ANÁLISIS Y DISEÑO DE SISTEMA DE CONTROL DE NIVEL PARA DOS TANQUES INTERCONECTADOS APLICANDO DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES (LMI's)

(Analysis and design of the control of level for two interconnected tanks applying linear matrix inequalities (lmi's))

Oscar O. Rodríguez Díaz, Juan Mauricio Salamanca

**Escuela de Ingeniería de Electrónica,* UPTC-Sogamoso, Grupo de Investigación DSP
oorodriguezd@unal.edu.co, jumasala@univalle.edu.co

(Recibido abril 18 de 2006 y aceptado septiembre 20 de 2006)

Resumen:
El presente artículo describe de forma didáctica una aplicación de desigualdades matriciales lineales para un sistema de dos tanques interconectados con dos variables de estado y una salida, donde la salida está dada por la altura del nivel del tanque dos, también se busca la familiaridad de aplicaciones con el toolbox de LMI's de Matlab.

Palabras clave: LMI's, tanques, lineal, Matlab.

Abstract:
The present article describes of didactic form an application of linear matrix inequalities for a system of two tanks interconnected with two variables of state and one out, where the exit this given by the height of the level of tank two, also it looks for the familiarity of applications with toolbox of LMI's of Matlab.

Key words: LMIs, tanks, linear, Matlab.

1. INTRODUCCIÓN

Los controladores siempre son diseñados basados en información (necesariamente incompleta) acerca del comportamiento dinámico del proceso. Esta información, es decir el modelo, puede tener la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas. Constan simplemente de la ganancia del proceso y el tiempo de establecimiento experimentados por el operador de la planta. La precisión de esta información varía pero nunca es perfecta. Además, el comportamiento mismo de la planta cambia con el tiempo (cambios de reabastecimiento), y estos cambios son raramente capturados en los modelos, por tanto es deseable que el sistema sea insensible a este tipo de incertidumbres, lo que aplica el diseño de un controlador robusto.

Las estrategias de control convencional son eficientes en la medida que el sistema a controlar sea de una entrada y una salida, pero los procesos industriales en la actualidad se han vuelto cada vez más complejos presentándose sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas; en estos casos las estrategias convencionales son poco eficientes, por lo que se hace necesario utilizar otras herramientas como las suministradas por las estrategias de control moderno, entre las que se encuentra el control de procesos para sistemas interconectados representados en espacio de estados.

El uso de herramientas matemáticas y computacionales ayudan a la obtención de resultados óptimos, buscando simplificación de los procesos. Para este caso, la solución con desigualdades matriciales lineales y teoría de estabilidad de Lyapunov, buscan garantizar parámetros de diseño en un sistema a partir de Determinadas condiciones que son representadas por desigualdades matriciales, estas desigualdades provienen de condicionamientos en la selección del controlador, las especificaciones de diseño de estabilidad.

Para esta aplicación donde se tiene un sistema de dos tanques interconectados en los cuales la variable controlada es la altura del tanque 2 y las variables de estado son la altura h_1 del tanque 1 y la altura h_2 del tanque 2.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO

En la Figura 1, se presenta el sistema de dos tanques interconectados, en el cual se busca que el nivel del tanque 2 permanezca en un valor deseado, y se establece el control de nivel para el tanque 1. Esta acción afecta los flujos de los tanques que dependen de los niveles respectivos.

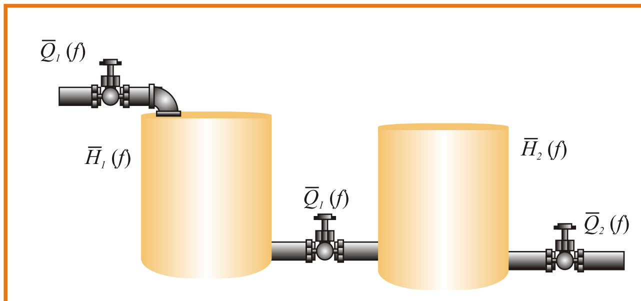

Figura 1. Sistema de dos tanques interconectados

F_i es el flujo de entrada al tanque en m^3/seg, h_1 y h_2 son las alturas del tanque 1 y 2 respectivamente en centímetros (cms).

