

Un esquema de diferencias finitas que conserva la positividad de una ecuación modificada de Fisher-KPP

Jorge Eduardo Macías Díaz ¹
Javier Ruiz Ramírez ¹

RESUMEN

Se presenta un esquema no estándar de diferencias finitas para aproximar las soluciones positivas de una ecuación modificada de Fisher-KPP que aparece en el estudio de la dinámica de poblaciones. El método es consistente de orden cuadrático y provee aproximaciones no negativas para cualquier elección de un perfil inicial positivo. La técnica fue validada contra soluciones analíticas para un problema de valor inicial.

ABSTRACT

We introduce a non-standard finite-difference scheme to approximate positive solutions of a modified Fisher-KPP equation appearing in the investigation of population dynamics. The method is consistent to the second order, and it provides non-negative approximations for non-negative initial profiles. The method is validated against known analytical solutions for an initial-boundary-value.

Palabras clave: Problema hiperbólico de valor inicial, esquema de diferencias finitas, positividad, ecuación linealizada de Fisher-KPP.

Key words: Hyperbolic initial-value problem, finite-difference scheme, positivity, linearized Fisher-KPP equation.

Recibido: 13 de agosto de 2009, aceptado: 6 de enero de 2010

¹ Departamento de Matemáticas y Física, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes, jemacias@correo.uaa.mx., j_soulmind@yahoo.com.

INTRODUCCIÓN

Las condiciones de no negatividad en las soluciones de modelos matemáticos son de gran importancia cuando las variables a estudiar son medidas en unidades absolutas. Por ejemplo, cuando la variable de interés es la densidad de población en biología matemática o, cuando la temperatura es manipulada en Kelvin, entonces, el requerimiento de positividad en las soluciones se convierte en una condición física significativa que debe ser observada.

Hoy día, algunos problemas físicos asociados a la ecuación de onda con amortiguamiento (Mickens y Jordan) y la evolución temporal de poblaciones (Mickens, Moghadas y Moghadas) han sido resueltos a través de varias técnicas numéricas que fueron diseñadas con el objetivo de garantizar que las aproximaciones fuesen no negativas. En su mayoría, la construcción de estas técnicas está basada en la noción de esquemas de diferencias finitas no estándares introducidas (Mickens). Estos métodos han generado resultados satisfactorios tanto para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas de segundo orden como para elípticas. En este trabajo se estudia un modelo hiperbólico que describe la densidad de ciertas poblaciones, basado en una generalización de un método no estándar de diferencias finitas propuesto (Mickens y Jordan).

Los modelos parabólicos han sido empleados con un éxito parcial en cuanto a la descripción de fenómenos difuso-reactivos. Como ejemplo, Fisher y Kolmogorov *et al.* estudiaron simultáneamente la propagación de genes mutantes que son cruciales para la supervivencia de poblaciones distribuidas en hábitats lineales. Su modelo llegó

a ser conocido como la ecuación de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (en la literatura también se puede encontrar como la ecuación de Fisher-KPP o simplemente como la ecuación de Fisher). Su expresión es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (1)$$

Aquí κ juega el papel del coeficiente de difusión, el cual es un número real positivo, y, $f(u) = mu(1-u)$, siendo m una constante también positiva. La ecuación de Fisher-KPP es el caso más simple de una reacción no lineal difuso reactiva y ha sido extensivamente estudiada tanto por la literatura matemática como por la física y biológica. A pesar de la importancia que ha tenido desde su concepción, en 1937, la ecuación de Fisher presenta la desventaja de que cualquier perturbación en el medio descrito por este modelo, se propaga con una rapidez infinita. Para poder salvar esta dificultad, se han propuesto varias modificaciones de la misma, siendo las generalizaciones a ecuaciones diferenciales parciales no lineales hiperbólicas las más interesantes. De hecho, la inclusión de un tiempo de relajación ha sido aplicada satisfactoriamente en el estudio de la dinámica de poblaciones de parásitos (Haderer y Dietz), la propagación de virus en placas cuando se considera el tiempo de retraso atribuido a la reproducción del mismo (Fort y Mendez) y la migración de poblaciones durante el periodo Neolítico en Europa (Fort y Mendez), entre otras situaciones realistas.

