ICT-UNPA-167-2017
ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 0508/17-R-UNPA

Procesos de validación mediados por el software GeoGebra Los criterios de congruencia para explorar, construir, argumentar y demostrar

Validation processes by using GeoGebra© Software Congruence criteria for exploring, constructing, giving arguments and proofs

Ojeda Verónica Daiana, vdaiana.ojeda@gmail.com
Saldivia Fabiana, fsaldivia@uarg.unpa.edu.ar
Maglione Dora, dmaglione@uarg.unpa.edu.ar

Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Río Gallegos
Av. Gdor. Gregores y Piloto Rivero - Río Gallegos - Santa Cruz - Argentina

Recibido: 25/04/2017 Aceptado: 23/05/2017

RESUMEN

El presente trabajo[1] es un estudio que contrasta el análisis a priori de una secuencia didáctica y los registros escrito-visuales y auditivos tomados para afianzar los criterios de congruencia de triángulos en un 1er año de secundaria. En dicha secuencia se propició el uso del software GeoGebra para la resolución de los problemas presentados.
En el mismo se muestra la evolución del pensamiento del alumno y de sus esquemas mentales en cuanto al uso del software. Este análisis tomó en cuenta la génesis instrumental de Rabardel (instrumentación-instrumentalización), así como también el esquema de ruta de la demostración de Acosta G (2004). Se desarrolla además el proceso de exploración, construcción, argumentación y demostración de los alumnos; y por último su camino desde la justificación visual hasta la demostración matemática utilizando propiedades geométricas y los criterios de congruencia de triángulos.

Palabras clave: Geometría; Enseñanza; Demostración; GeoGebra.

ABSTRACT

This study contrast a priori analysis of a teaching sequence and written/oral records taken in a first year secondary school classroom to secure triangle's congruence criteria. GeoGebra software was provided to solve the provided problems.
This study shows the evolution of the student thinking trail and his/her mental schemes regarding the use of the software. This analysis is based on Rabardel's instrumental genesis (instrumentation – instrumentalization processes) and the Acosta G (2004) proof-path scheme. In addition, the processes of exploration, construction, argumentation and proof-providing is analysed. Finally, the pathway from visual justification to mathematical proof by using geometrical properties and triangle congruence criteria is explored.

[1] Realizado en el marco del PI 29/A372 radicado en la UNPA-UARG, donde la alumna Verónica D. Ojeda obtuvo una beca CIN en 2015 y una beca a la iniciación a la investigación durante el año 2016. El equipo de investigación está integrado por docentes-investigadores, graduados del Profesorado de Matemática de la UNPA-UARG que se desempeñan como docentes en el nivel secundario y por alumnos del mencionado Profesorado.

Keywords: Geometry; High school teaching; Proof; GeoGebra ©.

INTRODUCCIÓN

Diseñamos una secuencia didáctica dirigida a alumnos de primer año de secundaria para enseñar y afianzar los criterios de congruencia de triángulos, y para lograr ese afianzamiento se recurrió a la resolución de problemas mediante el uso del software GeoGebra.
Expondremos sobre esto un análisis a posteriori de las actividades que conformaron la secuencia a desarrollarse en un entorno virtual, mostrando soluciones nacidas de los alumnos a lo largo de las clases con su respectivo análisis, haciendo hincapié en la transición del alumno de la justificación a partir de lo visual hasta apropiarse y hacer uso de las propiedades de lugares geométricos, en particular mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo.

MARCO TEÓRICO

Para la elaboración de la secuencia didáctica se tomó una concepción constructivista de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1993). Esta es una teoría de la enseñanza que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.
El aprendizaje se concibe como interacciones entre grupos de culturas diferentes y como **adaptación a un medio** que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios. En el desarrollo del individuo se alternan dialécticamente los procesos de asimilación y acomodación en la búsqueda de equilibrio para intentar el control del medio. Cuando el medio del individuo se modifica y no resulta inmediatamente interpretable con los esquemas que posee, entra en crisis y busca encontrar la manera de recuperar su equilibrio. Esto produce modificaciones en los esquemas cognitivos y se incorporan nuevas experiencias. Análogamente, en el aula se trata de organizar un medio que se resista a la interpretación inmediata del alumno y que lo lleve a actuar, formular lenguajes y conceptos, cuestionar la validez de lo que produce, etc. Los conocimientos se manifiestan principalmente como instrumentos de control, de regulación de esas situaciones. Se busca que el conocimiento al que recurre el alumno (o que produzca) se justifique por su interacción con el medio, sin la indicación implícita o explícita del docente. Se las llama **situaciones a didácticas**, y constituyen un sistema ideal. Aquí se busca que la validación de la tarea esté en la misma actividad, a través de la interacción del alumno con el medio. Pero no sólo es esta interacción la que juega un papel en esta teoría, sino también la interacción entre docente y alumno (a propósito de la interacción del alumno con el *medio*). Dicho tipo de interacción es descripto por la noción de **contrato didáctico**: en el marco de la situación didáctica, tanto el docente como los alumnos saben que tienen responsabilidades con respecto al objeto de enseñanza. Cuando el profesor explicita una consigna para iniciar una actividad matemática en su clase, da cuenta de su proyecto de enseñanza, pero no puede comunicar del mismo modo el objeto de aprendizaje porque esa es la parte fundamental del trabajo del alumno. Al interactuar con la clase, el docente se relaciona a través de la palabra, pero muchas veces también de manera implícita (silencios, tonos de voz, gestos, posición del cuerpo, modificación de la distancia con un alumno o grupo) para hacer avanzar el objeto de estudio.
El docente tiene un rol fundamental en el momento que los alumnos realizan producciones a partir de la situación problemática dada, a esta actividad se la llama **devolución**.

> **“***No basta “comunicar” un problema a un alumno para que ese problema se convierta en su problema y se sienta el único responsable de resolverlo. Tampoco basta que el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelva sea un problema “universal” libre de presupuestos didácticos. Se llama “devolución” a la actividad mediante la cual el docente intenta alcanzar ambos resultados.” (Brousseau, 1993)*

El análisis a priori se enmarca en una metodología de investigación denominada Ingeniería didáctica, la cual se caracteriza por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias didácticas. Esta metodología de investigación se ubica en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (Artigue, 1995), que realizaremos a continuación.
Con el objetivo de analizar el impacto que tiene el uso del software GeoGebra en la enseñanza de la geometría en el ciclo básico del nivel secundario, abordamos el proceso por el cual se transforma el software desde su concepción de artefacto a su concepción como instrumento, denominado “génesis instrumental” por Rabardel, (citado por Fortuny e Iranzo, 2009). En dicho proceso se identifican a su vez dos subprocesos determinados por la dirección en la cual se producen las retroacciones entre el alumno y el software: el de instrumentación y el de instrumentalización. Tomamos las definiciones que dan Fortuny e Iranzo (2009):

> **Instrumentación: […] Las posibilidades y restricciones del software influyen en las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes, así como en las correspondientes concepciones emergentes. […]**
> **Instrumentalización: El conocimiento del alumno y su forma de trabajar guía la forma en que utiliza el artefacto. […]**

Iniciamos el análisis a posteriori esperando encontrar indicio de estos subprocesos en las producciones que los alumnos realizaron durante la implementación, enfocándonos en los modos en que el software influye en las estrategias de resolución propuestas por los alumnos, para el caso de la *instrumentación*; y en cómo el conocimiento de cada alumno, y su manera de trabajar, guía el uso que hace del software, para el caso del proceso de *instrumentalización.*

CONTEXTO EDUCATIVO DONDE SE IMPLEMENTÓ LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Los alumnos de primer año de secundaria son alumnos del colegio bilingüe Poplars School, donde Romina Melo (que también forma parte del proyecto de investigación) fue la profesora de matemática. Debimos llevar adelante la secuencia en un colegio privado dado que en las escuelas públicas no se dictaron clases durante varios períodos de tiempo, a consecuencia del paro docente y del estado edilicio de las instituciones.
Este primer año estaba constituido por 21 alumnos con una edad promedio de 13 años, y poseían conocimientos geométricos previos que le permitía construir triángulos y polígonos en lápiz y papel utilizando los elementos de geometría (regla, escuadra, compas y transportador). La forma en que fueron abordadas las construcciones les permitió analizar las condiciones de existencia de triángulos dadas las medidas de diferentes ternas de lados, llegando así a conocer la propiedad de la desigualdad triangular, como así también la propiedad de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos, mediatriz de un segmento, identificar y trazar las alturas de un triángulo, y otros elementos notables de triángulo como son la mediana, la bisectriz de un ángulo y la base media, área y perímetro de figuras. Todos estos conocimientos previos que poseían los alumnos en su tránsito por el nivel primario

fueron de gran influencia al momento de la producción. Además, habían tenido una experiencia previa con el software para aprender a manipularlo mediante el estudio de la mediatriz de un segmento como lugar geométrico en marzo de ese año. Por lo que podían distinguir cuándo los objetos son libres y cuándo son dependientes (importante a lo largo de la secuencia) y podían establecer relaciones entre objetos geométricos para realizar diversas construcciones pedidas.
En el desarrollo de sus clases la profesora propicia la resolución grupal como forma de trabajo recurrente, por lo que los alumnos estaban habituados a esta modalidad, y presentar sus producciones en la puesta en común favoreciendo la participación y el debate.