El flujo de salida del tanque 2 es una función del nivel, de la forma

$$F_2 = \alpha_2 \sqrt{h_2}$$

El flujo entre los dos tanques está dado por:

$$F_1 = \alpha_1 \sqrt{|h_1 - h_2|}$$

Experimentalmente se han determinado los siguientes parámetros

Tabla 1. Parámetros de los tanques

A_1 $[cm^2]$	A_2 $[cm^2]$	α_1 $[cm^{5/2}/seg]$	α_2 $[cm^{5/2}/seg]$
169	172	3.108	6.375

La tabla 1 representa los valores conocidos de los tanques para el sistema real, donde A_i representa las áreas de las bases para los tanques respectivos.

3. MODELO DINÁMICO EN VARIABLES DE ESTADO (MODELO NO LINEAL)

Las variables de estado las alturas de los tanques h1 y h2.

El modelo no lineal que describe el sistema de tanques interactuando esta dado por:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{F_i}{A_1} - \frac{\alpha_1}{A1}\sqrt{|h_1 - h_2|}$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{\alpha_1}{A_2}\sqrt{|h_1 - h_2|} - \frac{\alpha_2}{A_2}\sqrt{h_2}$$

Reemplazando los valores de la tabla se tiene que:

$$\dot{h}_1 = \frac{F_i}{169} - \frac{3.108}{169}\sqrt{|h_1 - h_2|}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{3.108}{172}\sqrt{|h_1 - h_2|} - \frac{6.375}{172}\sqrt{h_2}$$

4. PUNTO DE EQUILIBRIO $\bar{h}_1$ Y $\bar{h}_2$ LINEALIZACIÓN CON Fi CONSTANTE

Un punto de equilibrio para una entrada de flujo constante esta dado según el flujo de entrada.

Si $F_i = 35\ cms^3/seg$

Se obtiene el punto de operación:

$$0 = \frac{F_i}{169} - \frac{3.108}{169}\sqrt{|h_1 - h_2|} \qquad (1)$$

$$0 = \frac{3.108}{172}\sqrt{|h_1 - h_2|} - \frac{6.375}{172}\sqrt{h_2} \qquad (2)$$

Despejando los niveles se tiene:

$$\bar{h}_2 = \left(\frac{F_i}{6.375}\right)^2 = 30.14\ \ cms$$

$$\bar{h}_1 = \left[\frac{6.375}{3.108}\left(\frac{F_i}{6.375}\right)\right]^2 + \left(\frac{F_i}{6.375}\right)^2 = 156.9\ \ cms$$

Linealizando el modelo no lineal en espacio de estados alrededor del punto de operación estable de $\bar{h}_1$ y $\bar{h}_2$ realizando las derivadas parciales y evaluando se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.15*10^{-4} & 8.15*10^{-4} \\ 8.01*10^{-4} & -4.18*10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{169} \\ 0 \end{bmatrix} [F_i]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

La salida del sistema es la altura del tanque 2.

5. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LAZO ABIERTO

A partir del modelo Autónomo

$$\dot{x} = AX \qquad \dot{x}(0) = 0$$ **Para el punto de equilibrio**

Si se toma la función de Lyapunov de la forma:

$$V(x) = X^T PX \qquad P = P^T > 0$$

$$X^T PX = X^T [P + P^T]X = X^T QX$$

Ahora para cumplir las condiciones se tiene que[1]

$$\dot{V}(x) < 0 \qquad para \quad X \neq 0$$

$$\dot{V}(x) = \dot{X}^T PX + X^T P\dot{X}$$

$$= X^T (A^T P + PA) X < 0$$

Esto implica

$$Q = -[A^T P + PA] > 0$$

Si la LMI encuentra la matriz $P = P^T > 0$ se concluye que el sistema en lazo abierto es Asintóticamente estable.