El modelo postulado en este artículo puede ser considerado como una generalización de la ecuación de Heaviside propuesta para el estudio del fenómeno de transferencia de calor para escalas de tiempo del orden de zeptosegundos (Marciak-Kozłowska y Kosłowski), la investigación de la ecuación modificada de Schrödinger propuesta para describir las interacciones de los electrones dentro de los átomos en una escala de tiempo de los attosegundos (Marciak-Kozłowska y Kosłowski), y de la ecuación modificada de Klein-Gordon que fue empleada para estudiar la propagación del estado térmico inicial del universo (Kosłowski y Marciak-Kozłowska). Como se mencionará al final de este trabajo, este artículo intenta construir un puente que comunique el estudio de la ecuación de onda amortiguada a través de esquemas no estándares de diferencias

finitas que conservan la positividad de las soluciones, y el correspondiente estudio de las versiones hiperbólicas generalizadas de la ecuación de Fisher-KPP que incluyen, entre otras características, la presencia de coeficientes no constantes.

Es importante mencionar que los métodos numéricos que se presentan en este trabajo han sido diseñados siguiendo los paradigmas postulados por Mickens. En particular, se aprovecha la idea de representar a las derivadas parciales de primer orden como una suma distribuida de diferencias adelantadas y centradas. Además, se aproximan las derivadas parciales de segundo orden con respecto a una variable fija utilizando la aproximación de Dufort-Fraenkel (Lari), esto con el objetivo de simplificar la expresión de los esquemas explícitos que resulten.

En la segunda sección de este artículo, presentamos la ecuación lineal hiperbólica de interés. A continuación, se introduce la notación numérica y los esquemas no estándares de diferencias finitas para aproximar nuestro problema. Luego, se lleva a cabo una validación sistemática y detallada del código computacional, contrastándolo con soluciones exactas derivadas anteladamente. Finalmente, el trabajo termina con una sección de conclusiones.

Problema matemático

Sean τ , κ y β números reales positivos, sea γ una constante no negativa y sea I un intervalo cerrado y acotado del sistema de los números reales \mathfrak{R} . Asíumase que u es una función de (x, t) , donde $x \in I$ y $t > 0$. El punto de partida de esta investigación es la ecuación diferencial lineal parcial y homogénea con coeficientes constantes:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \beta^2 u = 0. \quad (2)$$

Cabe mencionar que esta ecuación puede ser fácilmente identificada con otras en ciertos casos especiales. Por ejemplo, ésta se transforma en la ecuación de onda clásica con rapidez de propagación igual a $\sqrt{\kappa/\tau}$ en el caso en que ambos γ y β sean iguales a cero; la ecuación de onda amortiguada con la misma rapidez de propagación aparece en la ecuación (2) si $\beta = 0$. La ecuación de Helmholtz (Zwillinger) – una expresión derivada de la ecuación de Maxwell para estudiar la propagación de

ondas – es obtenida si ambos, τ y γ , son iguales a cero. La ecuación clásica de Schrödinger con potencial constante $V = -\beta^2$ aparece cuando $\tau = 0$, $\gamma = -i\hbar$ y $\kappa = \hbar^2 / (2m)$ donde \hbar denota la constante original de Planck dividida por 2π , y m representa la masa; por otro lado, la ecuación de Klein-Gordon amortiguada de la mecánica cuántica relativista resulta de (2) si β es un número complejo puro. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, en este trabajo se enfoca la atención al caso cuando γ es un número real no negativo y τ , κ y β^2 son positivos.

Otras variantes de (2) ecuación aparecen en varias ramas de la física, química y biología. Como ejemplo, la ecuación linealizada de Landau-Ginzburg de la superconductividad (Kudryavtsev), se obtiene si $\gamma = 0$, y la ecuación de Maxwell-Cattaneo con uso en la termodinámica se deriva de (2) cuando $\beta = 0$. Más relevantemente, (2) es una modificación de la ecuación de Heaviside (también conocida como la ecuación del telégrafo), la ecuación clásica de Heaviside siendo obtenida de (2) si β es un número complejo puro.