ANÁLISIS A POSTERIORI DE LOS REGISTROS VISUALES Y AUDITIVOS

La secuencia didáctica elaborada consta de una primera parte para realizarse con lápiz y papel que posibilite al alumno construir los criterios de congruencia de triángulos mediante la construcción de triángulos conociendo cierta terna de medidas del mismo, con el fin de analizar cuáles son las condiciones mínimas y necesarias para generar infinitos triángulos congruentes entre sí, y una segunda parte que aborda el tema mediante problemas que se resuelven usando el software dinámico GeoGebra. El desarrollo de dichas consignas y la secuencia se encuentran en Melo, Saldivia, Draghi (2016).

Presentación y análisis de los problemas

Durante la secuencia los criterios utilizados fueron los convencionales, a saber:

Criterios de congruencia
Dos triángulos son congruentes si tienen, respectivamente congruentes:
• Los tres lados (primer criterio, que se indicará **LLL**)
• Un par de lados y el ángulo comprendido por ellos o el ángulo opuesto al lado mayor de los dados (segundo criterio, que se indicará **LAL**)
• Un lado y un par de ángulos: ambos adyacentes, o uno opuesto y otro adyacente al lado dado (tercer criterio, que se indicará **ALA**)

Problema 1
A continuación verán en pantalla la siguiente animación[2].

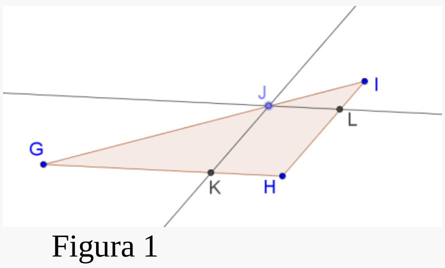


Figura 1

a. Reproduzcan en su pantalla lo que acaban de ver: construyan el triángulo con los puntos y nombres dados de modo tal que puedan hacer la misma animación que vieron.
b. ¿Qué condición debe cumplir el punto J para que los triángulos GJK y JLI sean congruentes? Justificar.
c. Establecido el punto J como lo pide el punto anterior, ¿Cuál es la relación entre el área del paralelogramo JLKH y el triángulo GHI?

[2] Mediante un proyector se muestra la Figura 1, y se movía el punto J sobre lado $\overline{GI}$ como muestra la Figura 2. Los alumnos observaban al punto J desplazarse como así también las rectas que pasaban por él, cada una de ellas paralela a uno de los otros dos lados del triángulo GHI, sin variar la forma de dicho triángulo en esa animación.

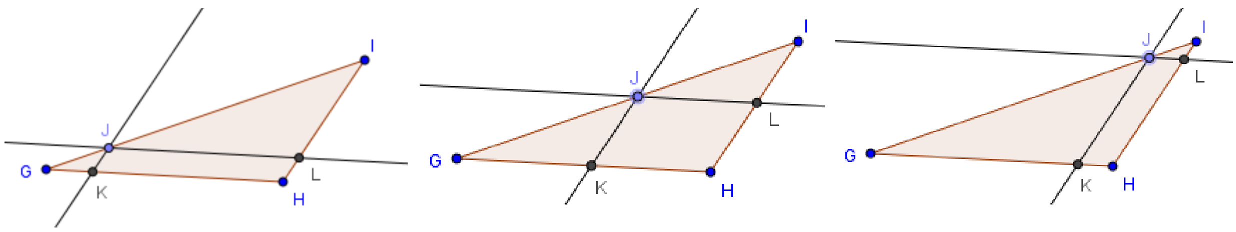


Figura 2

Punto J desplazándose a lo largo del segmento $\overline{GI}$. Se puede apreciar cómo cambian de tamaño los triángulos GJK y JLI.

Este problema es muy rico en cuanto a cantidad de formas de resolverse. Si bien supimos desde un principio que sería intuitivo que J debía ser punto medio del segmento $\overline{GI}$ para obtener triángulos GJK y JLI congruentes, no pudimos anticipar todas las justificaciones que saldrían a la luz en el aula. Hablaremos en particular, más adelante, de una de ellas.
La propiedad de que las rectas que pasan por los puntos J y L, y por J y K son paralelas a los segmentos $\overline{GH}$ y $\overline{HI}$ respectivamente permite asegurar la congruencia de dos pares de lados y tres pares de ángulos, relaciones que se visualizan en la Figura 3.

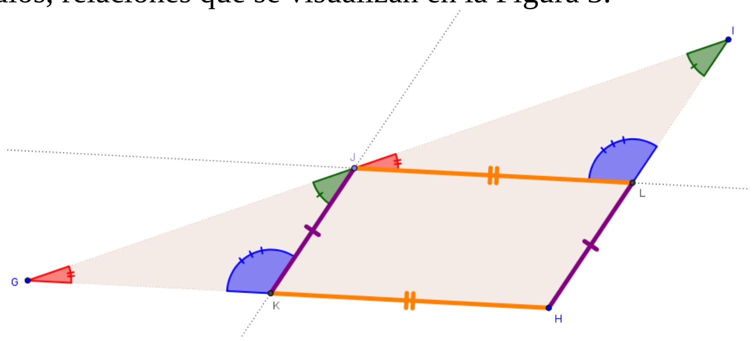


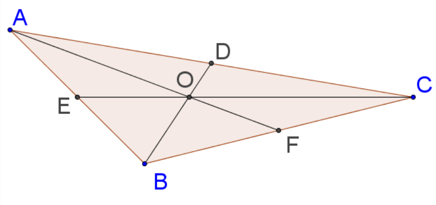
Figura 3

Pares de ángulos y lados congruentes indicados con el mismo color

Esta variedad de igualdades trae como resultado una igual diversidad de resoluciones, que era en definitiva la finalidad del problema. Los alumnos mostraron tener claros los criterios de congruencia y seleccionar el adecuado y utilizarlo como justificación.
La proyección de la animación fue un momento clave para que los alumnos visualicen el paralelismo que mencionamos antes, ya que la consigna no lo explicita en el inciso **a**. En el análisis a priori discutimos cómo presentar la consigna de la actividad, ya que esto varía si se la presenta en formato impreso para trabajarla en lápiz y papel utilizando los elementos geométricos convencionales. Al proponer la actividad en un entorno virtual el dinamismo de los elementos fue de gran importancia, ya que el movimiento del punto J (y en consecuencia, de las rectas que pasan por él) permitía concluir que las rectas eran efectivamente paralelas a dos de los lados del triángulo (y no que, por ejemplo K y L eran puntos fijos).
No solo el movimiento, sino también los colores de los puntos jugaron un papel significativo: cada color define si el objeto geométrico es libre (azul) o dependiente (negro), lo cual es elemental en la construcción. En este caso los puntos G, H e I son libres, J puede moverse solo a lo largo del segmento $\overline{GI}$ y finalmente los puntos K y L dependerán de cómo se mueva J, ya que son la intersección entre una recta y un segmento. Los alumnos podrían preguntarse qué puntos se mueven libremente, cuáles tienen una libertad parcial o condicionada y cuáles son totalmente fijos por ser dependientes de otros elementos. Es de resaltar que este problema puede aplicarse para cualquier triángulo GHI, con lo que el hecho de que estos tres puntos

sean totalmente libres tendría que tratarse en algún momento de la resolución. Quizás esto también sea un factor significativo para que los alumnos puedan notar que la recta que pasa por los puntos J y L (J y K) es paralela al segmento $\overline{GH}$ ($\overline{HI}$), como se dijo antes.
La respuesta al inciso c, por su parte, estaría vinculada a la estrategia de resolución del inciso anterior. Con esto buscamos que los alumnos establezcan una relación entre los triángulos JLI y GJK con el paralelogramo JLHK en tanto igualdad de ángulos y lados. De esta manera obtendrían una manera de partir al triángulo original en triángulos más pequeños, todos congruentes entre sí.