6. ESPECIFICACIONES PARA EL DISEÑO DEL CONTROLADOR

El sistema en espacio de estados

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

Con señal de control

$$U(t) = -K\, X(t)$$

Se tiene el sistema lazo cerrado como

$$\dot{X}(t) = (A - BK)X(t) \qquad \text{y dado}$$

$$A_{LC} = (A - BK) \qquad sea \qquad Hurwitz$$

$$\dot{X}(t) = A_{LC} X(t)$$

Se busca obtener K para que cumpla

$$Q = -[A_{LC}{}^T P + PA_{LC}] > 0 \qquad : P = P^T > 0$$

Obteniendo la desigualdad matricial no lineal generada por la multiplicación de las dos variables K y P.

$$Q = -[A^T P - K^T B^T P + PA - PBK] > 0$$

Esta desigualdad matricial no lineal puede transformarse a una desigualdad matricial lineal mediante el siguiente procedimiento:

Si

$$P = P^T > 0 \qquad entonces \qquad P^{-1} = \gamma = \gamma^T > 0$$

Realizando la siguiente transformación

$$W = P\,X \qquad ; \qquad X = \gamma\, W$$

Se tiene

$$V(x) = X^T \gamma^{-1} X = W^T \gamma\, W$$

Con esto la desigualdad no lineal se transforma en:

$$Q = -[A^T \gamma^{-1} - K^T B^T \gamma^{-1} + \gamma^{-1} A - \gamma^{-1} BK] > 0$$

Tomando $\quad G = K\gamma \quad ; \quad K = G\gamma^{-1}$

El sistema lineal queda

$$-[A\gamma + \gamma A^T] + [BG + G^T B^T] > 0$$
$$\gamma > 0$$

Esta es una desigualdad matricial lineal con dos incógnitas.

La Matriz K se obtiene de $K = G\gamma^{-1}$

7. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EMPLEANDO LMI TOOLBOX DE MATLAB

El programa que permite describir y evaluar las desigualdades matriciales para el diseño del controlador y el análisis de estabilidad, ejecutado en el editor de Matlab es el siguiente:[1]

```
A=[-.815e-4 8.15e-4;8.01e-4 -4.18e-3]
B=[1/169;0] % modelo en espacio de E.
C=[1 0;0 1]% sistema dos tanques interconectados
D=[0;0]
setlmis([]);          % inicialización de LMIs
P=lmivar(1,[2 1]);
lmiterm([1 1 1 P],A,1,'s');
lmiterm([-2 1 1 P],1,1);
Oscar=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(oscar)% factibilidad de las LMIs
Pf=dec2mat(oscar,xfeas,P)% Solución de la LMI
```

El programa fundamentalmente entrega dos informaciones:

1. tmin = -3.1055e-017 indica factibilidad de las LMIs

2. Pf= 1.0e+003 *
      0.0445 -0.2324
      -0.2324 1.2124

El signo menos de Tmin significa factibilidad de la desigualdad. Se verifica que el sistema es Asintóticamente estable ya que se puede encontrar una matriz P que cumple con las condiciones de estabilidad.

8. ANÁLISIS DEL CONTROLADOR EMPLEANDO LMI TOOLBOX DE MATLAB

Para el diseño del controlador se emplea el modelo en espacio de estados del sistema y se verifica la factibilidad de las LMIs[1]

```
Setlmis([]);
L=lmivar(1,[2 1])
G=lmivar(2,[1 2])
lmiterm([1 1 1 L],A,1,'s');
lmiterm([-1 1 1 G],B,1,'s');
% definicion de L>0
lmiterm([-2 1 1 L],1,1)
Oscar=getlmis;
[Tmin,xfeas]=feasp(oscar,[0,100,50,0,0],-1)
Gf=dec2mat(oscar,xfeas,G)
Lf=dec2mat(oscar,xfeas,L)
K=Gf*inv(L)
```

Como resultado de la ejecución del programa se determina que la LMI es factible y la matriz K del controlador esta dada por

$$K=[\ 28.7024\ \ 8.6212]$$

El modelo en simulink para verificar la estabilidad de la salida del nivel del tanque 2 esta se ilustra en la Figura 2 así como la respuesta del sistema (niveles h_1 y h_2) con respecto a su punto de equilibrio en la Figura 3.

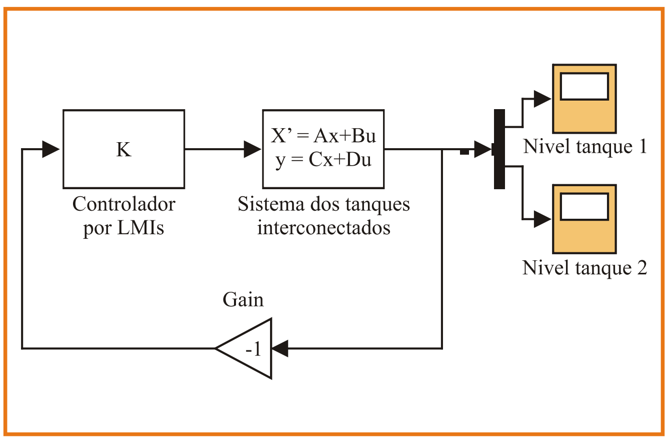

Figura 2. Controlador para estabilizar sistema.