Problema en un dominio acotado

En el terreno de la física, γ es difícilmente cero. Además, la ecuación (2) está acompañada de las condiciones iniciales y/o de frontera en el conjunto I . Para propósitos de validación será de particular importancia considerar el conjunto de condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, & t > 1, \\ u(1,t) = 0, & t > 1, \end{cases} \quad (3)$$

asociadas con la ecuación modificada de Fisher-KPP bajo estudio, en el intervalo $I = [0,1]$. Después de aplicar la técnica de separación de variables, la solución analítica con las condiciones de valor inicial y de frontera generada por la ecuación (2) y las condiciones (3), es:

$$u(x,t) = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2\tau}\right) \sin(\pi x) \Psi(t) \quad (4)$$

donde

$$\Psi(t) = \begin{cases} \cosh(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \sinh(\omega t), & \left\{ \begin{array}{l} \beta < \pi \text{ y } \tau < \tau_c, \\ \beta > \pi, \end{array} \right. \\ 1 + \frac{\gamma}{2\tau} t, & \beta \neq \pi \text{ y } \tau = \tau_c, \\ \cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \sin(\omega t), & \beta < \pi \text{ y } \tau > \tau_c, \end{cases} \quad (5)$$

y

$$\tau_c = \frac{\gamma^2}{4(\pi^2 - \beta^2)}, \quad \Delta = \frac{\gamma^2 - 4\tau(\pi^2 - \beta^2)}{\gamma^2}, \quad \omega = \frac{\gamma}{2\tau} \sqrt{|\Delta|} \quad (6)$$

Esquema de diferencias finitas -Nomenclatura

En la presente sección, se introduce el esquema de diferencias finitas no estándar utilizado para aproximar las soluciones de (2). En lo que resta de la misma, I representará un intervalo fijo y cerrado de la forma $[a,b]$, y las soluciones de la ecuación modificada de Heaviside serán aproximadas en el intervalo temporal $[0,T]$. Con este fin, fijaremos particiones regulares $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ de los intervalos I y $[0,T]$, respectivamente, de norma Δx y Δt en cada caso. Con esta notación, u_n^k denotará la aproximación numérica del valor de u en (x_n, t_k) , para $n = 0, 1, \dots, N$ y $k = 0, 1, \dots, M$.

Después de haberse desarrollado el análisis no dimensional de (2), es fácil observar que una simplificación para su estudio se encuentra al alcance al tomar $\kappa = \gamma = 1$, una convención que se seguirá a partir de este punto en adelante. Además, por simplicidad, se empleará la siguiente notación estándar:

$$\delta_x^{(2)} u_n^k = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{(\Delta x)^2}, \quad \delta_t^{(2)} u_n^k = \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (7)$$

así como la nomenclatura (no tan estándar)

$$\delta_{t,\alpha} u_n^k = (1-\alpha) \frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\Delta t} + \alpha \frac{u_n^{k+1} - u_n^{k-1}}{2\Delta t}, \quad \delta_x^{(2)} u_n^k = \frac{u_{n+1}^k - (u_n^{k+1} + u_n^{k-1}) + u_{n-1}^k}{(\Delta x)^2}, \quad (8)$$

donde se sobreentiende que α es un número real. Es claro que las fórmulas para las segundas diferencias centrales en (7) aproximan las segundas derivadas parciales de u respecto a

x y t , respectivamente, mientras que la primera expresión en la ecuación (8) aproxima la primera derivada parcial de u respecto a t , y la segunda aproxima la segunda derivada respecto a x . Cabe señalar que el parámetro α es un parámetro de ponderación entre dos aproximaciones de la primera derivada con respecto al tiempo. En estos términos, la primera ecuación en (8) es una manera no estándar de aproximación a la primera derivada temporal.

