

# Sobre la transmisión de señales ondulatorias solitarias en arreglos discretos de uniones de Josephson

Dr. Jorge Eduardo Macías Díaz <sup>1</sup>

## RESUMEN

El problema del control de transmisión de información binaria, en arreglos discretos de uniones de Josephson con amortiguamiento sujetos a una perturbación armónica que irradia en frecuencias dentro del ancho de banda prohibida, es resuelto y optimizado mediante la implementación de los procesos no lineales de supratransmisión e infratransmisión de energía. Los resultados numéricos establecen que una transmisión óptima puede ser lograda mediante el uso de perturbaciones de una función específica de modulación de amplitud llamada semilla, definida en términos de los umbrales de supratransmisión e infratransmisión.

## ABSTRACT

The present work uses the processes of nonlinear supratransmission and infratransmission in order to solve the problem of propagating binary bits in finite, discrete Josephson-junction arrays with

**Palabras clave:** Supratransmisión e infratransmisión no lineales, ecuación de seno-Gordon, uniones de Josephson, amortiguamiento externo, corriente de Josephson, análisis de bifurcación, métodos numéricos no estándares, ondas solitarias.

**Key words:** *Nonlinear supratransmission and infratransmission, sine-Gordon equation, Josephson junctions, external damping, Josephson current, bifurcation analysis, nonstandard numerical techniques, solitary waves.*

Recibido: 20 de febrero de 2007, aceptado: 14 de junio de 2007

damping, driven harmonically at one end under a frequency in the forbidden band gap. Our computations show that a perfect transmission can be achieved when the driving function is expressed as a pulse-perturbation of a sinusoidal seed, defined in terms of the supratransmission and infratransmission thresholds.

## INTRODUCCIÓN

El proceso de *supratransmisión no lineal* consiste en el incremento repentino de la amplitud de las señales de onda transmitidas en una cadena de osciladores acoplados, debida a una perturbación armónica en uno de los extremos que irradia con una frecuencia en el ancho de banda prohibida. Este fenómeno ha sido encontrado en sistemas físicos de diversa índole, donde los modelos involucrados van desde modelos discretos regidos por ecuaciones del tipo de seno-Gordon y Klein-Gordon (Geniet y Leon, 2002), doble seno-Gordon (Geniet y Leon, 2003), Fermi-Pasta Ulam (Khomeriki *et al.*, 2004), Bragg (Leon y Spire, 2004), así como en medios continuos (Khomeriki y Leon, 2005).

Cabe mencionar que recientemente se ha encontrado evidencia analítica sobre la existencia de un proceso no lineal en arreglos discretos de uniones de Josephson (Chevrieux *et al.*, 2006) que, en contraposición al proceso de supratransmisión, consiste en un repentino decremento en la amplitud de las señales ondulatorias en una cadena perturbada armónicamente en su extremo. Este nuevo fenómeno ha sido llamado *infratransmisión no lineal*, y un sistema que posee umbrales de supratransmisión e infratransmisión exhibe un comportamiento de estabilidad dual que lo convierte en

<sup>1</sup> Universidad Autónoma de Aguascalientes, Centro de Ciencias Básicas, Departamento de Matemáticas y Física, correo electrónico: jemacias@correo.uaa.mx.

una extraordinaria materia prima para aplicaciones físicas.

El uso de algoritmos de convergencia cuadrática y de métodos numéricos no estándares que satisfacen condiciones de consistencia en energía, han mostrado aportar resultados por demás satisfactorios en la predicción del proceso de supratransmisión no lineal (Macías-Díaz y Puri, 2007a). En la actualidad, la literatura especializada en el tema incluye una variedad de aplicaciones de tales métodos numéricos, que van desde la emisión de señales binarias en cadenas de osciladores acoplados (Macías-Díaz y Puri, 2007b, Macías-Díaz y Puri, 2007c), hasta el diseño de amplificadores, filtros y detectores digitales ultrasensibles (Khomeriki *et al.*, 2006, Chevrieux, 2006, Khomeriki y Ruffo, 2005) y la realización de dispositivos ópticos de conducción de ondas (Khomeriki, 2004). Por su parte, el presente artículo está dedicado a exponer una aplicación del proceso de supratransmisión a la transmisión de información binaria en arreglos discretos de conjunciones de Josephson con amortiguamiento débil.

