición 2) entre las categorías de espacios compactos y semigrupos abelianos (Ver Definición 1). Aquí es donde veremos a V(X) de una manera funcional del siguiente modo: Si $f : Y \to X$ es una aplicación continua induce un homomorfismo:

$$V(f) \;:\; V(X) \longrightarrow V(Y)$$

$$[E] \longmapsto [f^*(E)]$$

donde $f^*(E)$ es el fibrado vectorial sobre Y (Fibrado Pullback). Con esta identificación V preserva la identidad y la composición de isomorfismos. Si $g : Y \to Z$ es otra aplicación continua entonces $gof : X \to Z$ induce:

$$V(g \circ f) \;:\; V(Z) \longrightarrow V(X)$$

$$[F] \longmapsto [f^*(E)]$$

$$V(Z) \xrightarrow{V(g)} V(Y) \xrightarrow{V(f)} V(X)$$

$$V(f) \circ V(g) \;:\; V(Z) \longrightarrow V(X)$$

$$[F] \longmapsto [(g \circ f)^*(F)]$$

$$V(g \circ f) \;:\; V(Z) \longrightarrow V(X)$$

además los fibrados Pullback satisface:

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

así mismo preserva la identidad *Id: X →X.*

$$V(Id) \ : \ V(X) \longrightarrow V(X)$$

$$[E] \longmapsto [Id^*(E)]$$

con estas aplicaciones se demuestra que V es un funtor contravariante.

Ejemplo 7. Si X = {p} con p un punto tenemos que el fibrado vectorial sobre X es trivial. V (X) $\cong \mathbb{N}$.

3. Conclusiones

• Podemos concluir que el semigrupo V (X) puede ser formado topológicamente en base a los fibrados vectoriales como vimos en la sección 3.3 de este trabajo pero no es la única forma púes el semigrupo V (X) puede ser formado de una manera algebraica como clases de anillos, algebras (Ver [2]) isomorfos entre sí, obviamente existe una teoría que garantiza este hecho.

• Así mismo concluimos que V (X) abre las puertas a la teoría de los K-grupos topológicos ó algebraicos dependiendo de cuales son nuestras estructuras.

4. Referencias bibliográficas

James Munkres, Topolog´ıa un Primer Curso, New Jersey 1975.

Sze-Tsen Hu, Introducción al álgebra Homológica, Ed. Vicens-Vives 1974.

Manfredo Do Carmo, Geometría Reimanniana, 1998.

Allen Hatcher, Vector Bundles and K- Teoría, 1998.

Lang Serge, Complex Analysis, Addison -Wesley Publishing Company in Andsterdan, 1977.

Atiyah, M. F., Topologia Universal, Topology 3, Suppl. 1, 3-38, 1964.