-Esquema de diferencias finitas

El esquema de diferencias finitas no estándar utilizado para aproximar las soluciones de (2) es:

$$\tau \delta_t^{(2)} u_n^k - \delta_x^{(2)} u_n^k + \delta_{t,\alpha} u_n^k - \frac{\beta^2}{2} [u_{n+1}^k + u_{n-1}^k] = 0. \quad (9)$$

Es importante mencionar que el tipo de segunda diferencia utilizada en este esquema para aproximar la segunda derivada parcial de u respecto a x es conocida como la aproximación de Dufort-Frankel (Lari), la cual fue empleada exitosamente en el estudio de la ecuación de onda clásica con amortiguamiento (Mickens y Jordan). Esta última expresión es obtenida de la anterior al reemplazar u_n^k por $(u_n^{k+1} + u_n^{k-1})/2$. Una aplicación de los criterios de Neumann fácilmente expone que el esquema antes presentado es estable bajo la correcta selección de los parámetros computacionales. No es difícil comprobar que el esquema de diferencias finitas puede ser reescrito de la manera siguiente:

$$k_1 u_n^{k+1} = k_2 u_n^k + k_3 u_n^{k-1} + k_4 (u_{n+1}^k + u_{n-1}^k), \quad (10)$$

donde las constantes $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathfrak{R}$ dependen de los parámetros computacionales Δx y Δt , y de los del modelo τ, κ, γ y β^2 . De hecho, la **Tabla 1** proporciona una expresión concreta para cada constante.

Tabla 1. Relación de la expresión de cada parámetro $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathfrak{R}$ con la expresión explícita del esquema considerado

Coefficientes

k_1	k_2	k_3	k_4
$\frac{\tau}{\Delta t} + R + 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{2\tau}{\Delta t} + 1 - \alpha$	$\frac{\alpha}{2} - \frac{\tau}{\Delta t} - R$	$R + \frac{\beta^2 \Delta t}{2}$

Por simplicidad se define a $R = \Delta t / (\Delta x)^2$.

- Positividad

En esta sección, se establecen condiciones en los parámetros k_1, k_2, k_3 y k_4 en (21), con el objeto de garantizar que las aproximaciones en el $(k+1)$ -ésimo paso de tiempo sean no negativas, asumiendo que las aproximaciones en los k - y $(k-1)$ -ésimos pasos son no negativas. Defínase

$$R = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (11)$$

Sea k_3 - el coeficiente de u_n^{k-1} - igual a R . Es posible establecer rápidamente que el valor de α y los valores de los coeficientes de u_n^{k+1} y u_n^k son, respectivamente,

$$\alpha = 2 \left(2R + \frac{\tau}{\Delta t} \right), \quad k_1 = 1 - R, \quad k_2 = 1 - 4R \quad (12)$$

Se opta por forzar la igualdad con el objetivo de simplificar la expresión del esquema explícito; es decir, igualamos $R = \frac{1}{4}$. Bajo estas circunstancias, el esquema se transforma en:

$$u_n^{k+1} = \frac{u_n^{k-1} + (1 + 2\beta^2 \Delta t)(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k)}{3} \quad (13)$$

Por conveniencia, la **Tabla 2** presenta el valor de α que hace que el coeficiente k_3 ser igual a R , y los valores de los coeficientes k_1, k_2 y k_3 en términos de α .

Validación computacional

Considérese el problema con valor inicial-frontera descrito por la versión no lineal de la ecuación diferencial (2) y las condiciones (6). Además, con el propósito de generar soluciones no negativas de este problema de valor mixto, se seleccionan los parámetros $\beta = 1$ y $\tau = 0.0001 / (2\pi)^2$. Computacionalmente, se fijan $\Delta t = 0.0004$ y $\Delta x = 0.04$, de forma que $R = \frac{1}{4}$. Bajo estas circunstancias, el coeficiente k_2 para este esquema es cero. Se procede a aproximar las soluciones del problema con valor inicial y de frontera, utilizando el esquema para diferentes valores de tiempo. Los resultados de las simulaciones y las soluciones exactas son presentados en la **Figura 1**. Éstos, exhiben que, bajo las condiciones computacionales antes mencionadas, las aproximaciones se encuentran en excelente acuerdo con los resultados esperados.

Tabla 2. Expresión de cada coeficiente k_1, k_2, k_3, k_4 en el esquema explícito de diferencias finitas, y la elección de α

	Parámetros			
α	k_1	k_2	k_3	k_4
$2\left(2R + \frac{\tau}{\Delta t}\right)$	$1-R$	$1-4R$	R	$R + \frac{\beta^2 \Delta t}{2}$

El parámetro α se escogió de forma que k_3 fuese igual a R .

