

Los Procesos de Supratransmisión e Infratransmisión en Arreglos Discretos de Conjunciones de Josephson

Dr. Jorge Eduardo Macías Díaz ¹

RESUMEN

Los nuevos fenómenos de supratransmisión e infratransmisión han sido predichos numéricamente en ciertos sistemas no lineales discretos y, en algunos casos, aproximados analíticamente en límites al caso continuo; sin embargo, el mecanismo matemático que modela al caso discreto no ha sido develado del todo. En este trabajo, se hace uso de una nueva técnica computacional no estándar con propiedades de consistencia en energía, a efecto de predecir numéricamente la ocurrencia de dichos fenómenos en arreglos discretos de conjunciones de Josephson sometidos a amortiguamiento externo y a los efectos de corrientes de Josephson, en donde el modelo matemático involucra un problema de Neumann de valores en la frontera para un sistema de ecuaciones de seno-Gordon acopladas.

Palabras clave: supratransmisión e infratransmisión no lineales, conjunciones de Josephson, corriente de Josephson, superconductividad, análisis de bifurcación, esquemas numéricos no estándares, ecuación de seno-Gordon, amortiguamiento externo.

Key words: nonlinear supratransmission and infratransmissions, Josephson junctions, Josephson current, superconductivity, bifurcation analysis, nonstandard numerical techniques, sine-Gordon, external damping.

Recibido 16 de Febrero de 2007, Aceptado 14 de Junio de 2007

¹ Profesor Investigador de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, Centro de Ciencias Básicas, Departamento de Matemáticas y Física. Correo electrónico: jemacias@correo.uaa.mx

ABSTRACT

The recently discovered phenomena of supratransmission and infratransmission have been predicted numerically in certain discrete nonlinear systems, and in some cases approximated analytically in continuous-limit scenarios, yet the mathematical apparatus of the fully discrete case is not completely understood. In this paper, it is used a recently-developed non-standard, energy-based method in order to predict numerically the occurrence of these processes in discrete Josephson junction arrays submitted to external damping and nonzero normalized bias current, where the underlying model is a Neumann boundary-value problem involving a system of coupled sine-Gordon equations.

INTRODUCCIÓN

El proceso de *supratransmisión no lineal* consiste en el incremento repentino de la amplitud de las señales de onda transmitidas en una cadena de osciladores acoplados, debido a una perturbación armónica en uno de los extremos que irradia con una frecuencia en el ancho de banda prohibida. El fenómeno fue descubierto inicialmente en cadenas acopladas de osciladores mecánicos descritos por ecuaciones del tipo de seno-Gordon y Klein-Gordon (Geniet y Leon 2002), e inmediatamente fue estudiado en cadenas descritas por ecuaciones del tipo doble seno-Gordon (Geniet y Leon 2003), en sistemas de Fermi-Pasta-Ulam (Khomeriki *et al.*, 2004), en medios de Bragg bajo regímenes no lineales de Kerr (Leon y Spire 2004) y, recientemente, también en medios continuos, no lineales, acotados, descritos por ecuaciones de seno-Gordon (Khomeriki y Leon, 2005).

El estudio del proceso de supratransmisión no lineal en sistemas de seno-Gordon sin amortiguamiento ha sido efectuado analíticamente a través del estudio de estructuras coherentes llamadas *modos intrínsecos no lineales*, y los resultados han aportado buenas predicciones sobre la ocurrencia del proceso. En el caso de sistemas de seno-Gordon con amortiguamiento débil, la investigación se ha centrado tanto en el análisis del caso sin amortiguamiento como en el uso de métodos numéricos. Así, por ejemplo, el uso de algoritmos de convergencia cuadrática y métodos que satisfacen condiciones de consistencia en energía han mostrado aportar resultados por demás satisfactorios (Macías-Díaz y Puri, 2007a).

