INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
Número 43, (26-29), Enero-Abril 2009

Algunos criterios de libertad para grupos conmutativos

Jorge Eduardo Macías Díaz [1]

RESUMEN

En este artículo se presentan varios criterios para determinar si un grupo abeliano es libre. Como conclusiones, se proponen algunas líneas de investigación ulterior en la determinación de la libertad de módulos sobre anillos y la proyectividad de módulos sobre dominios integrales de Prüfer.

ABSTRACT

In this work, we present some useful criteria for freeness of abelian groups. Directions of generalization to the freeness of modules over arbitrary rings, and particularly to the projectivity of modules over Prüfer domains, are proposed briefly in the closing remarks.

INTRODUCCIÓN

Una de las condiciones más conocidas en el ámbito de la teoría de grupos abelianos es la propiedad de libertad de grupos. Un grupo abeliano libre posee una estructura relativamente simple y bien caracterizada, y por ello, la necesidad de poseer herramientas que sean capaces de determinar si un grupo abeliano dado posee la propiedad de libertad.

En la actualidad, existen pocos criterios de libertad en la literatura especializada de la teoría de grupos. Peor aún, un curso tradicional de álgebra abstracta introductorio no contempla el estudio de criterios de libertad, aún cuando la noción de grupo libre se presenta al alumno como un concepto clave en el estudio de grupos en general. Sin embargo, en este artículo se presentarán algunos criterios que hacen uso de condiciones algebraicas como el de divisibilidad relativa y el de libertad de torsión, así como condiciones conjuntistas tales como filtraciones de conjuntos y conjuntos cerrados, no acotados de números ordinales. Más aún, el estudio divulgativo que se aborda en este trabajo tiene como objetivo motivar la generalización de los resultados presentados a la teoría de módulos sobre dominios enteros, la cual es un área que ha venido cobrando interés en los últimos años.

Grupos abelianos

Un grupo abeliano es un conjunto G junto con una operación binaria denotada por +, tal que se satisfacen las siguientes cuatro propiedades:

La operación es conmutativa, es decir, $a+b=b+a$, para cualquiera de los elementos a y b de G.

La operación es asociativa, esto es, para cualesquier elementos a, b y c de G, la identidad $(a+b)+c=c+(b+c)$ es verificada.

La operación posee un elemento neutro. Esto significa que existe un elemento (único) de G que denotaremos por 0, tal que $a+0=0+a$, para todo elemento a de G.

Palabras clave: Libertad, grupos abelianos, proyectividad, módulos, anillos.
Key words: *freeness, abelian groups, projectivity, modules, rings.*

Recibido: 7 de agosto de 2008, aceptado: 27 de noviembre de 2008

1 Departamento de Matemáticas y Física, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes. jemacias@correo.uaa.mx.

Todo elemento de G posee un inverso. Esto quiere decir que, dado cualquier elemento a de G, existe un (único) elemento $-a$ de G, tal que
$a+(-a)=(-a)+a=0$.

Existen varios ejemplos de grupos abelianos a la mano, tales como, el sistema de los números reales o los números enteros con la suma. De igual manera, los números reales positivos con la multiplicación, los números racionales con la suma y los números complejos con la suma, son ejemplos de grupos abelianos.

Ejemplo 1. Sean G_i grupos abelianos, para todo i en un conjunto de índices I. Entonces, el producto cartesiano de los grupos G_i es nuevamente un grupo abeliano con la operación dada coordenada a coordenada. Este grupo es llamado el producto directo de los grupos G_i, y suele ser denotado por $\Pi\, G_i$. Más aún, el subconjunto del producto directo de los grupos G_i que consiste de aquellos elementos en el que todas las coordenadas son iguales a cero, excepto por un número finito de ellas, es por sí mismo un grupo abeliano, llamado la suma directa de los grupos G_i, y es denotado por $\oplus\, G_i$.

Al igual que en otras áreas de las matemáticas puras, el estudio de transformaciones entre estructuras matemáticas es un tema de interés en el álgebra moderna. Particularmente, dichas transformaciones son denominadas homomorfismos en la teoría de grupos abelianos; más concretamente, si G y H son dos grupos abelianos con las operaciones + y *, respectivamente, un homomorfismo de G en H es una función $f{:}G\rightarrow H$, tal que $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Decimos que f es un monomorfismo si es una función inyectiva, y que es un epimorfismo si es suprayectiva. Si f es un monomorfismo y un epimorfismo, entonces se le llama isomorfismo.