Cabe mencionar que las técnicas computacionales estándares de orden superior pueden generar soluciones negativas para problemas que son no negativos (como el que se estudia en esta sección), o bien, resultar inestables. Por ejemplo, considérese el siguiente esquema estándar de diferencias finitas para aproximar las soluciones de (2):

$$\tau \delta_t^{(2)} u_n^k - \delta_x^{(2)} u_n^k + \delta_{t,1} u_n^k - \frac{\beta^2}{2} [u_n^{k+1} + u_n^{k-1}] = 0 \quad (14)$$

Es claro que este método es consistente de orden $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$; sin embargo, presenta una región reducida de estabilidad, tal y como es evidenciado por simulaciones (no incluidas).

En vista de la necesidad de proveer una comparación computacional entre el método propuesto y (14), se considera de nuevo la ecuación diferencial (2) definida en el intervalo espacial $[0,1]$ y tiempo $t = T$, junto con las condiciones (6). Subsecuentemente, se toman los mismos valores paramétricos que en el comienzo de la sección, y se consideran diferentes valores para Δx ; adicionalmente, para cada tal valor, se permite que Δt tome diferentes valores. Además, para Δx y Δt y fijos, se calcula la diferencia entre la solución y el problema con valor inicial y de frontera u en el tiempo T y la correspondiente aproximación $(u_n^M)_{n=0}^N$ provista por el método numérico, a través de:

$$\|u - (u_n^M)\|_\infty = \max \left\{ |u(x_n, T) - u_n^M| : n = 0, 1, \dots, N \right\} \quad (15)$$