Problema 2
Sea un triángulo ABC cualquiera y sean E, D y F los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Se trazan las medianas tal como se observa en la figura.



a. ¿Bajo qué condiciones los triángulos EBO y DOC son congruentes? Justificar.
b. Teniendo en cuenta el punto anterior, ¿Qué otros triángulos quedan determinados congruentes?

Nuevamente juega un papel fundamental la dependencia de los puntos respecto de los demás elementos: es esta libertad la que permite buscar condiciones para que los triángulos mencionados sean congruentes. Y sin embargo, cabe destacar que esto tampoco está dicho en el enunciado.
En este problema podemos mostrar mediante un diagrama el trayecto de la posible investigación que realizarán los alumnos para replicar la figura geométrica mostrada por la docente en la simulación, en otras palabras como el dibujo se transforma en determinada figura geométrica que posee ciertas propiedades, utilizando como base el esquema propuesto por Acosta G (2004):

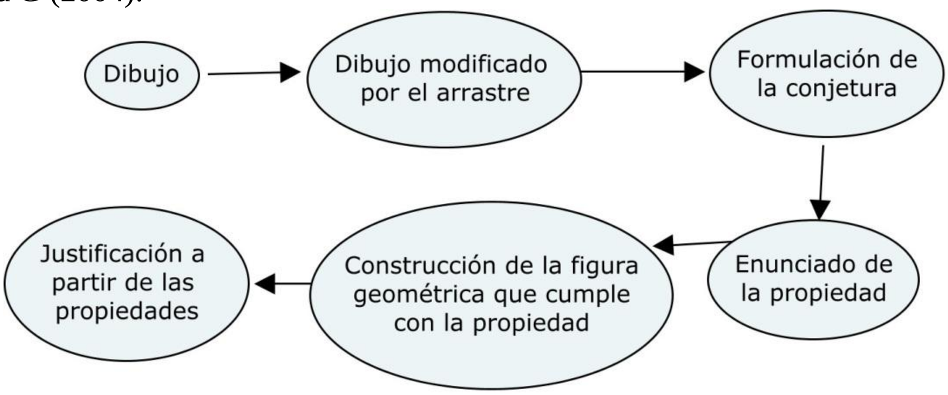


Figura 4

Los alumnos copiarán el triángulo dado en el enunciado y moverán los puntos libres en busca de un patrón: ¿qué debe ocurrir para que los triángulos EBO y DOC sean congruentes? Lo ideal sería que sean capaces de ver que la condición es que el triángulo ABC debe ser isósceles, con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ iguales; y que *en particular* el caso de un triángulo equilátero también cumple con la condición pedida.
Este problema tendrá una fase de exploración más duradera que la actividad 1, donde la respuesta es visible casi inmediatamente. Una parte importante en la captación de propiedades generales es la capacidad de notar que el triángulo debe ser isósceles, y que no solo el equilátero funciona.

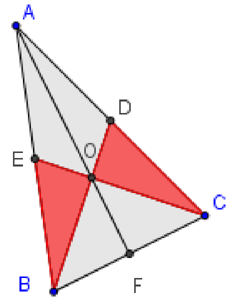


Figura 5
Si los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son iguales, los triángulos EBO y BOC siempre resultan ser congruentes.

Otro dato no menor es que al construir el triángulo isósceles, la mediana $\overline{AF}$ estará sobre la mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{BC}}$, como se muestra en la Figura 5: los alumnos trabajaron ya con las propiedades de mediatriz, saben que todos sus puntos equidistan de los extremos del segmento y que dicho segmento y su mediatriz son perpendiculares. No sólo esto, sino que también la mediana $\overline{AF}$ estará sobre la bisectriz del ángulo B$\hat{A}$C, lugar geométrico que los alumnos también estudiaron previamente. Así, todas las condiciones están dadas para que, nuevamente, el problema sea resuelto y justificado de varias maneras.

Problema 3
Construir un triángulo isósceles ABC, hallar un punto interior D a dicho triángulo, de modo tal que los triángulos ABD y BDC que quedan determinados sean congruentes entre sí.

A lo largo de la gestación de esta secuencia didáctica surgieron muchas discusiones en torno a la presentación de esta actividad: si mostrar un gráfico o no, si utilizar ABC isósceles o escaleno en un principio, si generalizar después. Finalmente se decidió quitar la figura para que los alumnos construyan una propia (aunque con cierta restricción: si los puntos no eran nombrados en el orden esperado, se alteraba la solución del problema). También elegimos usar solo el caso de un triángulo isósceles, ya que de otro modo la actividad resultaba mucho más compleja. Cabe aclarar que esto aplica también para el ítem de la generalización.
Nuevamente la fase de exploración aquí tomaría tiempo, como en el problema anterior. Si los alumnos logran ver que este triángulo cumple condiciones similares al anterior, puede que encuentren con más facilidad qué lugar geométrico responde al problema.

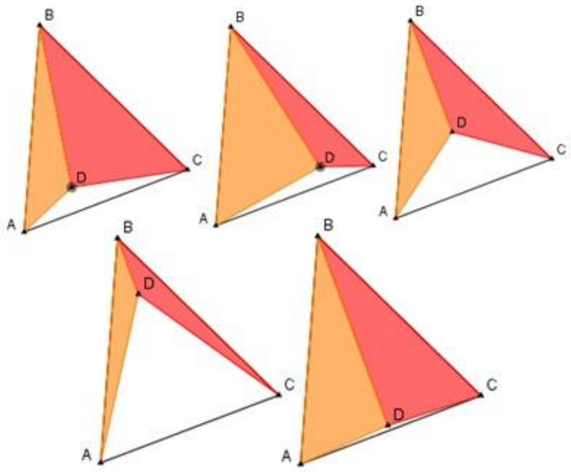


Figura 6
Arrastre del punto D por todo el interior del triángulo. Los triángulos ABD y BDC son congruentes cuando D está sobre la mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

Si los lados iguales del triángulo isósceles son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (resolución que veremos aparecer más adelante), no es posible hallar el punto interior D que cumpla la condición pedida. Ambas situaciones se ilustran en las Figuras 6 y 7.

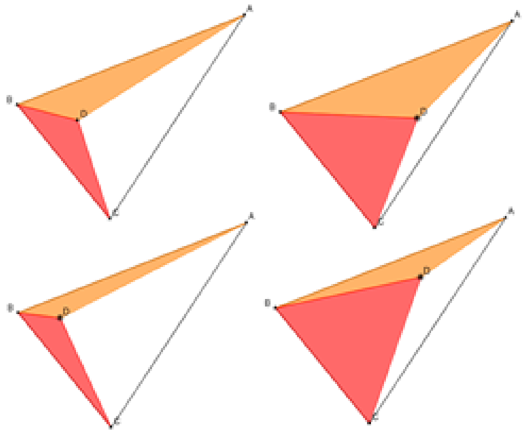


Figura 7
Cuando los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ no son iguales, no es posible hallar un punto interior D tal que los triángulos ABD y BDC sean congruentes.