Es conveniente mencionar que el estudio numérico de la transmisión de ondas en estructuras de Josephson sometidas a radiaciones armónicas fue iniciado a mediados de la década de los 80's (Olsen y Samuelsen, 1986), y la investigación se extendió de inmediato a arreglos de conjunciones cortas acopladas a través de cables superconductores (Barday y Remoissenet, 1990). El estudio de la estabilidad dual en conjunciones de Josephson fue el tema central en estos trabajos, estudio que fue continuado ulteriormente a través del análisis de perturbaciones con resultados parcialmente satisfactorios (Kivshar *et al.*, 1992), hasta que finalmente el aparato analítico para el caso continuo y sin amortiguamiento fue revelado recientemente en un par de artículos por demás interesantes de Leon y coautores (Chevrieux *et al.*, 2006, Khomeriki y Leon, 2005).

## MODELO MATEMÁTICO

En lo que resta del presente trabajo, se asumirá que  $\gamma$  y  $c$  son números reales no negativos, y

que la sucesión finita  $(u_n)_{n=1}^N$  representa las fases de una cadena de  $N$  conjunciones de Josephson acopladas por medio de cables superconductores. En otras palabras, se satisface el problema discreto de valor inicial:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 - c^2(u_2 - u_1) + \gamma \dot{u}_1 + \sin u_1 &= \mu + \phi(t), \\ u_n - c^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \gamma \dot{u}_n + \sin u_n &= \mu \quad (1 < n < N), \\ u_N - c^2(u_{N-1} - u_N) + \gamma \dot{u}_N + \sin u_N &= \mu - I, \end{aligned} \quad (1)$$

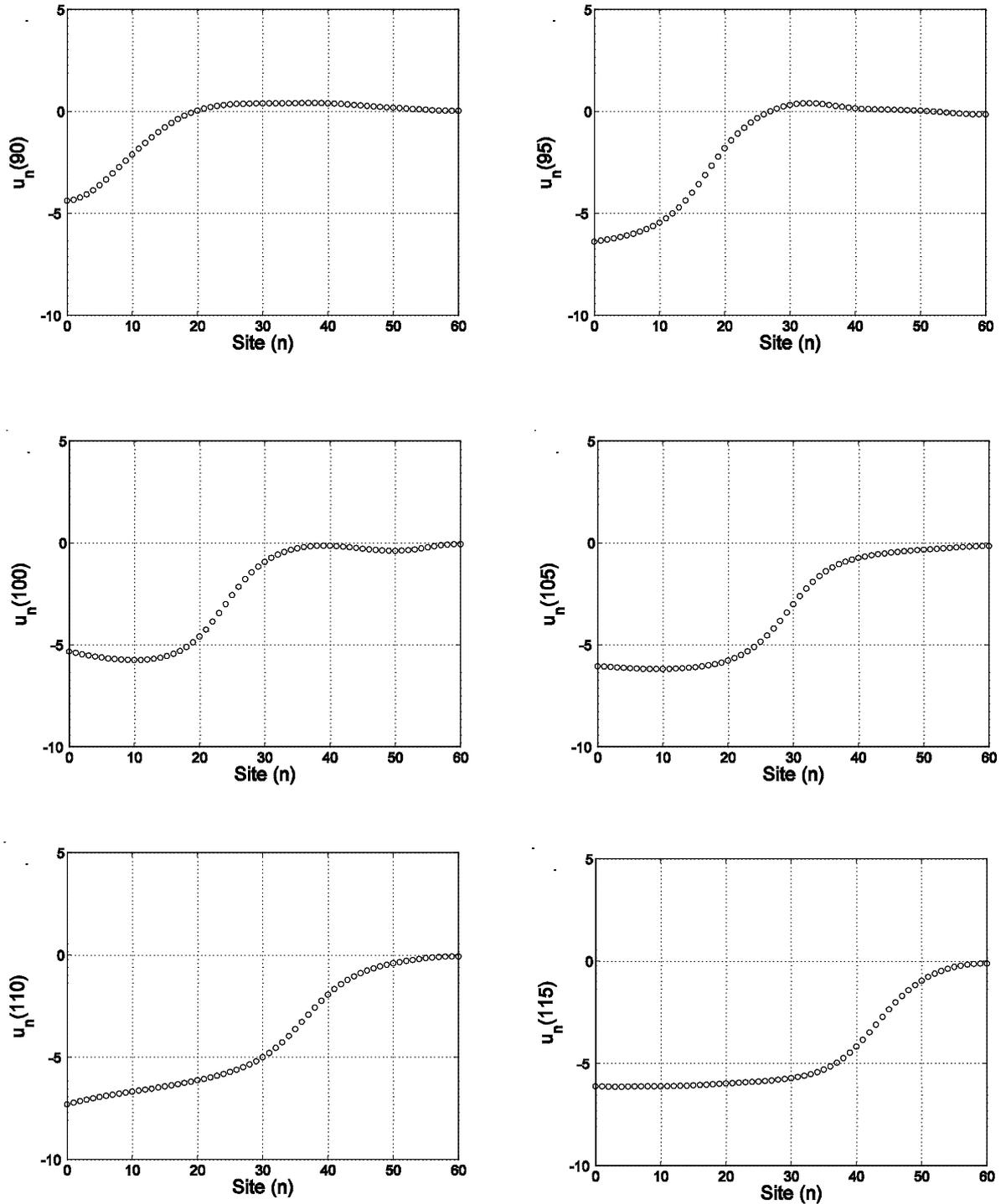
sujeto a :  $\begin{cases} u_n(0) = 0, & 1 \leq n \leq N, \\ \frac{du_n}{dt}(0) = 0, & 1 \leq n \leq N. \end{cases}$