Por otra parte, el proceso de *infratransmisión no lineal*, en contraposición al de supratransmisión, consiste en un repentino decremento en la amplitud de las señales ondulatorias en una cadena perturbada armónicamente en su extremo. Un sistema que posee umbrales de supratransmisión e infratransmisión exhibe un comportamiento de estabilidad dual que lo convierte en una extraordinaria materia prima para aplicaciones físicas. Por ejemplo, el modelo de Fermi-Pasta-Ulam ha demostrado poseer ambos procesos (Khomeriki *et al.*, 2004), y se ha encontrado evidencia analítica de la existencia del proceso de infratransmisión en arreglos discretos de uniones de Josephson (Chevrieux *et al.*, 2006), esto es, arreglos periódicos de materiales superconductores ligados por una barrera aislante (Barone y Paterno, 1982); sin embargo, la literatura

en el área aún carece de una buena predicción numérica en este último caso.

Ciertamente, los procesos de supratransmisión e infratransmisión no lineales son complementarios uno del otro. Intuitivamente, un sistema que posee ambos procesos tiene propiedades por demás interesantes. Por ejemplo, una vez que la amplitud de la perturbación armónica del sistema haya alcanzado el umbral de supratransmisión, el sistema seguirá irradiando energía aun cuando la amplitud de la fuente decrezca. No será sino hasta que dicha amplitud alcance valores inferiores al umbral de infratransmisión cuando el sistema cesará de transmitir energía.

Desde un punto de vista experimental, el fenómeno de supratransmisión en medios no lineales descrito por ecuaciones del tipo seno-Gordon fue observado en sistemas mecánicos de péndulos acoplados (Geniet y Leon, 2003), e inmediatamente fue posible realizar aplicaciones al diseño de amplificadores digitales de señales ultradébiles (Khomeriki *et al.*, 2006), y detectores de luz sensibles a excitaciones débiles (Chevrieux *et al.*, 2006). Más aún, recientemente se han propuesto algunas aplicaciones del proceso de supratransmisión al diseño de dispositivos ópticos de conducción de ondas que hacen uso de la ecuación no lineal de Schrödinger (Khomeriki, 2004), a la realización de filtros de luz (Khomeriki y Ruffo, 2005), y a la transmisión de información binaria en sistemas infinitos de osciladores acoplados (Macías-Díaz y Puri, 2007b. Macías-Díaz y Puri, 2007c).

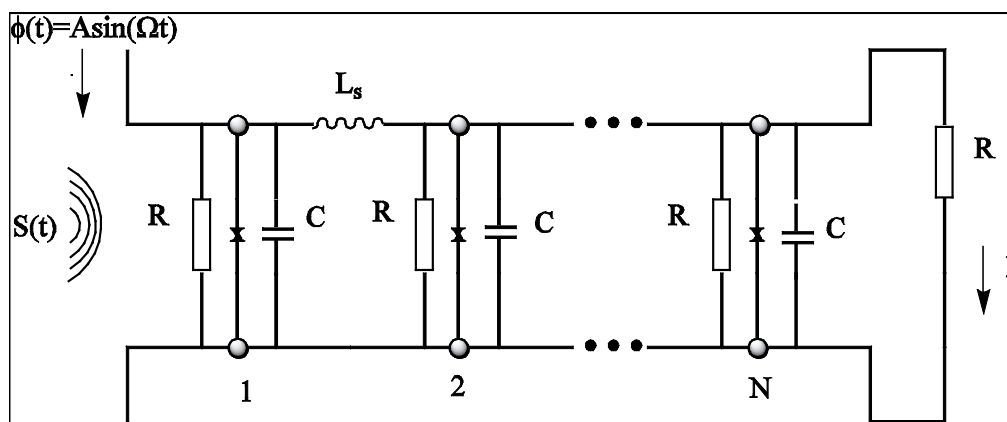


Figura 1. Diagrama de un arreglo finito de uniones de Josephson acopladas.