Por otro lado, para el caso de un triángulo escaleno el punto D tampoco puede hallarse (uno de los muchos ejemplos se muestra en la Figura 8). Este caso requirió de mucho estudio y trabajo matemático por parte del equipo de investigación, la única manera de obtener triángulos congruentes era que los lados marcados en la figura sean iguales entre sí. Visualmente es simple llegar a esta conclusión, pero la justificación matemática es mucho más compleja. Finalmente decidimos que la opción más viable era reducir el problema a un triángulo isósceles.

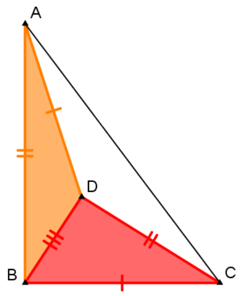


Figura 8
Problema 3 aplicado a un triángulo escaleno (en particular, rectángulo).

Una vez más podemos aplicar el esquema que mostramos antes: luego de armar el gráfico, los alumnos exploran los movimientos del punto interior D, analizando qué sucede con los triángulos a medida que el punto se desplaza.
Captarán visualmente que el punto D está sobre la mediatriz del segmento $\overline{AC}$, o sobre la bisectriz del ángulo $A\hat{B}C$. A partir de esto, de manera similar a la actividad anterior, podrán justificar la congruencia de los triángulos ABD y BDC.
Entonces: en los tres problemas, los alumnos tendrán la posibilidad de **explorar** los arrastres en el gráfico que diseñarán con el programa, ver patrones, **construir** enunciados generales que funcionen como respuesta al problema dado, **argumentar** y **demostrar** sus conclusiones utilizando los criterios de congruencia de triángulos.

Sobre el proceso de la génesis instrumental

La relación del alumno con el software GeoGebra establece un proceso en el que se hacen presentes la instrumentación y la instrumentalización, e intervienen los esquemas[3] mentales

[3] La noción de esquema se usa como lo define G. Vergnaud (1990) "*Un esquema es una totalidad organizada, que permite de generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Esto es posible porque el esquema comporta:*

- *invariantes operatorias que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación, y la recogida de información sobre la situación a tratar;*

del sujeto (esquemas mentales en el sentido que lo define G. Vergnaud en su teoría de los campos conceptuales, con sus formas de trabajo y sus conocimientos) en su conjunto con el programa en sí, con sus limitaciones y posibilidades. Recordemos que llamamos **instrumentación** al proceso por el cual *el software influye en las estrategias de resolución de problemas*, e **instrumentalización** al proceso por el cual *el conocimiento del alumno y su forma de trabajar guían la forma en que se utiliza el artefacto*.
Podemos definir en base a esto y al trabajo realizado, diferentes grados de adquisición de habilidades técnicas en cuando a los procesos de instrumentación e instrumentalización:

Problema 1

	Instrumentación (el software influye en la estrategia)	**Instrumentalización** (el conocimiento guía el uso del software)
Bajo	El alumno no consigue realizar en el gráfico las rectas paralelas.	El alumno utiliza la herramienta “distancia entre dos puntos” para buscar dónde debe estar J.
Medio	Se aproxima a una validación de que J debe ser punto medio.	Uso simultáneo de la ventana algebraica (con medidas) y propiedades de paralelogramo y ángulos entre paralelas.
Alto	Muestran con la herramienta de medida la igualdad de lados desde que J es punto medio.	Utiliza el comando “punto medio” del segmento $\overline{GI}$ para ubicar J.

Problema 2[4]

	Instrumentación (el software influye en la estrategia) *En cuanto a la construcción de la figura*	**Instrumentalización** (el conocimiento guía el uso del software) *En cuanto a la resolución del problema*
Bajo	En el gráfico de las medianas, coloca los puntos medios “a ojo”.	El alumno utiliza la herramienta “distancia entre dos puntos” para buscar dónde deben estar A, B y C.
Medio	En el gráfico de las medianas, coloca los puntos medios utilizando el software como regla.	Utiliza un triángulo equilátero.
Alto	Utiliza el comando de punto medio para luego trazar las medianas.	Crea un triángulo isósceles utilizando la herramienta compás, por ejemplo.

Problema 3

	Instrumentación (el software influye en la estrategia)	**Instrumentalización** (el conocimiento guía el uso del software)

- *anticipaciones del fin de lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales;*
- *reglas de acción del tipo si ... entonces... que permiten generar la serie de acciones del sujeto;*
- *inferencias que permiten “calcular” las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto*.”

[4] En este problema distinguimos la parte de la construcción de la figura de la parte de la resolución del problema, por lo tanto la instrumentación y la instrumentalización no son comparables.

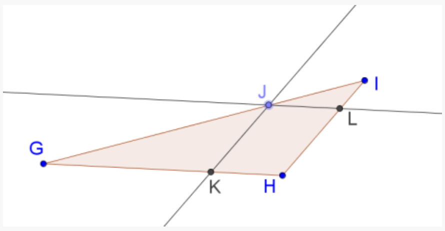
Bajo	El alumno no es capaz de construir el triángulo isósceles para comenzar a explorar el problema.	Usando la herramienta "medida" del software, los alumnos buscan dónde debe ubicarse el punto D.
Medio	Marca un punto D al azar y traza los segmentos que tienen un extremo en uno de los vértices y el otro en el punto D. Moviendo el punto D hasta encontrar a ojo los triángulos pedidos.	Dibuja una recta cercana a la mediatriz y sobre ella ubica el punto D.
Alto	Los alumnos comprenden que D no es único, sino que se trata de un lugar geométrico. Utiliza la herramienta "mediatriz" o "bisectriz" para determinar sobre la recta obtenida el punto D.	Corroborar la conjetura usando el procesador, con la herramienta mediatriz o bisectriz.

Visual versus propiedades: ¿qué predomina?

A lo largo de la implementación de la secuencia didáctica el trabajo de los alumnos fue avanzando desde afirmaciones basadas en lo que la pantalla del software mostraba hasta transformarse en una serie de argumentos matemáticos que sostienen una hipótesis: una demostración. Desarrollaremos a continuación este proceso, mostrando cómo con cada actividad los alumnos crecieron en su trabajo matemático. Mostraremos algunas resoluciones vistas durante las clases en que se implementó la secuencia didáctica en soporte virtual, realizando un análisis de cada una de ellas en cuanto a qué parte es una demostración matemática y qué parte es conclusión visual; cuál fue el análisis a priori y el contraste entre lo esperado y lo ocurrido.
Recordemos además que, en el marco de la Teoría de Situaciones didácticas, el medio antagonista presenta una doble resistencia: el problema en sí, y el manejo del software (en el sentido bidireccional de la génesis instrumental que hablamos antes). Esto se hace visible a lo largo la resolución de la secuencia.

Cuando impera lo visual sobre las propiedades

Problema 1



a. Reproduzcan en su pantalla lo que acaban de ver: construyan el triángulo con los puntos y nombres dados de modo tal que puedan hacer la misma animación que vieron.
b. ¿Qué condición debe cumplir el punto J para que los triángulos GJK y JLI sean congruentes? Justificar.
c. Establecido el punto J como lo pide el punto anterior, ¿Cuál es la relación entre el área del paralelogramo JLKH y el triángulo GHI?