El parámetro  $c$  es llamado el *coeficiente de acoplamiento*,  $\gamma$  es denominado el *coeficiente de amortiguamiento externo*, y  $\mu$  es la *corriente de Josephson* del sistema. Las funciones  $\dot{u}$  y  $\ddot{u}$  representan, respectivamente, la primera y la segunda derivada de la función  $u$  con respecto al tiempo. La función  $I$  es la *intensidad de corriente de salida*, mientras que  $\phi$ , llamada la *función de intensidad de entrada*, se supone continuamente diferenciable sobre  $(0, \infty)$ .

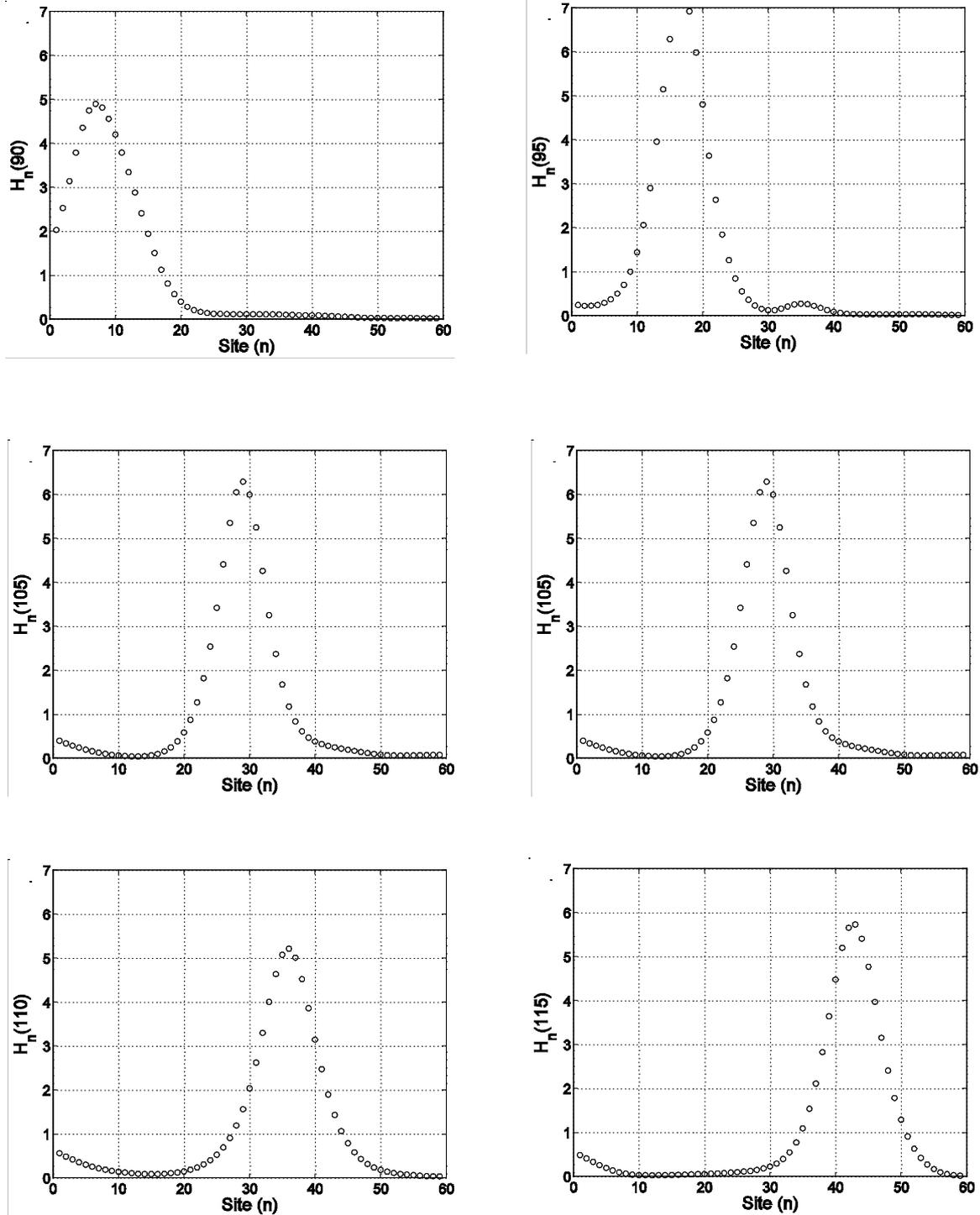
Es fácil constatar que la introducción de las funciones temporales  $u_0$  y  $u_{N+1}$ , definidas por las relaciones  $u_0 - u_1 = \phi(t)/c^2$  y  $u_{N+1} - u_N = 0$ , respectivamente, transforman el problema (1) en el problema de valores mixtos:

$$\begin{aligned} u_n - c^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \gamma \dot{u}_n + \sin u_n &= \mu \quad (1 \leq n \leq N), \\ \text{sujeto a : } &\begin{cases} u_n(0) = 0, & 1 \leq n \leq N, \\ \frac{du_n}{dt}(0) = 0, & 1 \leq n \leq N, \\ u_0 - u_1 = \frac{\phi(t)}{c^2}, & t \in (0, \infty), \\ u_{N+1} - u_N = 0, & t \in (0, \infty), \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

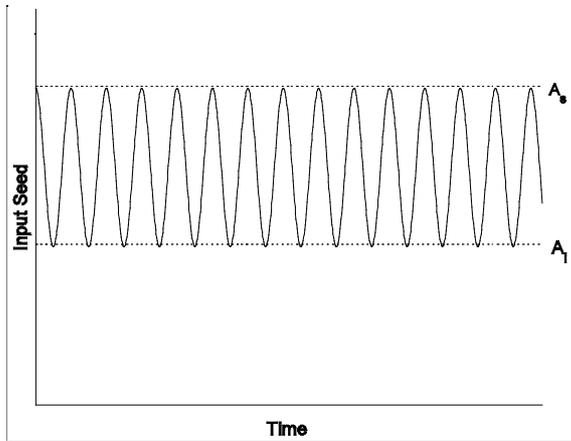
donde las funciones  $u_0$  y  $u_{N+1}$  han sido incluidas por razones de conveniencia. Aquí  $\gamma_n = \gamma + \delta_N(n)$ , siendo  $\delta_N$  la función delta de Kronecker localizada en  $n$ . La función  $R$  es llamada la *resistencia de salida*, y está relacionada con la intensidad de corriente de salida a través de la ley de Ohm, es decir,  $I = \dot{u}_N / R$ .