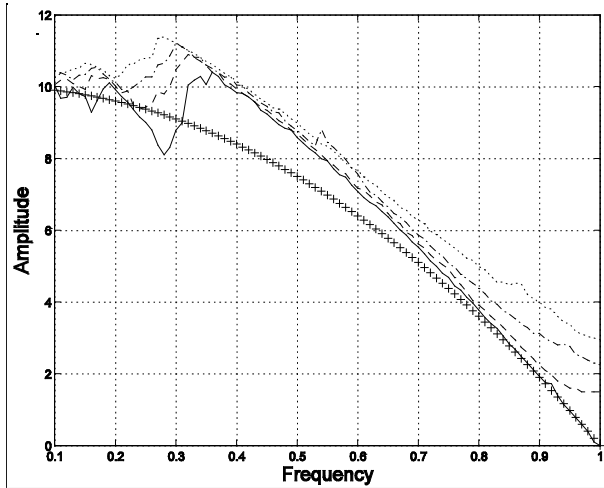


Figura 2. Diagrama de bifurcación de la ocurrencia de la amplitud crítica vs. frecuencia de la perturbación para el problema (2), con $c = 5$ y $\gamma = 0$ (continua), 0.1 (discontinua), 0.2 (discontinua-punteada), 0.3 (punteada). La predicción proporcionada por (3) se representa como una sucesión de cruces.

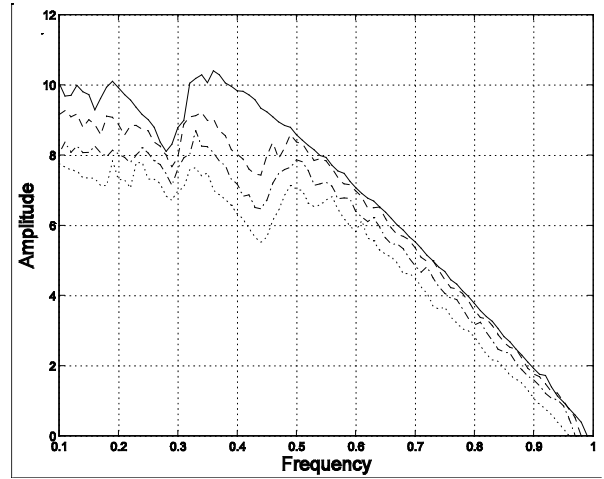


Figura 3. Diagrama de bifurcación de la ocurrencia de la amplitud crítica vs. frecuencia de la perturbación para el problema (2), con $c = 5$ y $\mu = 0$ (continua), 0.1 (discontinua), 0.2 (discontinua-punteada), 0.3 (punteada).

MODELO MATEMÁTICO

Este artículo asume que γ y c son números reales no negativos. Así mismo, se considera un sistema $(u_n)_{n=1}^N$ de N conjunciones de Josephson acopladas por medio de cables superconductores, que satisfacen el problema discreto de valor inicial:

$$\begin{aligned} & \dot{u}_1 - c^2(u_2 - u_1) + \gamma \dot{u}_1 + \sin u_1 = \mu + \phi(t), \\ & \dot{u}_n - c^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \gamma \dot{u}_n + \sin u_n = \mu, \quad \text{para } 1 < n < N, \\ & \dot{u}_N - c^2(u_{N-1} - u_N) + \gamma \dot{u}_N + \sin u_N = \mu - I, \end{aligned} \tag{1}$$

sujeto a: $\begin{cases} u_n(0) = 0, & 1 \leq n \leq N, \\ \frac{du_n}{dt}(0) = 0, & 1 \leq n \leq N. \end{cases}$

El parámetro c es llamado el *coeficiente de acoplamiento*, γ es denominado el *coeficiente de amortiguamiento externo*, y μ es la *corriente de Josephson* del sistema. Las funciones \dot{u} y \ddot{u} representan, respectivamente, la primera y la segunda derivada de u con respecto al tiempo. La función I es la *intensidad de corriente de salida*, mientras que la función ϕ , llamada la *función de intensidad de entrada*, se supone continuamente diferenciable sobre $(0, \infty)$. Un diagrama típico de un arreglo discreto de conjunciones de Josephson se muestra en la Figura 1.