Durante el análisis a priori de la secuencia didáctica nos preguntamos si los alumnos reconocerían que la recta que pasa por los puntos J y L es paralela al segmento $\overline{GH}$ (al igual que lo son el segmento $\overline{HI}$ y la recta que pasa por los puntos J y K). En este sentido nos apoyamos en la animación para que esto sea visible, cambiando la forma rutinaria de trabajo matemático donde el dato está dicho en el enunciado. Esta propiedad era muy útil para el

desarrollo del problema, dado que el hecho de tener ángulos correspondientes entre paralelas permitía asegurar la congruencia de los pares de ángulos que se explicitan más arriba.
Cuando llevamos a la clase este problema, surgió esto que nos preguntábamos. Mientras se explicaba el problema se hizo especial énfasis en examinar qué propiedad cumplían las rectas $\overleftrightarrow{JL}$ y $\overleftrightarrow{JK}$; pero al momento de construir algunos alumnos presentaron dificultades para hacer esto visible en el software. Ocurría por ejemplo que algunos no marcaban el punto L como intersección de dos objetos, con lo cual dicho punto quedaba desvinculado; o que realizaban las rectas con una inclinación similar a la que ellos veían pero sin cumplir ninguna propiedad en particular. Luego del estudio, sin embargo, llegamos a la conclusión de que esto es un problema de **instrumentación** (*el software influye en las estrategias de resolución de problemas*): los alumnos tenían claro que las rectas eran paralelas, pero no eran capaces de hallar la forma de plasmar esto en el programa.
El proceso de instrumentación también puede apreciarse de forma clara en la resolución de este problema: al trazar la recta $\overleftrightarrow{JK}$ el alumno se aproxima en su gráfico del objeto estático (triángulo GIH), perdiéndolo cuando el objeto se vuelve dinámico al mover uno de sus vértices, siendo la intervención docente fundamental en esta etapa.
La respuesta al inciso b requirió mucho análisis didáctico, surgieron diversas anticipaciones y aun así las respuestas de los alumnos nos sorprendieron: por ejemplo, cuando todo el curso vio inmediatamente que la condición que debía cumplir J para que los triángulos resulten congruentes era que sea punto medio del segmento $\overline{GI}$.
Tal fue la sorpresa y el entusiasmo que durante el desarrollo de la misma no nos dimos cuenta de que los alumnos usaron que J era punto medio para probar que los triángulos eran congruentes, y no en el otro sentido como debería haberse hecho. De todos modos, luego del estudio de lo ocurrido y de releer la consigna, llegamos a la conclusión de que las condiciones son equivalentes, y por lo tanto el trabajo es igual de válido.
En lo que respecta a la justificación de por qué el punto medio era el indicado para obtener triángulos congruentes, si bien el procedimiento de varios grupos se repetía, otros eran muy originales en su resolución, utilizando un criterio de congruencia distinto del de los demás.
A continuación se explicita la resolución más trabajada en la puesta en común, que generó en este grupo de alumnos más dificultades.

Resolución del problema 1

Un grupo conformado por dos alumnos determinan trazar una paralela al segmento $\overline{GH}$ que pase por el punto I, de manera que quedan determinados los paralelogramos KHIK’, JLIK’ y JKHL.
Visualizan que los triángulos GJK y JIK’ son congruentes (cosa que deben probar más adelante), como se muestra en la figura, a partir de una rotación del objeto.

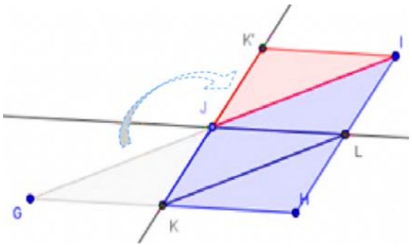


Figura 9

A partir del supuesto de que J es punto medio del segmento $\overline{GI}$, comienzan la justificación de por qué los triángulos son congruentes. En primer lugar, indican que los segmentos $\overline{GJ}$ y $\overline{JI}$ son congruentes por lo dicho anteriormente. Segundo, señalan que los ángulos G$\hat{J}$K y J$\hat{I}$L son congruentes por ser correspondientes entre paralelas.

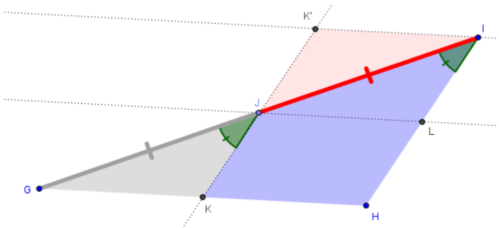


Figura 10

En la Figura 11 se muestra que el cuadrilátero JLIK' resulta ser un paralelogramo.
Suponen que los segmentos $\overline{JK}$ y $\overline{LI}$ también son congruentes. ¿Es esta una conclusión visual fuerte? Afirman que "comparten el mismo lado del paralelogramo", y por eso son congruentes (lo cual deducimos que significa que son lados opuestos de un paralelogramo y, por lo tanto, congruentes). Más adelante una de las alumnas se da cuenta de que los lados opuestos de los paralelogramos son iguales, y que al rotar el triángulo GKJ hasta su posición final, el lado $\overline{JK}$ coincide con el $\overline{JK'}$; por lo tanto es el lado opuesto al segmento $\overline{LI}$.
Surge dificultad para avanzar a partir de los razonamientos de esta pareja dado que caen en argumentos circulares, afirman que los lados son iguales porque los triángulos son congruentes y los triángulos son congruentes porque los lados son iguales. Los alumnos tenían claro que el paralelogramo KHLJ era congruente al JLIK', pero no sabían explicar por qué. Intuyen además que L es punto medio de $\overline{HI}$, pero no tienen herramientas para probarlo (todavía no conocen el teorema de Thales).

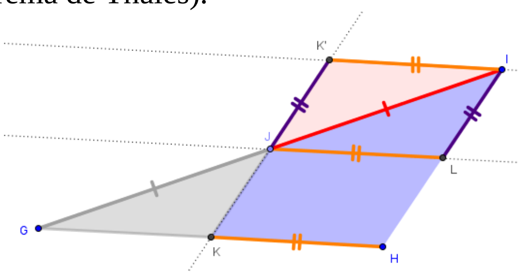


Figura 11

En este punto se hace visible la instrumentación: el software proporciona una estrategia de resolución basada en que el programa funciona esencialmente como graficador de gran precisión. Los alumnos se centran en lo que el software *les permite ver*, olvidando que las conclusiones deben tener un argumento matemático de fondo.
Pero no basta solo con eso: en las clases anteriores, los alumnos comenzaron a usar una tabla –la *tabla de congruencia*- donde organizaban la información para saber qué lados y qué ángulos eran congruentes entre sí. Dicha tabla es como se muestra en el siguiente ejemplo:

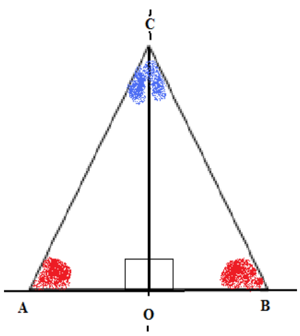


Figura 12

Tabla de lados		Tabla de ángulos	
$\overset{\Delta}{COA}$	$\overset{\Delta}{COB}$	$\overset{\Delta}{COA}$	$\overset{\Delta}{COB}$
$\overline{AC}$	$\overline{BC}$	$B\hat{A}C$	$A\hat{B}C$
$\overline{AO}$	$\overline{OB}$	$A\hat{O}C$	$B\hat{O}C$
$\overline{CO}$	$\overline{CO}$	$A\hat{C}O$	$B\hat{C}O$

Por contrato didáctico, los alumnos sabían entonces que debían realizar la tabla con sus respectivas justificaciones, con lo que su trabajo estaba todavía incompleto.
Se encuentran con un obstáculo al intentar demostrar que $\overline{JK}$ y $\overline{LI}$ son iguales, y surge la necesidad de demostrar que los triángulos G$\hat{J}$K y J$\hat{K}$'I son congruentes.
Finalmente notan que los ángulos K$\hat{G}$J y J$\hat{I}$K' son congruentes por ser ángulos alternos internos, y que los ángulos G$\hat{J}$K y K'$\hat{J}$I también, pero por ser opuestos por el vértice. Recordemos que previamente señalaron que los segmentos $\overline{GJ}$ y $\overline{JI}$ son congruentes por ser J punto medio del segmento $\overline{GI}$. Ahora, por criterio ALA; concluyen que los triángulos GJK y JIK' son congruentes, a modo de ejemplo se muestra la Figura 13.

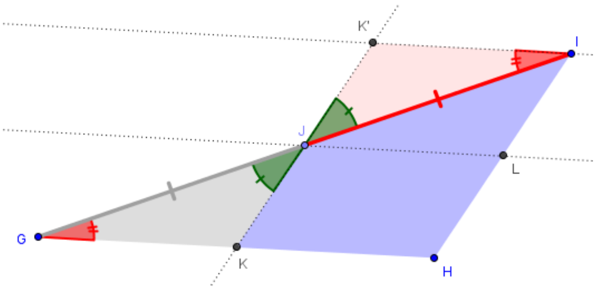


Figura 13

Así, pueden asegurar que el segmento $\overline{KJ}$ mide lo mismo que el segmento $\overline{IL}$ (ya que $\overline{IL}$ y $\overline{JK'}$ son lados opuestos de un paralelogramo, y $\overline{JK'}$ es congruente a $\overline{JK}$).
Luego, por criterio LAL los triángulos buscados resultan ser congruentes, mostrado en la Figura 14.