**Figura 1.** Evolución de una solución de (2) en forma de onda solitaria, para un arreglo de 60 conjunciones acopladas de Josephson, con  $\gamma = \mu = 0$ ,  $c = 5$ , perturbada en el extremo por una frecuencia de 0.9 y una amplitud de 2. Las gráficas fueron tomadas en seis instantes de tiempo igualmente espaciados entre 90 y 115.



**Figura 2.** Evolución de las energías locales de una solución de (2) en forma de onda solitaria, para un arreglo de 60 conjunciones acopladas de Josephson, con  $\gamma = \mu = 0$ ,  $c = 5$ , perturbada en el extremo por una frecuencia de 0.9 y una amplitud de 2. Las gráficas fueron tomadas en seis instantes de tiempo igualmente espaciados entre 90 y 115.



**Figura 3.** Gráfica típica de una semilla descrita por (5). Los máximos y mínimos relativos de la función se encuentran justamente por debajo de los umbrales de supratransmisión e infratransmisión, respectivamente.

**PROPAGACIÓN DE SEÑALES**

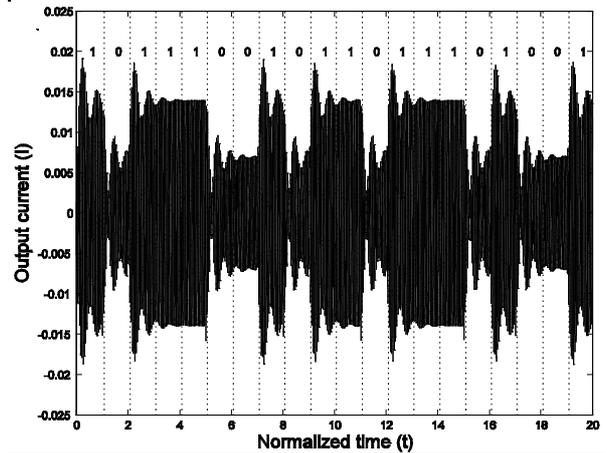
En lo que resta del presente trabajo, se hará uso del método computacional presentado en Macías-Díaz y Puri, 2007a (para una descripción superficial de dicha técnica, véase, por ejemplo Macías-Díaz, 2007). El método es una versión espacialmente discreta y bajo condiciones de frontera de Neuman, del algoritmo presentado en Macías-Díaz y Puri, 2005, empleado para aproximar soluciones con simetría radial de ciertas ecuaciones modificadas de Klein-Gordon. El uso de esta técnica se ve justificado, primeramente, en virtud que no existe método analítico conocido para la resolución de un sistema de ecuaciones acopladas de la clase estudiada en este artículo; además, el fenómeno de supratransmisión es caracterizado eficientemente en el dominio energético (Geniet y Leon, 2003), de ahí la necesidad de poseer herramientas numéricas con propiedades de consistencia en este dominio.

**(a) Características de las soluciones**

Considere un sistema de 60 ecuaciones diferenciales acopladas descrito por (2), con coeficiente de acoplamiento igual a 5 y frecuencia de 0.9 en el ancho de banda prohibida. Fijese una amplitud de 2, justo por encima del umbral de supratransmisión no lineal del arreglo. La figura 1 muestra, entonces, la evolución temporal de una onda solitaria alejándose del extremo donde el sistema es perturbado. La localización exacta de dicha onda viajera puede ser determinada más precisamente al estudiar la evolución temporal

de las energías locales (ver Macías-Díaz, 2007) de los 60 nodos en los tiempos correspondientes a los de la figura 1.

Con estas consideraciones en mente, la figura 2 muestra precisamente la evolución de las energías locales de los nodos del sistema en los mismos tiempos mostrados en la figura anterior. En este caso, la localización de las ondas viajeras puede ser identificada, de manera más exacta, como el máximo absoluto de las energías locales para cada instante de tiempo. Aún más, las gráficas muestran que la onda solitaria generada por la perturbación armónica se mueve con una velocidad constante aproximadamente igual a 1.44.