Ejemplo 2. La función exponencial es un isomorfismo de grupos abelianos entre el grupo de los números reales con la suma, y el grupo de los reales positivos con la multiplicación.

Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos que son imágenes isomorfas del sistema de los números enteros con la suma. Así pues, un grupo abeliano libre es una estructura algebraica F de la forma $\oplus\, \mathbb{Z}_1$, donde los índices i pertenecen a un conjunto I. A la cardinalidad de I se le llama el *rango* de F, y es posible verificar que tal noción determina por completo al grupo libre.

Un grupo abeliano G es libre de torsión si $n = 0$ o $x = 0$ siempre que el número entero n y el elemento x de G satisfagan $n\, g = 0$. Es fácil ver que todo grupo abeliano libre lo es en torsión, sin embargo, el recíproco no es válido en general.

Dado un grupo G y un subconjunto H de G, se dice que H es un subgrupo de G si H es un grupo por sí mismo con la operación de G. Es claro que todo grupo abeliano G posee al menos dos subgrupos: G mismo y 0.

Ejemplo 3. Bajo la operación usual de suma en el sistema de los números complejos, los sistemas de los números enteros, los racionales y los números reales son subgrupos del grupo de los complejos.

Ejemplo 4. Sea G un grupo, y sea H un subgrupo de G. Entonces, el conjunto de todos los subconjuntos de G de la forma $a+H=\{a+h$: h es un elemento de $H\}$ es un grupo abeliano, con la operación definida por $(a+H)+(b+H)=(a+b)+H$. Dicho grupo es llamado el grupo cociente de G módulo H, y es representado por G/H.

Un subgrupo H de un grupo G es relativamente divisible si toda ecuación $nx = b$, con n en el conjunto de los enteros y b perteneciente a H, es soluble en H siempre que sea soluble en G. Es fácil ver que H es relativamente divisible en G si y sólo si todo sistema de ecuaciones en H con coeficientes en el conjunto de los enteros es soluble en H siempre que sea soluble en G. Se recomienda al lector acudir a la referencia [Fuchs, 1973] para profundizar sobre los conceptos presentados.

Nociones de conjuntos

A continuación, se procederá inicialmente a extender la noción de rango de grupos abelianos. Sea G entonces un grupo tal. Decimos que un subconjunto X de G es linealmente independiente si dado cualquier número finito $x_1, x_2, \dots, x_n$ de elementos de G, y cualquiera de los números enteros $m_1, m_2, \dots, m_n$, la única solución de la ecuación $m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = 0$ es $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$. El rango de G es la cardinalidad de un conjunto linealmente independiente maximal con respecto a la relación de inclusión de conjuntos. Cabe señalar que el rango está bien definido, en el sentido de que cualquiera de los dos conjuntos

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
Número 43, (26-29), Enero-Abril 2009

linealmente independientes maximales de G poseen la misma cardinalidad.

Sea κ un número ordinal, y considere una cadena ascendente de subgrupos de un grupo abeliano G, dada por la sucesión de contenciones $G_0 < G_1 < \ldots < G_\alpha < \ldots$ $(\alpha < \kappa)$. Decimos que dicha cadena es una κ -filtración de G si:

La unión de dicha cadena es igual a G,
La cadena es continua, es decir, dado cualquier número ordinal límite $\alpha < \kappa$, G_α es la unión de todos sus predecesores, y
Cada G_α tiene un rango menor que κ.

Sea κ un número ordinal límite. Entonces, un subconjunto C de κ es cerrado si el límite de toda sucesión creciente de ordinales en C es un elemento de C; decimos que C no es acotado si dado cualquier ordinal $\alpha < \kappa$, existe un ordinal γ en C tal que $\alpha < \gamma$. Decimos que un subconjunto A del ordinal límite κ es *estacionario* si A intersecta a todo subconjunto cerrado y no acotado de κ.

Un número ordinal límite κ es *regular* si κ es el ordinal β más pequeño con la propiedad de que existe una cadena de ordinales $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\gamma < \ldots$ con $\gamma < \beta$, tal que $\kappa = \sup_{\gamma<\beta} \alpha_\gamma$. Un ordinal límite que no es regular es llamado singular. Por ejemplo, el primer ordinal límite regular es ω_1.

Criterios de Pontryagin-Hill

Lema 5. Sea G un grupo abeliano, y suponga que existe una cadena ascendente, continua y bien ordenada $G_0 < G_1 < \ldots < G_\alpha < \ldots$ $(\alpha < \kappa)$ de subgrupos de G, tal que cada grupo factor $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ es libre, y G es la unión de los grupos G_α. Entonces G es libre.