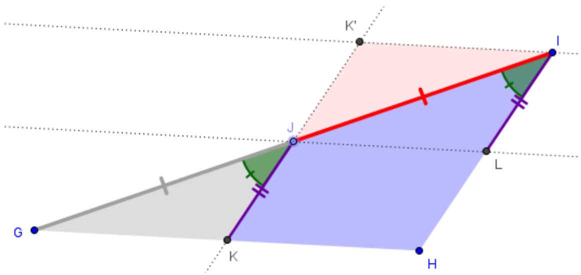
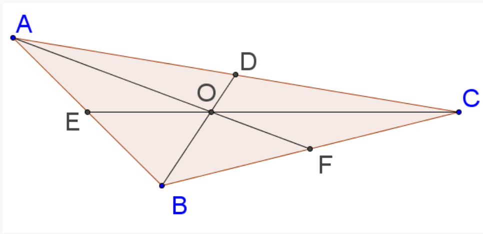


Figura 14

Cuando se discute sobre el inciso c (¿cuál es la relación entre el área del paralelogramo JLKH y el triángulo GHI?), la profesora pregunta a los alumnos qué porción ocupa el mismo: "Dos cuartos, porque los triángulos iguales entran en el paralelogramo". Esta respuesta estaba condicionada por la construcción trabajada anteriormente.
Aquí las mostraciones fueron dadas para justificar el hecho visual fuerte de que si J era punto medio del segmento $\overline{GI}$, entonces los triángulos GJK y JLI resultan ser congruentes. Cabe destacar que la intención era que el camino recorrido sea el inverso.
Observamos en esta actividad que las dificultades aparecieron cuando se sacaban conclusiones basadas no en las propiedades sino en lo que los alumnos podían ver gracias al software. Para este caso, la intervención de la docente fue muy importante debido a que sin los constantes "¿por qué?" de ella, los argumentos eran vacíos y circulares. En este punto también se hace notable la diferencia con una clase convencional de matemática, ya que sin intervención docente los alumnos no justifican de manera debida cada conclusión. Es aquí donde comienzan a entender la necesidad de demostrar más que la de mostrar.

Cuando lo visual y las propiedades se equilibran



Sea un triángulo ABC cualquiera y sean E, D y F los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Se trazan las medianas tal como se observa en la figura.

a. ¿Bajo qué condiciones los triángulos EBO y DOC son congruentes? Justificar.

b. Teniendo en cuenta el punto anterior, ¿Qué otros triángulos quedan determinados congruentes?

Anticipamos que la solución más inmediata será que el triángulo ABC sea equilátero; y de hecho esto ocurre en la mayoría de los casos. Sin embargo, los alumnos también son capaces de anticipar que no es necesario que sea equilátero, sino que basta con tener un triángulo isósceles de lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ congruentes.

Luego del análisis de las distintas resoluciones concluimos -a modo de autocrítica- que tendría que haberse prestado más atención a que los triángulos construidos por los alumnos inicialmente sean escalenos, debido a que la mayoría comenzó con un equilátero.

Dos de las resoluciones muestran cómo claramente, en un primer momento, los alumnos se apoyan en el soporte visual para resolver el problema (lo cual se ilustra en la Figura 15). Ambas resoluciones se basaban en graficar el triángulo pedido y mover los vértices hasta que los triángulos EBO y DOC se vieran congruentes.

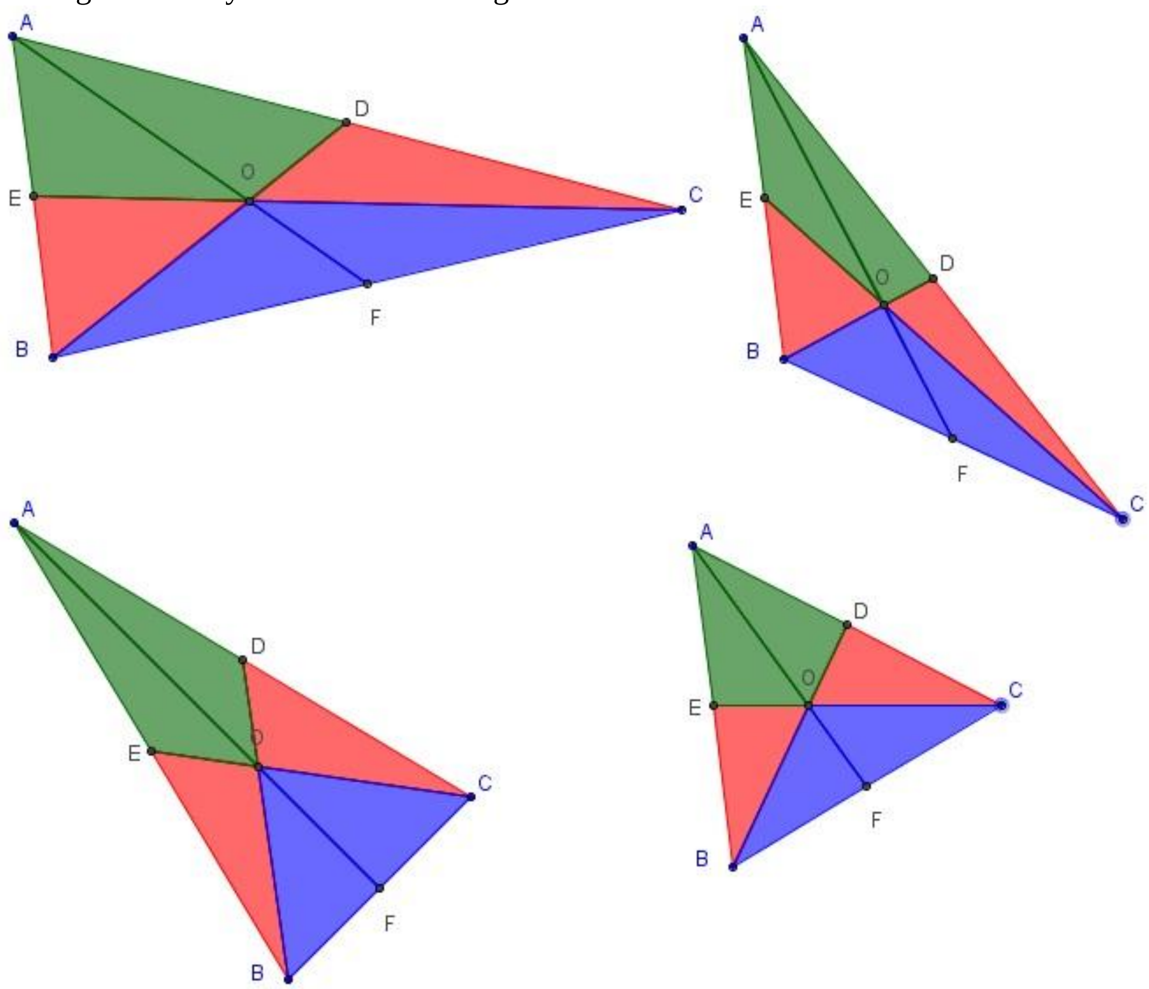


Figura 15

En este momento surgió una curiosa descripción sobre qué sucede cuando un ángulo no es recto: "la línea no es recta, está *borrosa*" (Refiriéndose a cómo se ven los pixeles, como grafica en la Figura 16).