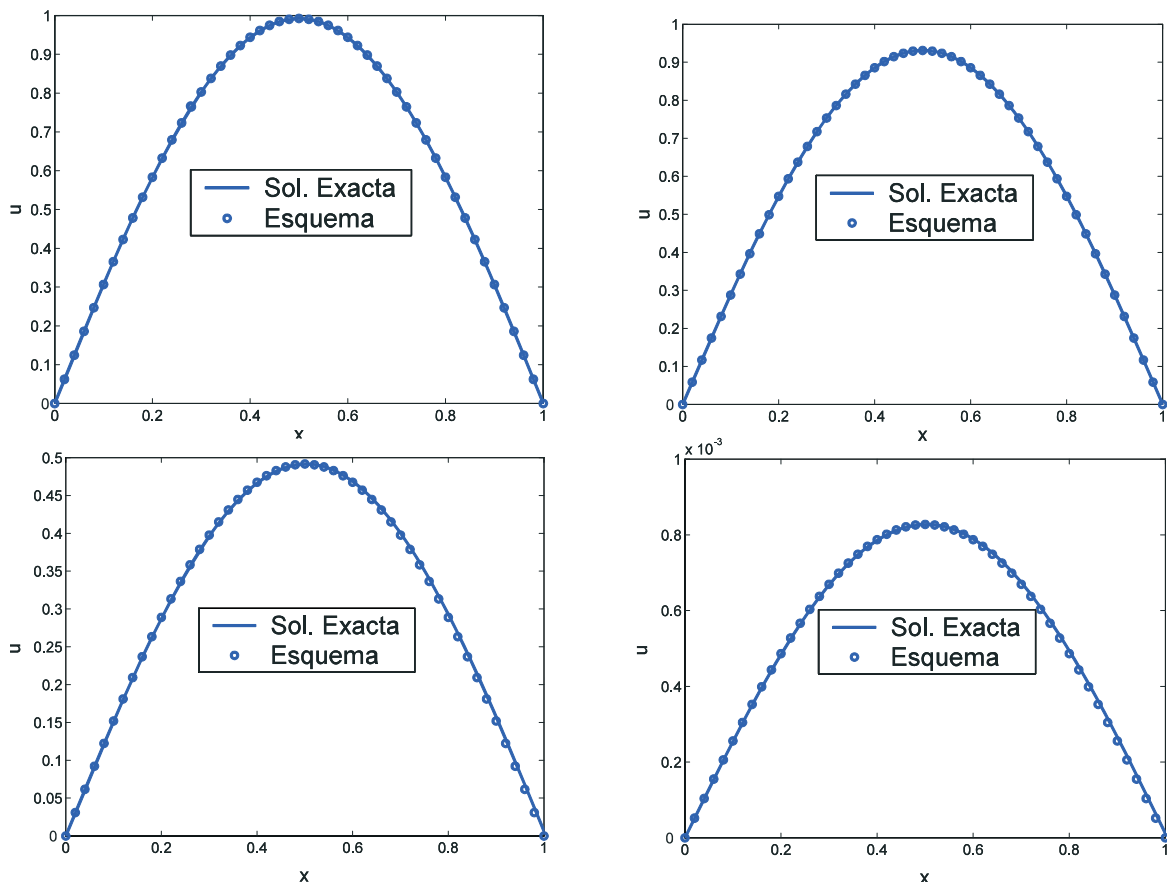


Figura 1. Gráficas de las soluciones $u(x, t)$ con sus correspondientes aproximaciones de la ecuación diferencial (2) sujeta a las condiciones de valor inicial-frontera (6) contra x , en cuatro diferentes tiempos: (a) $t = 0.0008$, (b) $t = 0.008$, (c) $t = 0.08$, (d) $t = 0.8$. Los parámetros κ y γ son iguales a 1, $\beta^2 = 1$ y $\tau = 0.0001/(2\pi)$. Las aproximaciones se encuentran en excelente acuerdo con la solución exacta.

Tabla 3. Máximo valor absoluto del método numérico para distintos valores de Δx y Δt obtenidos al aproximar la solución exacta de (2) sujeto a las condiciones de valor inicial-frontera (6) en el tiempo $t=0.08$

	Δx					
	0.04			0.02		
Esquema	Δt			Δt		
	1×10^{-4}	5×10^{-5}	2.5×10^{-5}	5×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1×10^{-5}
	1.50×10^{-7}	1.82×10^{-6}	1.65×10^{-6}	7.13×10^{-7}	1.22×10^{-7}	8.75×10^{-7}
Estándar	∞	9.08×10^{-6}	9.35×10^{-6}	∞	1.88×10^{-7}	2.05×10^{-6}

Por ello, la **Tabla 3** presenta los resultados numéricos para el método no estándar propuesto, y el método estándar (14). Los resultados muestran que, al menos para los parámetros numéricos empleados y el problema con valor inicial y de frontera estudiado, los métodos no estándares proporcionan resultados que son ligeramente más acertados que los del estándar.

Finalmente, considérese el ejemplo más simple y estándar de orden cuadrático para aproximar

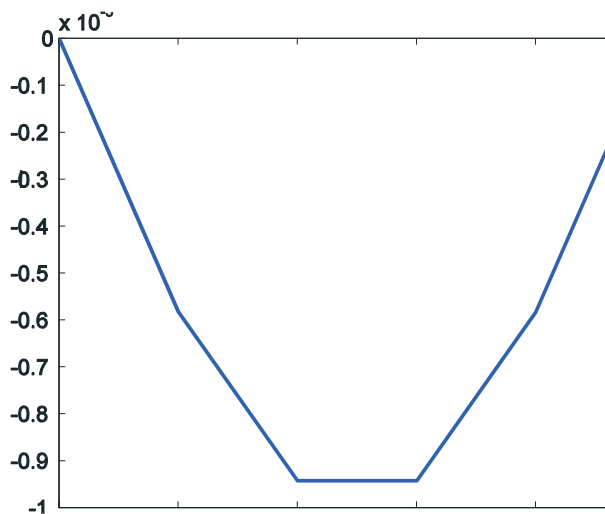
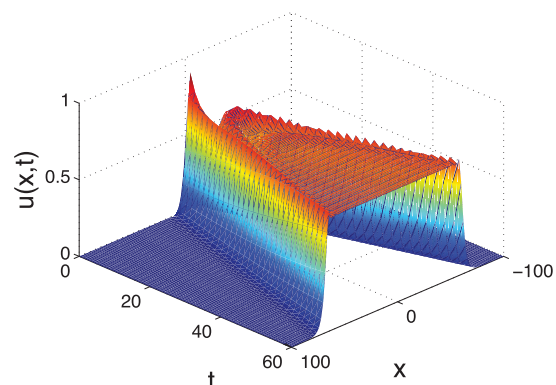