No es difícil verificar que la introducción de las funciones temporales u_0 y u_{N+1} definidas por las relaciones $u_0 - u_1 = \phi(t)/c^2$ y $u_{N+1} - u_N = 0$, respectivamente, transforma el problema (1) en el problema de valores mixtos:

$$\begin{aligned} & \dot{u}_n - c^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \gamma \dot{u}_n + \sin u_n = \mu \quad (1 \leq n \leq N), \\ & \begin{cases} u_n(0) = 0, & 1 \leq n \leq N, \\ \frac{du_n}{dt}(0) = 0, & 1 \leq n \leq N, \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

sujeto a: $\begin{cases} u_0 - u_1 = \frac{\phi(t)}{c^2}, & t \in (0, \infty), \\ u_{N+1} - u_N = 0, & t \in (0, \infty). \end{cases}$

Aquí $\gamma_n = \gamma + \delta_N(n)$, donde δ_N es la función delta de Kronecker. La función R es llamada la *resistencia de salida*, y está relacionada con la intensidad de corriente de salida a través de la ley de Ohm: $I = u_N / R$.

Es importante notar que, para acoplamiento fuerte, este problema puede ser aproximado mediante uno de Neumann de valores en la frontera a espacio continuo, basado en una ecuación perturbada de seno-Gordon (Chevrieux et al., 2006). Es también digno de observar que el Hamiltoniano de la n -ésima conjunción está dado por la expresión:

$$H_n = \frac{1}{2} [\dot{u}_n^2 + c^2(u_{n+1} - u_n)^2] + 1 - \cos u_n.$$

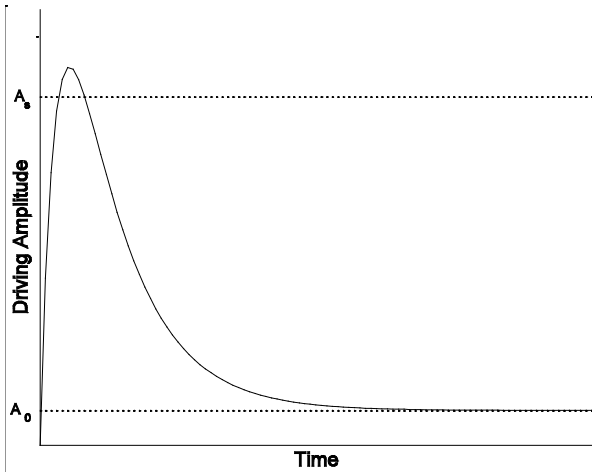


Figura 4. Gráfica de la función de amplitud (3) cuando la amplitud A_0 apenas ha sobrepasado el umbral de infratransmisión.

Una vez incluido el potencial del acoplamiento entre las dos primeras conjunciones, se obtiene que la energía total del sistema está dada por:

$$E = \sum_{n=1}^N H_n + \frac{c^2}{2} (u_1 - u_0)^2.$$

Una simple integración de esta fórmula sobre un intervalo finito de tiempo proporciona la energía administrada al sistema durante dicho intervalo.

El caso de una cadena infinita de conjunciones de Josephson acopladas y perturbadas armónicamente en un extremo, reviste particular interés. En esta situación, es posible verificar (Macías-Díaz y Puri, 2007a) que la razón de cambio de la energía del sistema con respecto al tiempo es proporcionada por la fórmula:

$$\frac{dE}{dt} = \phi(t)\dot{u}_0 - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{u}_n)^2.$$

Finalmente, es menester mencionar de una vez por todas que las perturbaciones armónicas revestirán particular interés en el presente trabajo. Más concretamente, en este artículo se estudiarán perturbaciones descritas por la ecuación $\phi(t) = A \sin(\Omega t)$, donde A y Ω son constantes positivas.