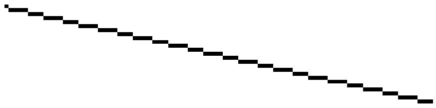


Figura 16
"La línea no es recta, está borrosa"

Nuevamente se hace visible el proceso de instrumentación-instrumentalización: tomando como referencia lo que se denomina "direcciones privilegiadas" (así denomina Piaget a las rectas horizontales y verticales) el software se transforma en una herramienta visual para saber cuándo dos rectas o segmentos son perpendiculares o paralelos entre sí. Basta con ver el "pixelado" que señala la alumna. Pero por otro lado, ella está limitada por su conocimiento en cuanto al software acerca de cómo trazar rectas paralelas o perpendiculares, y termina marcándolas "a ojo".
Otro de los grupos había tomado las medidas de cada uno de los lados de los triángulos que comparaban, y verificaban también que estos valores se fueran aproximando mientras movían los distintos vértices del triángulo ABC. Esta construcción (que en particular resultó ser un triángulo equilátero) permitió ver a las alumnas que la bisectriz del ángulo B$\hat{A}$C y la mediana del lado $\overline{BC}$ eran coincidentes.

Un tercer grupo graficó también un triángulo equilátero y marcó las medidas tanto de las medianas como de los lados. Sostenían que, al ser las tres medianas iguales, "se cortarían en el mismo punto que es la intersección; y esto las dividiría en segmentos de iguales medidas". Dicho argumento se encuentra ilustrado en la Figura 17: los segmentos $\overline{EO}$, $\overline{OD}$ y $\overline{OF}$ son congruentes entre sí; al igual que lo son los segmentos $\overline{AO}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$.

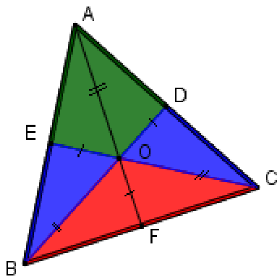


Figura 17

Además, dado que D y E son puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, determinaban segmentos $\overline{EB}$ *y* $\overline{DC}$ congruentes entre sí. De esta manera, utilizaban el criterio LLL para justificar la congruencia de triángulos.
Otro de los alumnos realizó un triángulo isósceles y notó que la mediana $\overline{AF}$ coincidía con la mediatriz del lado $\overline{BC}$, y que por lo tanto la misma era perpendicular a dicho lado.
La puesta en común pone como punto de partida que el triángulo debe ser isósceles, y que $\overline{AF}$ es **mediatriz** del segmento $\overline{BC}$. Dado que los alumnos habían trabajado con mediatriz poco antes, recordaban sus propiedades. A saber: que cualquier punto perteneciente a ella está a la misma distancia de B y de C.
En el Pizarrón queda escrito: el triángulo ABC es isósceles, con $\overline{AB}$=$\overline{AC}$. Como D y E son puntos medios, entonces $\overline{EB}$=$\overline{DC}$. El segmento $\overline{AF}$ es bisectriz del ángulo B$\hat{A}$C y es la mediatriz de $\overline{BC}$, por lo tanto $\overline{BO}$=$\overline{OC}$ y $\overline{EO}$=$\overline{OD}$. Además, E$\hat{O}$B=D$\hat{O}$C por ser ángulos opuestos por el vértice. Finalmente, por criterio LAL (y también por criterio LLL), los triángulos EBO y DOC son congruentes.

ISSN: 1852-4516
Aprobado por Resolución N° 0508/17-R-UNPA

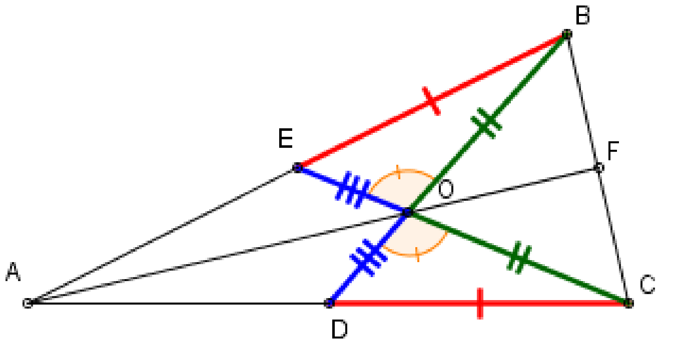


Figura 18

En la Figura 18 se muestra como queda en evidencia que para resolver este problema los alumnos se basaron tanto en los recursos visuales como en sus conocimientos acerca de mediatriz, bisectriz y sus respectivas propiedades. Podían asegurar, por ejemplo, que los lados $\overline{BO}$ y $\overline{OC}$ eran congruentes (pues O pertenecía a la mediatriz) sin necesidad de comprobarlo con GeoGebra.

Cuando impera la propiedad sobre lo visual

Del trabajo con la actividad que presentamos a continuación (problema 3), esperábamos que surgieran dificultades por el hecho de que en el enunciado no se especifica qué lados del triángulo isósceles son iguales; lo cual le ocurre solo a uno de los grupos. La otra gran pregunta era qué lugar geométrico hallarían al darse cuenta de que no existe un único punto D: mediatriz del segmento $\overline{AB}$ o bisectriz del ángulo A$\hat{C}$B.

Construir un triángulo isósceles ABC, hallar un punto interior D a dicho triángulo, de modo tal que los triángulos ABD y BDC que quedan determinados sean congruentes entre sí.

En este caso, los alumnos grafican con las respectivas medidas y distinguen con distintos en colores subáreas del triángulo ABC, como muestra la captura de pantalla en la Figura 19, para guiarse en la justificación. Aquí utilizan como recurso la herramienta medida que proporciona el software, pero como veremos más adelante esto no es condicionante para la estrategia que utilizan para resolver el problema.

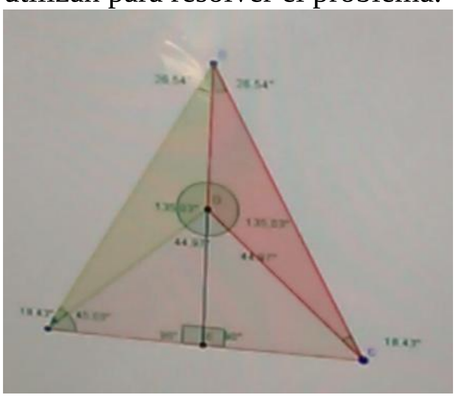


Figura 19

El grupo que realizó la resolución que se muestra en la figura comenzó un con triángulo isósceles con $|\overline{AB}|=|\overline{BC}|$ y trazó la mediatriz-bisectriz-mediana del segmento $\overline{AC}$. Sobre ella marcaron un punto D, y afirman que:

$|\overline{AB}|=|\overline{BC}|$ por construcción
$\overline{AD}$ es lado compartido
Los ángulos A$\hat{C}$D y B$\hat{C}$D son iguales ya que el segmento $\overline{AD}$ es bisectriz del ángulo A$\hat{B}$C.

Por criterio LAL, los triángulos son congruentes.

Los alumnos notan que el punto "D" sigue cumpliendo con todas las condiciones dichas anteriormente siempre y cuando se halle sobre la bisectriz del ángulo, motivo por el cual concluyen que las respuestas son infinitas. Cabe destacar que en ningún momento utilizaron las medidas como soporte.

• Uno de los grupos tuvo un inconveniente en cuanto a la construcción del triángulo: al no estar indicados en la consigna qué lados debían ser iguales, construyeron una figura donde no era posible hallar un punto D que cumpliera la condición pedida, como se muestra en la Figura 20.

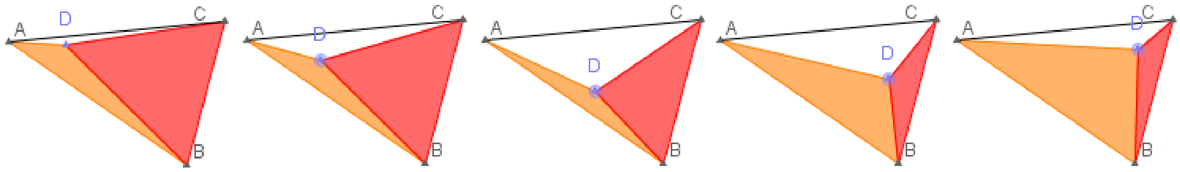


Figura 20
No es posible hallar un punto D que sea solución.

Pero, como vimos durante la resolución de esta actividad, si D está sobre la mediatriz del segmento $\overline{BC}$ quedan determinados dos triángulos congruentes: ABD y ADC (indicados en blanco y naranja en la Figura 21).