**Figura 4.** Gráfica de la intensidad de corriente de salida vs. tiempo normalizado en el sistema (1), consistente de 8 conjunciones de Josephson con  $c = 2$ , como respuesta a la función de corriente de entrada (6) asociada con el mensaje binario '1011100101101101001'. Los parámetros  $\Omega = 0.9$  y  $R = 10$  han sido empleados.

**(b) Simulación**

Sea  $\Omega$  una frecuencia en el ancho de banda prohibida de (2), y suponga que  $B_i$  y  $B_s$  son valores no negativos que son ligeramente menores que los umbrales de infratransmisión y supratransmisión, respectivamente, asociados con una función armónica que irradia en una frecuencia igual a  $\Omega$ . Se define la semilla del sistema como la función

$$I_s(t) = \frac{1}{2}[(B_s - B_i)\sin(\Omega t) + B_i + B_s] \tag{5}$$

para cada  $t > 0$ . Una representación típica de esta función se muestra en la figura 3.

A continuación, se define el periodo de generación de señales  $P$  como un múltiplo entero del periodo de la perturbación en el extremo del sistema. En el presente artículo,  $P$  será igual a 20 periodos de la perturbación.

Sea  $\alpha$  un número real positivo con la propiedad de que  $I_s(t) + \alpha$  supera los umbrales de supratransmisión e infratransmisión del sistema, para algunos valores de  $t$ . Con estas convenciones en mente, una cadena binaria  $(b_1, \dots, b_l)$  de  $l$  bits será transmitida en el sistema (1). En general, para cada  $m = 1, \dots, l$ , se define la  $m$ -ésima función de señal como:

$$S_m = \begin{cases} \alpha b_m \sin(\Omega t), & \text{si } mP < t < (m+1)P, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función de intensidad de entrada estará definida por:

$$\phi(t) = I_s(t) + \sum_{m=1}^l S_m(t). \quad (6)$$

Considere un arreglo discreto de 8 conjunciones de Josephson con coeficiente de acoplamiento igual a 2. Se empleará una frecuencia de 0.9, en cuyo caso  $B_i = 0.23$  y  $B_s = 0.41$ , los cuales son valores ligeramente inferiores a los umbrales de infratransmisión y supratransmisión obtenidos numéricamente, respectivamente. Para propósitos numéricos, se utilizarán  $\alpha = 0.05$  y  $R = 10$ . La sucesión de bits '10111001011011101001' será transmitida en el sistema (1) mediante el uso de la función (6), y la información será leída a través de la corriente de salida. Los resultados de nuestra simulación para tiempo normalizado son mostrados en la figura 4.

Obsérvese que bits distintos de cero son claramente identificados con intensidades de salida en valor absoluto mayores a los correspondientes a bits iguales a cero. Más precisamente, bits distintos de cero son completamente caracterizados por el hecho de que, en algún momento durante el correspondiente periodo de recepción, el valor absoluto de la intensidad de la señal de salida es mayor que cierto límite inferior (en este caso igual a 0.01), observándose, de esta manera, una transmisión óptima de información, en el sentido de que bits iguales a 1 son perfectamente distinguibles de aquellos iguales a 0.

## CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

En el presente trabajo, se ha demostrado, usando técnicas numéricas, que es posible transmitir señales binarias en arreglos discretos de conjunciones de Josephson, usando los procesos no lineales de supratransmisión e infratransmisión. En ausencia de efectos de disipación, nuestro modelo ha demostrado ser altamente confiable para periodos suficientemente largos de generación de señales. Aún más, los cálculos muestran que el cuadro general no cambia substancialmente cuando el modelo posee amortiguamiento débil.

En el caso de amortiguamiento fuerte, nuestros resultados numéricos también establecen la existencia de los procesos de supratransmisión e infratransmisión de energía en el sistema. Sin embargo, los efectos disipativos del amortiguamiento se reflejan notoriamente en la atenuación de señales en el sistema, especialmente en arreglos relativamente largos de conjunciones de Josephson.