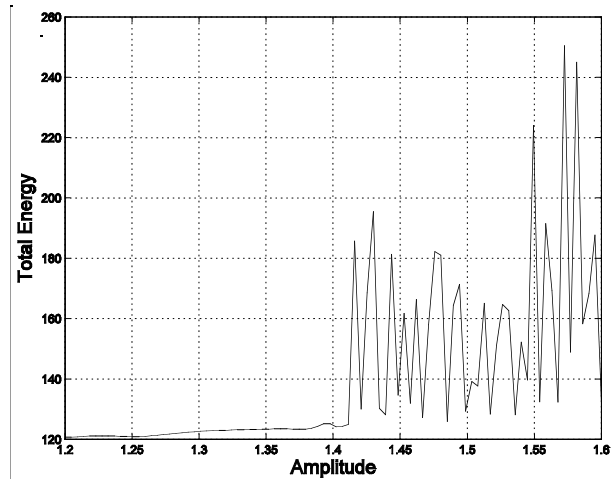


Figura 5. Gráfica de energía total vs. amplitud en un arreglo discreto de conjunciones de Josephson con $\gamma = \mu = 0$, $c = 5$, $\Omega = 0.9$, con amplitud dada por (4) y sobre un periodo de tiempo de 6 000.

ESQUEMA NUMÉRICO

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales (2), y tómesese una partición regular $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_M = T$ del intervalo de tiempo $[0, T]$ con tamaño de paso Δt . Para cada $k = 0, 1, \dots, M$, represéntese la solución aproximada del problema en la n ésima conjunción de Josephson al tiempo t_k mediante u_n^k , y con venga que $\delta_t u_n^k = u_n^{k+1} - u_n^{k-1}$, $\delta_x^2 u_n^k = u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}$ y $\delta_x^2 u_n^k = u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k$. Con el fin de poseer expresiones discretas de energía que consistentemente aproximen a sus contrapartes continuas, las ecuaciones diferenciales a tiempo continuo serán aproximadas a través de las expresiones discretas:

$$\frac{\delta_t^2 u_n^k}{(\Delta t)^2} - c^2 \delta_x^2 u_n^k + \frac{\gamma_n}{2\Delta t} \delta_t u_n^k + \frac{V(u_n^{k+1}) - V(u_n^{k-1})}{u_n^{k+1} - u_n^{k-1}}, \quad \text{para } n = 1, \dots, N.$$

Aquí definimos $V(u) = 1 - \cos u$. En este punto, hay que precisar que el esquema de diferencias finitas presentado (el cual es una versión modificada del esquema presentado en Macías y Puri (2005) para aproximar soluciones con simetría radial de ciertas ecuaciones modificadas del tipo Klein-Gordon) es consistente con el problema bajo estudio en este artículo, que es condicionalmente estable y que posee propiedades de consistencia en energía, indispensables en el análisis del proceso de transmisión de energía en el medio bajo estudio (Macías-Díaz y Puri, 2007a). Más aún, la manera en la que se aproxima la derivada de la función V hace que la técnica sea no estándar.

Con el fin de simular arreglos discretos de conjunciones de Josephson de longitud infinita, es menester considerar un sistema finito de ecuaciones diferenciales que satisfagan (2), de longitud N relativamente grande, en el que cada γ_n incluye tanto el efecto de amortiguamiento externo, como el efecto de una frontera absorbente que crece lentamente en magnitud en los últimos $N - N_0$ nodos. Más precisamente, defínase:

$$\gamma_n = \kappa \left[1 + \tanh\left(\frac{2n - N_0 + N}{2\sigma}\right) \right] + \gamma + \frac{1}{R} \delta_N(n),$$

donde, para cuestiones prácticas, se tomará $\kappa = 0.5$, $\sigma = 3$, $N = 60$ y $N_0 = 50$.

ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN

La existencia de un umbral de supratransmisión de la energía inyectada en un arreglo finito de conjunciones de Josephson (2) mediante una perturbación armónica irradiando con una frecuencia en el ancho de banda prohibido $\Omega < 1$, ha sido recientemente demostrada en el proceso límite, y predicha numéricamente en el caso discreto sin amortiguamiento ni corriente de Josephson (Chevrieux *et al.*, 2006, Khomeriki *et al.*, 2006). Auxiliados por el esquema numérico del presente trabajo, es posible aproximar la ocurrencia del proceso no lineal de supratransmisión para cada frecuencia en el ancho de banda prohibido del sistema (2), estimando el valor de la amplitud de la perturbación armónica para la cual se presenta un crecimiento drástico en la energía total del sistema. En el caso continuo, el umbral de amplitud A_s , para el cual este fenómeno acontece, se encuentra relacionado con Ω por medio de:

$$A_s = 2c(1 - \Omega^2). \quad (3)$$

En una primera etapa, se procede a obtener numéricamente la energía total de un sistema sin corriente de Josephson y $c = 5$, durante un periodo finito de tiempo. Varios valores de amortiguamiento son considerados, de lo que se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 2. Note que el diagrama de bifurcación que representa el caso sin amortiguamiento exhibe una buena concordancia con la predicción proporcionada por el caso continuo, al menos para valores altos de la frecuencia. Así mismo, es interesante observar que la aparición del umbral de supratransmisión

se ve retrasada por la presencia de coeficientes de amortiguamiento distintos de cero.

También es altamente deseable determinar el papel de la corriente de Josephson en la ocurrencia del umbral de supratransmisión no lineal. La Figura 3 muestra diagramas de bifurcación para varios valores de la corriente de Josephson. Es claro que el efecto de la constante no negativa μ es el decrecimiento del valor del umbral donde el proceso de supratransmisión comienza.

Por otra parte y como se mencionó anteriormente, la existencia del umbral de infratransmisión no lineal fue establecida por Chevrieux *et al.*, 2006. Sin embargo, el trabajo no proporciona ningún diagrama de bifurcación de ocurrencia del proceso. Con el fin de proporcionar predicciones del umbral de infratransmisión para frecuencias Ω en el ancho de banda prohibido y con umbral de supratransmisión A_s , se fija una función de amplitud de la forma:

$$A(t) = A_s(1 - e^{-t/\tau_1}) + (A_0 - A_s)(1 - e^{-t/\tau_2}), \quad (4)$$

donde $\tau_2 \gg \tau_1$. Una gráfica típica de esta función se representa en la Figura 4 para un valor de A_0 apenas mayor que el valor del umbral de infratransmisión.

Para propósitos numéricos, se ha fijado un tiempo de 6 000, y se toma un sistema de 60 conjunciones de Josephson, sin amortiguamiento ni corriente de Josephson. Se toma un coeficiente de acoplamiento de 5 y una frecuencia de 0.9, para la cual el umbral de supratransmisión no lineal es igual a 1.945. Se asignan varios valores de la amplitud de prueba A_0 , y se calcula la energía total del sistema para cada uno de dichos valores. Bajo tales circunstancias, la Figura 5 presenta el resultado de perturbar armónicamente el sistema de conjunciones de Josephson con amplitud descrita por (4), cuando $\tau_1 = 10$ y $\tau_2 = 100$. En dicha gráfica se puede observar un cambio drástico en el comportamiento de la energía total con respecto al valor de la amplitud de prueba alrededor del valor 1.41, el cual es identificado como el umbral de infratransmisión no lineal para $\Omega = 0.9$.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

En el presente artículo, se ha logrado calcular diagramas de bifurcación de ocurrencia del fe-

nómeno no lineal de supratransmisión de energía en cadenas lineales de conjunciones de Josephson acopladas con cables superconductores. Los diagramas han sido calculados a partir de un novedoso método numérico con propiedades computacionales idóneas para el estudio del proceso de supratransmisión. Los cálculos presentados muestran que el fenómeno de supratransmisión se encuentra presente, aun ante la presencia de efectos de disipación y corrientes de Josephson. Más aún, los resultados muestran que el umbral de supratransmisión se ve dilatado por la presencia de amortiguamiento externo, y apresurado ante la presencia de corrientes de Josephson.