Demostración. El grupo G es la suma directa de los grupos factores $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ y por tanto, G es libre.

Lema 6. (Criterio de Shelah-Eklof) Sea κ un número ordinal regular no numerable, y sea $G_0 < G_1 < \ldots < G_\alpha < \ldots$ $(\alpha < \kappa)$ una κ-filtración de subgrupos libres del grupo abeliano G. Entonces G es libre si y sólo si el conjunto

$E = \{\alpha < \kappa : \exists\beta > \alpha$ tal que G_β / G_α no es libre$\}$

no es estacionario en κ.

Demostración. Supóngase primero que G es libre. Entonces, G es la suma directa de grupos abelianos A_α, los cuales son isomorfos con el grupo de los números enteros. Defina entonces $B_\alpha = \oplus_{\gamma<\alpha} A_\alpha$. Claramente, la cadena ascendente $B_0 < B_1 < \ldots < B_\alpha < \ldots$ $(\alpha < \kappa)$ es una κ-filtración de G y, para cada $\alpha < \beta < \kappa$, se tiene que $B_\beta < B_\alpha$ es un grupo libre. Sabemos que el conjunto

$C = \{\alpha < \kappa : G_\alpha = B_\beta$ para algún $\beta < \kappa\}$

es un conjunto cerrado y acotado en κ. Más aún, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in C}$ es una κ-filtración de G con la propiedad de que, para cada pareja $\alpha < \beta$ de términos en C, el grupo G_β / G_α es libre. Por tanto, C no interfecta al conjunto E y concluimos que E no es estacionario en κ.

Recíprocamente, supóngase que E no es estacionario, es decir, que existe un conjunto cerrado y acotado C en κ que no intersecta a E. Entonces, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in C}$ es una κ-filtración de G que puede ser escrita como $\{G_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ después de reindexar. Para todo $\alpha < \kappa$, el grupo $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ es libre. Por el lema 5, G es libre.

Teorema 7. (Criterio de Pontryagin) Un grupo abeliano contable libre de torsión es libre si y sólo si todos sus subgrupos de rango finito son libres.

Teorema 8. (Criterio de Hill) Un grupo abeliano G es libre si existe una cadena ascendente contable $0 = G_0 < G_1 < \ldots < G_n < \ldots$ $(n < \omega)$ de subgrupos relativamente divisibles y libres de G, cuya unión es igual a G [HILL 1970].

Generalizaciones futuras

Por supuesto, una dirección natural de investigación en álgebra abstracta es la generalización de dichos resultados a módulos sobre anillos en general. En este nuevo domino algebraico, las definiciones pertinentes se generalizan *mutatis mutandi* de la teoría de grupos abelianos. Sin embargo, cabe mencionar que existen ciertas condiciones que necesitan ser impuestas en el caso de módulos sobre anillos para que algunos de los resultados presentados sean satisfechos en este contexto. Por ejemplo, es necesario considerar dominios enteros de Prüfer R en particular, de manera tal que un submódulo N de un módulo M sobre R sea relativamente divisible si y sólo si todo sistema de ecuaciones en N con coeficientes en R es soluble en N siempre que sea soluble en M [Fuchs y Salce, 2001].

Por otra parte, es importante recordar que los grupos abelianos libres satisfacen la siguiente propiedad característica: *Un grupo abeliano G es libre si y sólo si dado cualquier epimorfismo* $\phi : G \rightarrow H$ *y cualquier homomorfismo* $\varphi : P \rightarrow N$*, existe un homomorfismo* $\chi : P \rightarrow G$ *tal que* $\phi\chi = \varphi$. Dicha propiedad es llamada la propiedad *proyectiva*, y es bien sabido que todo módulo libre la posee. Sin embargo, no todo módulo proyectivo es libre, de ahí que sea de sumo interés el tratar de generalizar los teoremas de Pontryagin-Hill a módulos proyectivos sobre dominios enteros.

REFERENCIAS

- FUCHS, L., *Infinite Abelian Groups.* Vol. 2, Academic Press, 1973.
- FUCHS, L. y SALCE, L., Modules over non-Noetherian Domains. *Math. Surveys and Monographs 84*, Amer. Math. Society, 2001.
- HILL, P., On the freeness of abelian groups: a generalization of Pontryagin's theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 76, págs. 1118-1120, 1970.