Es interesante hacer notar las similitudes y diferencias con respecto a la versión de nuestro problema con condiciones de valor de frontera de Dirichlet. En primera instancia, la existencia de estructuras localizadas ha sido verificada tanto en el caso de condiciones de Neuman como con condiciones de Dirichlet. Asimismo, se ha revelado que las velocidades de propagación de los modos generados son constantes en ambos casos, y se ha evidenciado la utilidad de la formulación del problema en términos de las energías locales. Sin embargo, llama la atención el hecho de que, en el caso de condiciones de Dirichlet, las estructuras localizadas son respiraderos (comúnmente llamados *breathers* en la literatura en inglés) que se alejan de la fuente de irradiación, mientras que, en el caso de condiciones de Neumann, las ondas transmitidas son ondas viajeras solitarias (llamadas *kinks* y *antikinks* en la literatura anglosajona del área).

## AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su profundo agradecimiento a los evaluadores por sus valiosos comentarios. El presente artículo fue realizado bajo las siglas del proyecto de investigación PIM07-2 en la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

## BIBLIOGRAFÍA

1. BARDAY, D.; REMOISSENET, M., Josephson superlattices and low-amplitude gap solitons, *Phys. Rev. B.*, 41, 10387-10397, 1990.
2. CHEVRIEUX, D.; KHOMERIKI, R.; LEON, J., Bistable transmitting nonlinear directional couplers, *Mod. Phys. Lett. B.*, 20, 515-532, 2006.
3. GENIET, F.; LEON, J., Energy transmission in the forbidden band gap of a nonlinear chain, *Phys. Rev. Lett.*, 89, 134102, 2002.
4. GENIET, F.; LEON, J., Nonlinear supratransmission, *J. Phys. Condens. Matter.*, 15, 2933-2949, 2003.
5. KHOMERIKI, R., Nonlinear band gap transmission in optical waveguide arrays, *Phys. Rev. Lett.*, 92, 063905, 2004.
6. KHOMERIKI, R.; LEON, J., Bistability in sine-Gordon: the ideal switch, *Phys. Rev. E.*, 71, 056620, 2005.
7. KHOMERIKI, R.; LEON, J.; CHEVRIEUX, D., Quantum hall bilayer digital amplifier, *Euro. Phys. J. B.*, 49, 213-218, 2006.
8. KHOMERIKI, R.; LEPRI, S.; RUFFO, S., Nonlinear supratransmission and bistability in the Fermi-Pasta-Ulam model, *Phys. Rev. E.*, 70, 066626, 2004.
9. KHOMERIKI, R.; RUFFO, S., Nonadiabatic Landau-Zener tunneling in waveguide arrays with a step in the refracting index, *Phys. Rev. Lett.*, 94, 113904, 2005.
10. KIVSHAR, Y. S.; *et al.*, Hysteresis loop induced by rf radiation in Josephson junctions: An analytical approach, *Phys. Lett. A.*, 168, 391-399, 1992.
11. LEON, J.; SPIRE, A., Gap soliton formation by nonlinear supratransmission in Bragg media, *Phys. Lett. A.*, 327, 474-480, 2004.
12. MACÍAS-DÍAZ, J. E., Los procesos de supratransmisión e infratransmisión en arreglos discretos de conjunciones de Josephson, *Investigación y Ciencia*, 2007.
13. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., A numerical method for computing radially symmetric solutions of a dissipative nonlinear modified Klein-Gordon equation, *Num. Meth. Part. Diff. Eq.*, 21, 998-1015, 2005.
14. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., An energy-based computational method in the analysis of the transmission of energy in a chain of coupled oscillators, *J. Comp. Appl. Math*, 2007a.
15. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., On the propagation of binary signals in damped mechanical systems of oscillators, *Physica D.*, 228, 112-121, 2007b.
16. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., An application of nonlinear supratransmission to the propagation of binary signals in semi-infinite mechanical systems of coupled oscillators, *Phys. Lett. A.*, 2007c.
17. MACÍAS-DÍAZ, J. E.; PURI, A., On the transmission of binary bits in discrete Josephson-junction arrays, *Phys. Rev. B*. Aceptado, 2007d.
18. OLSEN, O. H.; SAMUELSEN, M. R., Hysteresis in rf-driven large-area Josephson junctions, *Phys. Rev. B.*, 34, 3510-3512, 1986.