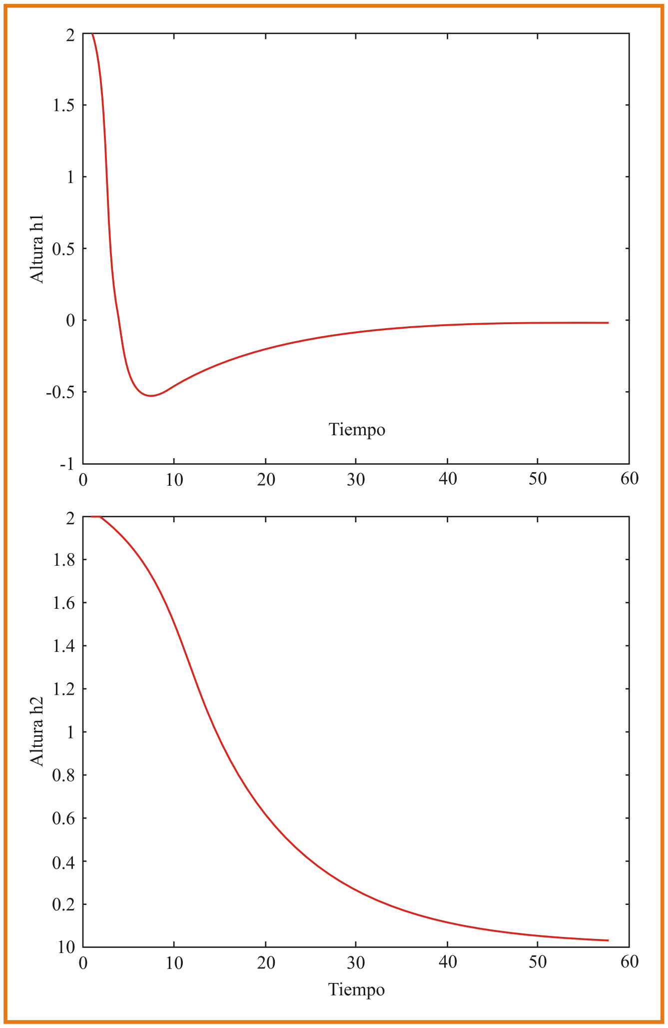

Figura 3. Estabilidad para h1 y h2 con CI.

9. CONCLUSIONES

Aumentando el número de desigualdades matriciales puede volver más selectiva la elección del controlador.

Si se desea se puede escoger el numero de iteraciones para obtener la solución a las desigualdades según limitaciones de la programación.

Una gran ventaja de las desigualdades matriciales lineales radica en la robustez que se puede generar para un rango de incertidumbres del modelo según variaciones de los parámetros o de cambios de reabastecimiento.

La facilidad de realizar cambios en las desigualdades para trabajar con modelos más reales aplicados para los sistemas no lineales [2].

Esta aplicación busca familiarizar al lector con aplicaciones de nuevas tecnologías y herramientas matemáticas que han sido poco exploradas en el Colombia.

10. REFERENCIAS

P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, M. Chilali " LMI Control Toolbox User's Guide Version 1 for use to MATLAB" . Math Works Inc.

M. Basso, R. Genesio, A. Tesi "An LMI-Based Controller Synthesis for Periodic Trajectories in a Class of Nonlinear Systems", IEEE transactions on automatic control, vol. 47, no. 10, octubre 2002.

O. Pérez, W. Colmenares, P. Vega "desigualdades lineales matriciales en el diseño integrado de procesos" Dpto. Informática y Automática, Universidad de Salamanca, Salamanca, España.

J. L. Diez, J. L. Navarro y A. Sala "control por planificación de ganancia con modelos borrosos", Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática Universidad Politécnica de Valencia.

I. Maldonado Jiménez, C. Sistema de modelado e implementación sistema de nivel. Proyecto de grado. 2007.