Figura 2. Gráfica de la solución a la ecuación diferencial parcial (2) al tiempo 5, usando una técnica estándar de aproximación de orden cuadrático, empleando los parámetros usados en la **Figura 1**. Para el caso, se usaron tamaños de paso iguales a 0.2 y 0.1 en el espacio y en el tiempo, respectivamente.

soluciones de (2). Para propósitos prácticos, considere el problema de valores mixtos descrito por (3), con los parámetros usados en la presente sección. Fijese un tamaño de paso en el espacio igual a 0.2, y uno de paso temporal igual a 0.1. La **Figura 2** muestra la aproximación dada por dicho método al tiempo 5. La simulación muestra que, aún cuando la solución debería ser no negativa, el método estándar arroja aproximaciones negativas.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un esquema de diferencias finitas con el objetivo de aproximar las soluciones de una ecuación diferencial que aparece en la dinámica de poblaciones. El modelo estuvo basado en una ecuación modificada de Heaviside en (1+1)-dimensiones, y el desarrollo



"Convergencia de perfiles localizados en la ecuación hiperbólica de Fisher-KPP".

del método numérico propuesto para resolver el modelo está basado en métodos de diferencias finitas no estándares.

El método propuesto en este trabajo es consistente de orden $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$. Sin embargo, las comparaciones computacionales contra las técnicas de orden superior muestran que estas últimas no son capaces de identificar el carácter de positividad de las soluciones en algunas instancias, problema que puede ser evitado utilizando nuestro método a costa de perder orden de consistencia. El método fue sistemática y detalladamente validado contra soluciones analíticas conocidas. Sin embargo, aún quedan varias direcciones abiertas a la investigación. Por ejemplo, es altamente deseable diseñar

esquemas no estándares de diferencias finitas que conserven la positividad de las soluciones de la ecuación generalizada de Fisher-KPP, la cual es una ecuación diferencial parcial hiperbólica no lineal que generaliza a la ecuación clásica de Fisher-KPP. Su expresión es:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} (1 - \tau f'(u)) = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (16)$$

donde el término de retardo τ es un número real positivo pequeño, κ representa la constante de difusión, y el término no lineal asume la forma logística generalizada $f(u) = m(u - u^p)$, con $m \in \mathfrak{R}$, siendo un entero positivo.

REFERENCIAS

- ALEXANDER, M.E. *et al.*, Neimark-Sacker Bifurcations in a nonstandard numerical scheme for a class of positivity-preserving ODEs. *Proc. R. Soc. A.* 462, 3167-3184, 2006.
- ARAÚJO, A. *et al.*, Qualitative behavior of traveling solutions for reaction-diffusion equations with memory. *Appl. Anal.*, 84, 1231-1246, 2005.
- BURDEN, R.L. y J.D.FAIRE, *Numerical Analysis*. 4. ed., Boston, MA: PWS-KENT Publishing Company, 1989.
- FISHER, R.A., The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, 7, 355-369, 1937.
- FORT, J. y V. MÉNDEZ, Reaction-diffusion waves of advance in the transition to agricultural economies. *Phys. Rev.*, 60, 5894-5901, 1999.
- FORT, J. y V., MÉNDEZ, Time-delayed theory of the Neolithic transition in Europe, *Phys. Rev. Lett.*, 82, 867-870, 1999.
- FORT, J. y V. MÉNDEZ, Time-delayed spread of viruses in growing plaques. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 178101-178104, 2002.
- GIDAS, B. *et al.*, Symmetry and related problems via the maximum principle. *Commun. Math. Phys.*, 68, 209-243, 1979.
- HADELER, K.P. y K. DIETZ, Non-linear hyperbolic partial differential equations for the dynamics of parasite populations. *Comput. Math. Appl.* 9, 415-430, 1983.
- JORDAN, P.M. y A. PURI, Qualitative results for solutions of the steady Fisher-KPP equation. *Appl. Math. Lett.*, 15, 239-250, 2002.
- KINCAID, D.R. y D.W. CHENEY, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. 3. ed., New York: Brooks Cole, 2002.
- KOLMOGOROV, A., *et al.*, Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Bull. Univ. Moscou, Ser. Int.* 1A, 1-25, 1937.
- KOSLOWSKI, M.L. y J. MARCIAK-KOZLOWSKA, Klein-Gordon thermal equation for a Planck gas. *Found. Phys. Lett.*, 12, 93-98, 1999.
- KUDRYAVTSEV, A.E. Soliton-like solutions for a Higgs scalar field. *JETP Lett.* 22, 82-83, 1975.
- LARI, M.C. *et al.*, A simple Dufort-Frankel-type scheme for the Gross-Pitaevskii equation of Bose-Einstein condensates of different geometries. *Numer. Methods Part. Differ. Eq.*, 20, 624-638, 2004.
- LEVEQUE, R.J., *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. Philadelphia, PA: SIAM, 2007.