Cabe hacer notar que el mismo tipo de conclusiones cualitativas fue obtenido previamente en el análisis de cadenas acopladas de osciladores armónicos (Macías-Díaz y Puri, 2007a, 2007b, 2007c). En aquellos casos, el modelo consistió en una clase de ecuaciones de seno-Gordon acopladas, sujeto a condiciones de frontera de Dirichlet,

mientras que el modelo del presente artículo hace uso de condiciones de Neumann.

Así mismo, este trabajo ha proporcionado un método para aproximar el valor del umbral de infratransmisión, usando el esquema numérico descrito en Macías y Puri (2005). En vista de que la literatura especializada carece de una aproximación analítica, la validez de los resultados proporcionados será el tema de investigación en un trabajo futuro. A la fecha, ya se poseen algunas generalizaciones parciales del presente artículo en proceso de revisión (Macías-Díaz y Puri, 2007d), y se estudian posibles aplicaciones al diseño de amplificadores digitales de luz sensibles a excitaciones ultradébiles.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su profundo agradecimiento a los evaluadores por sus valiosos comentarios. El presente artículo fue realizado bajo las siglas del proyecto de investigación PIM07-2 en la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

BIBLIOGRAFÍA

1. BARONE, A. and G., PATERNO, *Physics and Applications of the Josephson Effect*. New York: John Wiley and Sons, 1982.
2. CHEVRIEUX, D.; R., KHOMERIKI and LEON, J., Bistable transmitting nonlinear directional couplers, *Mod. Phys. Lett. B*. 20, pp. 515-532, 2006.
3. GENIET, F. and J., LEON, "Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain", *Phys. Rev. Lett.* 89, 134102, 2002.
4. GENIET, F. and J., LEON, "Nonlinear supratransmission", *J. Phys.: Condens. Matter*. 15, pp. 2933-2949, 2003.
5. KHOMERIKI, R., "Nonlinear band gap transmission in optical waveguide arrays", *Phys. Rev. Lett.* 92, 063905p., 2004.
6. KHOMERIKI, R. and LEON, J., "Bistability in sine-Gordon: the ideal switch", *Phys. Rev. E*. 71, 056620 p., 2005.
7. KHOMERIKI, R., LEON, J. and CHEVRIEUX, D., "Quantum hall bilayer digital amplifier", *Euro. Phys. J. B*. 49, pp. 213-218, 2006.
8. KHOMERIKI, R., LEPRI, S. and RUFFO, S., "Nonlinear supratransmission and bistability in the Fermi-Pasta-Ulam model", *Phys. Rev. E*. 70, 066626 p., 2004.
9. KHOMERIKI, R. and RUFFO, S., "Nonadiabatic Landau-Zener tunneling in waveguide arrays with a step in the refracting index", *Phys. Rev. Lett.* 94, 113904 p., 2005.
10. LEON, J. and SPIRE, A., "Gap soliton formation by nonlinear supratransmission in Bragg media", *Phys. Lett. A*. 327, pp. 474-480, 2004.
11. MACÍAS-DÍAZ, J. E. and PURI, A., "A numerical method for computing radially symmetric solutions of a dissipative nonlinear modified Klein-Gordon equation", *Num. Meth. Part. Diff. Eq.* 21, pp. 998-1015, 2005.
12. MACÍAS-DÍAZ, J. E. and PURI, A., "An energy-based computational method in the analysis of the transmission of energy in a chain of coupled oscillators", *J. Comp. Appl. Math.* Aceptado, 2007a.
13. MACÍAS-DÍAZ, J. E. and PURI, A., "On the propagation of binary signals in damped mechanical systems of oscillators", *Physica D*. 228, pp. 112-121, 2007b.
14. MACÍAS-DÍAZ, J. E. and PURI, A., "An application of nonlinear supratransmission to the propagation of binary signals in semi-infinite mechanical systems of coupled oscillators", *Phys. Lett. A*. Aceptado, 2007c.
15. MACÍAS-DÍAZ, J. E. and PURI, A., "On the transmission of binary bits in discrete Josephson-junction arrays", *Phys. Rev. B*, sometido a revisión, 2007d.