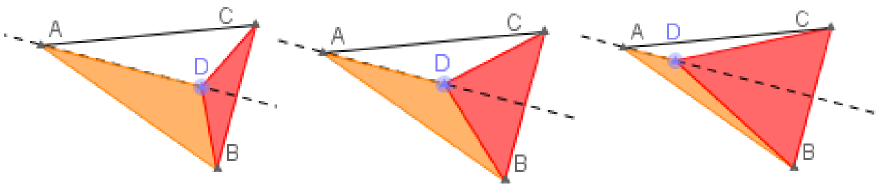


Figura 21

Sin embargo, una vez que cambiaron de ubicación los vértices, lograron hallar sin problemas el lugar geométrico de los puntos buscados (en este caso, la **mediatriz**).
Sabiendo que la mediatriz equidista de los dos extremos del segmento $\overline{AB}$, y que un lado es compartido, por criterio LLL concluyen que los triángulos ABD y BDC son congruentes, al igual que los otros dos triángulos determinados dentro de la figura (dado que la mediatriz corta al segmento en el punto medio).
Finalmente el trabajo de los alumnos se asienta pura y exclusivamente en justificaciones basadas en lo que ellos conocen, en propiedades de las figuras. Han logrado además ordenar sus argumentos y escribirlos correctamente en su carpeta, consiguiendo aquello que tanto buscamos en matemática: **demostrar**.

CONCLUSIONES

En estas cuatro clases en las que se resolvieron estos tres problemas, pudimos observar el proceso de génesis instrumental. En él pudimos caracterizar tres momentos descriptos:

- Cuando impera lo visual sobre las propiedades
- Cuando lo visual y las propiedades se equilibran
- Cuando impera la propiedad sobre lo visual.

El investigador francés L. Trouche (2004), apoyándose en las ideas de Rabardel (2000) y estudiando la complejidad de la relación sujeto-artefacto, avanza sobre la noción de “orquestación instrumental”. Destaca la siguiente idea: *“la concepción de uso de un instrumento se forma a partir de su uso”*. En el diseño de las clases tuvimos en cuenta que el artefacto (en este caso el software GeoGebra) debía incorporarse al trabajo matemático de los alumnos, siendo fundamentales las interacciones que suponíamos iban a surgir cuando el alumno interactúa con el software y las interacciones producto de la relación sujeto y el objeto matemático mediatizadas por el instrumento. Dicho análisis nos llevó decidir qué actividades

se hacían en lápiz y papel y cuáles se harían mediante el uso del software, previa modificación de las consignas.
Si consideramos el modelo de Trouche (2004) que permite analizar situaciones mediadas por instrumentos, a partir de considerar al instrumento como un tercer polo entre el sujeto y el objeto de conocimiento, podemos identificar y ampliar el tipo de interacciones que se dan en esta triada, de las cuales nosotros consideramos dos en el análisis a priori:

- ✓ Las interacciones entre el sujeto y el instrumento
- ✓ Las interacciones sujeto-objeto mediatizadas por el instrumento

Y pudimos observar una tercera en el análisis a posteriori: las interacciones entre el instrumento y el objeto sobre el cual éste permite actuar.

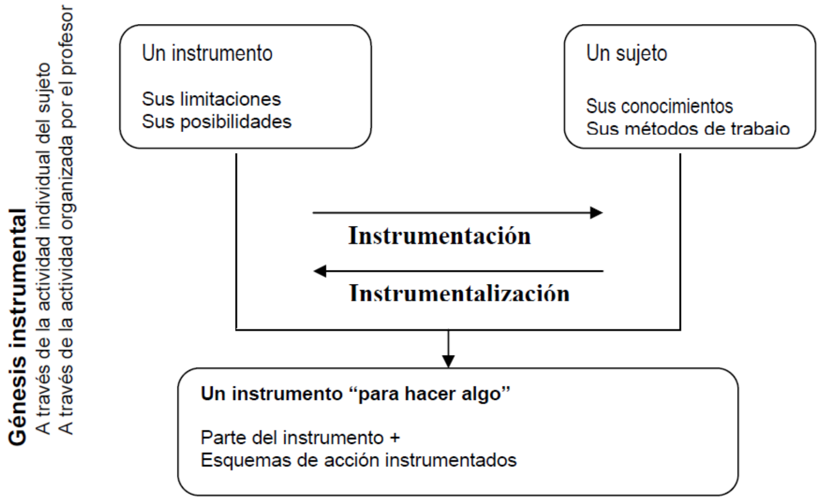


Figura 22
Esquema de génesis instrumental.

La génesis instrumental (Trouche, 2005) que se explicita en la Figura 22, permitió caracterizar el trabajo matemático de los alumnos como un proceso que crece y se enriquece. Evoluciona de manera visible, al ver como quedaron plasmadas sus producciones escritas y digitales tanto en la carpeta como en el entorno virtual.
Es importante destacar la intervención y devolución docente en todo el proceso de la implementación de la secuencia, quien estaba atenta a los argumentos de los alumnos para que estos no fueran vacíos y circulares, ya sea preguntando el por qué de las acciones realizadas si no también indagando como habían llegado a esa construcción y a las conclusiones o conjeturas que formulaban. Esta interacción de los alumnos con la docente, ya sea en el pequeño grupo o en las puestas comunes realizadas fueron fundamentales para acercar a los alumnos a entender la necesidad de demostrar más que la de solamente mostrar.
Cabe mencionar, que el grupo de investigación nuevamente pudo constatar la necesidad de la presencia de un asistente técnico en las clases de matemática cuando estas se desarrollan en ambientes mediados por una tecnología digital.
En fin, el trabajo de los alumnos alrededor de la validación de sus conjeturas fue fructífero, lo que nos alienta a seguir diseñando e implementando secuencias mediadas por un software, como puede ser el GeoGebra, sin abandonar el quehacer propio de la matemática. Dejamos finalmente, a modo de conclusión abierta, algunas preguntas:
¿Qué hubiera ocurrido con el proceso de lo visual versus las propiedades si cambiábamos el orden de los problemas?
¿Estaba el problema 3 condicionado por la resolución del problema 2?

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al colegio Poplars High School por la predisposición para brindarnos el espacio donde implementar la secuencia; a la profesora S. Romina Melo (integrante externa del proyecto) porque además de participar de toda la gestación y el debate, preparó la secuencia en papel y la llevó adelante junto con la secuencia virtual. Finalmente agradecemos al profesor Maximiliano Garín (estudiante del profesorado durante la gestación de las actividades) por sus aportes cuando integraba este equipo de investigación, que generaron ricas y extensas discusiones durante el análisis a priori.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACOSTA G., M. (2004) La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías. Comunicación presentada en el Primer Congreso de la TAD.

ACOSTA G., M., (2010) “Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio”. Revista Integración. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial e Santander. Vol. 28, No. 2, 2010, pág. 173-189.

ARSAC, G (1994) Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration. Petit x Nro. 37 pág. 5-33. I.R.E.M. de Grenoble.

ARTIGUE, M (2011) Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 6, Nro. 8, pág. 13-33. Costa Rica

ARTIGUE M, DOUADY R, MORENO L (1995); Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá.

BALACHEFF, N (1987); Dévolution d´un problème et construction d´une conjecture. Le cas de “La somme des angles d´un triangle”. Les cahiers de didactique. Num.39. IREM de Paris7.

BROUSSEAU G. (1993); Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19, versión Castellana.

CICCALA, R y otros (2012); GeoGebra entra al aula de matemática. Editorial Miños y Dávilas, Buenos Aires.

FREGONA D, BÁGUENA P (2011); La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Libros del Zorzal, Buenos Aires.

FORTUNY J, IRANZO N. (2009); La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Revista Enseñanza de las Ciencias, 27(3), pág. 433–446.

MELO S., DRAGHI D. y SALDIVIA F. (2016); Enseñando geometría utilizando el software dinámico GeoGebra. Revista de informes científicos técnicos UNPA.

TROUCHE, L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students´ command process through instrumental orchestations In: International Journal of Computers for Mathematical Learning” pág. 281-307. Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

TROUCHE, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds), The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument, pp. 198-230. Nueva York: Springer.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des Champs Conceptuels. Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10, nº 2,3, pp 133-170.