- LOGAN, J.D., *An Introduction to Non-linear Partial Differential Equations*. NY: Wiley, 1994.
- MACÍAS DÍAZ, J.E. y A. PURI, A numerical method for computing radially symmetric solutions of a dissipative non-linear modified Klein-Gordon equation. *Numer. Methods Part. Differ. Equ.*, 21, 998-1015, 2005.
- MARCIAK KOZLOWSKA, J. y M.L. KOSLOWSKI, Casual heat transport induced by zeptosecond laser pulses. *Lasers Eng.* 12, 201-206, 2002.
- MARCIAK KOZLOWSKA, J. y M.L. KOSLOWSKI, Modified Schrödinger equation for attosecond laser pulse interaction with matter. *Lasers Eng.*, 12, 53-58, 2002.
- MÉNDEZ, V. y J. CAMACHO, Dynamics and thermodynamics of delayed population growth, *Phys. Rev. E.*, 55, 6476-6482, 1997.
- MÉNDEZ, V. y J. CAMACHO, Hyperbolic reaction-diffusion equations for a forest fire model. *Phys. Rev. E.*, 56, 6557-6563, 1997.
- MICKENS, R.E., Discretizations of non-linear differential equations using explicit non-standard methods. *J. Comput. Appl. Math.*, 110, 181-185, 1999.
- MICKENS, R.E., Non-standard finite-difference schemes for reaction-diffusion equations. *Numer. Methods Part. Differ. Equ.*, 15, 201-214, 1999.
- MICKENS, R.E., Numerical integration of population models satisfying conservation laws: NSFD methods. *J. Biol. Dyn.* 1, 427-436, 2007.
- MICKENS, R.E. y P.M. JORDAN, A positivity-preserving non-standard finite difference scheme for the damped wave equation. *Numer. Methods Part. Differ. Eq.* vol. 20, pp. 639-649, 2004.
- MICKENS, R.E. y P.M. JORDAN, A new positivity-preserving non-standard finite difference scheme for the DWE. *Numer. Methods Part. Differ. Eq.* 21, 976-985, 2005.
- MOGHADAS, S.M. *et al.*, A positivity-preserving Mickenstype discretization of an epidemic model, *J. Differ. Equ. Appl.* 15, 1037-1051, 2003.
- MOGHADAS, S.M. *et al.*, A non-standard numerical scheme for a generalized Gause-type predator-prey model. *Phys. D.* 1, 88, 134-151, 2004.
- RAMOS, J.I., Numerical methods for non-linear second-order hyperbolic partial differential equations. I. Time-linearized finite-difference methods for 1-D, *Appl. Math. Comput.*, vol. 190, 722-756, 2007.
- STAKGOLD, I. y L.E. PAYNE, Non-linear problems in nuclear reactor analysis, in *Lecture Notes in Mathematics, Non-linear Problems in the Physical Sciences and Biology*. vol. 322, A. Dolb and B. Eckmann, eds., NY: Springer-Verlag, 1973.
- STRAUSS, W.A. y L. VÁZQUEZ, Numerical solution of a non-linear Klein-Gordon equation. *J. Comput. Phys.* 28, 271-278, 1978.
- YANG, L., Recent advances on determining the number of real roots of parametric polynomials. *J. Symb. Comput.*, 28, 225-242, 1999.
- YANG, L. y B. XIA, Explicit criterion to determine the number of real roots of a polynomial. *Math/Mech. Res. Preprints*, 15, 134-145, 1997.
- ZAUDERER, E., *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 33. ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- ZWILLINGER, D., *Handbook of Differential Equations*, 3. ed., Boston: Academic Press, 1997.