RECIBIDO EL 9 DE AGOSTO DE 2016 - ACEPTADO EL 10 DE AGOSTO DE 2016

EL CÁLCULO EN LA FORMACIÓN DE COMPETENCIAS PROFESIONALES DE CONTADORES [*1]

Eliseo Ramírez Rincón [*2]

Resumen

En el título de esta comunicación se hace evidente que hay tres ejes fundamentales, relacionados entre sí: El cálculo como saber matemático, las competencias como procesos a desarrollar y la Contaduría como el ámbito profesional específico. Cada eje contempla acciones propias que al ser relacionadas en y entre ellos, generan los procesos que se espera contribuyan en la formación personal y profesional de los estudiantes de esta carrera. La intención de este escrito es mostrar dichas relaciones o por lo menos argumentar algunas de ellas que evidencien la potencia de esta triada. Para tal fin se recurrirá a la didáctica de las matemáticas, en particular del cálculo, a la historia de la contaduría y a la noción de competencias, para establecer sus relaciones.

Palabras clave: matemáticas, contaduría, contabilidad, procesos.

Clasificación JEL: C00, C02, C20, I21

Abstract

In the title becomes evident that there are three interrelated cornerstones: The calculus as mathematics knowledge, skills as processes to develop and the Contaduria as the specific professional field. Each axis includes own shares to be linked within and between them, generate the expected processes contribute to the personal and professional training of students in it career. The intention of this paper is to show these relationships or at least some of them with argue that demonstrate the power of this triad. It will be used for this purpose to the teaching of mathematics specifically the calculus, the history of contaduria and skills to establish these relationships.

Key words: mathematics, Contaduria, assessment, Processes.

1 *Corresponde a una parte de la fase experimental de la tesis doctoral del autor titulada Enseñanza de la función derivada con el uso de infinitesimales como alternativa para reducir los conflictos semióticos de los estudiantes. Este trabajo experimental se realizó con un grupo de estudiantes de cálculo de la Facultad de Ciencias Económicas, Administrativas y Contables de la universidad Libre.*

2 *Licenciado en matemáticas, Magister en docencia de las matemáticas y Doctorado de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá Colombia en 2012. Profesor investigador de la facultad de Ciencias Económicas, Administrativas y Contables (FCEAC) de la U. Libre, Bogotá, Colombia. Grupos de Investigación: Coordinador del grupo DIMATES (FCEAC), coinvestigador del grupo Constructores contables (FCEAC). Email: eliseo.ramirezr@unilibrebog.edu.co*

Contenido

Didáctica de la Matemática (Educación Matemática)[3]

Para entender los ejes (cálculo, procesos contables y contaduría) y las acciones que se generan a nivel intra e inter ejes, se considera importante establecer el contexto histórico del cálculo y su didáctica, dado que su enseñanza debe estar soportada por la historia y la epistemología de las matemáticas, que permita establecer qué matemáticas se desarrollaron en cada época y sobre todo cuáles fueron los logros alcanzados con ellas y con qué tecnología lo hicieron. Así mismo, interesa revisar los aspectos social y cultural de los avances del cálculo según su historia, para que desde la didáctica se responda por los procesos de enseñanza y aprendizaje, contestando por lo menos las preguntas: ¿Qué enseñar? y ¿Cómo enseñar?, y dependiendo de la respuesta que se otorgue a cada una de éstas, se pueda determinar los enfoques: de un lado el tradicional (que ha imperado, según los currícula), en el que los contenidos son productos acabados, y otro que considera a los contenidos como productos de procesos humanos en interacción con actividades culturales. En este sentido se debe considerar la historia y la epistemología de las matemáticas con el fin de generar una mejor comprensión a los estudiantes de los procesos y de los contenidos matemáticos que como construcción social trasciende el saber procedimental y el saber conceptual hacia los usos o aplicaciones del cálculo, Artigue (2001, p 213).

A partir de lo anterior es importante hacer una somera reseña de la implantación de las llamadas "matemáticas modernas" en la educación nacional e internacional. Esa reforma y la reacción que se ha generado frente a ella, brindan parámetros importantes con los que se define el actual momento histórico de la Didáctica matemática (Educación Matemática), al menos en Colombia.

Durante la década de 1950 se inició a nivel mundial un movimiento tendiente a reformar los planes y programas de estudio de las matemáticas que se impartían en la enseñanza media y universitaria. Esta reforma, que comenzó en los países desarrollados, especialmente los Estados Unidos y Francia, nació como respuesta a un problema que en ese momento se afirmó como central: la necesidad de cerrar la brecha entre la práctica matemática de los investigadores, profesionales en el campo y el tipo de matemática que se impartía en la secundaria y en la universidad. En 1961 se realizó la primera conferencia Iberoamericana sobre Enseñanza de la Matemática (Bogotá, 1961), a la cual asistieron delegados de todos los países americanos y algunos matemáticos europeos. Las principales recomendaciones de esta conferencia se referían a la necesidad de estimular la preparación de profesores de matemáticas para la enseñanza media, de manera que éstos pudieran afrontar, con posibilidades de éxito, los cambios que se iban a generar con la introducción en los programas escolares de las ideas de la matemática moderna, sin embargo esta decisión no fue una panacea, porque no había un puente entre lo abstracto y lo intuitivo en las matemáticas.

Actualmente, respecto a esta propuesta de la década de los 60 pocos han sido los cambios dados en los programas de enseñanza matemática. Uno de ellos corresponde precisamente al cálculo, porque su enseñanza continúa siendo muy algebraizada, Artigue (2003, p. 215) y aun cuando el cálculo requiere del álgebra, así como de las geometrías (euclidiana, no euclidianas, analítica,…), de la probabilidad, de la estadística, de la topología,…; es también importante la ubicación en un contexto histórico Cabañas y otros (2006, p. 7-8), para desde allí retomar la importancia del cálculo centrado en el análisis, en el cambio, en la causalidad y en este sentido es una herramienta potente para medir, representar, evaluar, modelar y resolver algunos problemas propios de la Contaduría y otras disciplinas que lo requieren, a través del acercamiento de los estudiantes al lenguaje riguroso y formal.

3 Ver también, "Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica", Gascón, J. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18/1, n° 52, pp. 7-33, 1998.

En el cálculo, según Gascón (2001, p. 131), las nociones de causalidad, de cambio, de incertidumbre, de infinito, de indefinido,…, son aspectos presentes y además son centrales en él, por ello su enseñanza es diferente a la del álgebra o a la de otros dominios de las matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, para que el lector se ubique en el contexto histórico y epistemológico del cálculo se presentarán a continuación algunos hechos históricos que permiten entender su naturaleza.

Reseña histórica del Cálculo[4]

El recuento histórico que se hace en este documento corresponde a escritos de historiadores reconocidos en el ámbito y aceptados por la comunidad, como válidos e importantes, tales como Boyer, Bagni y otros.

Alrededor del año 450 a. C. Zenón de Elea planteó una serie de problemas que estaban basados en lo indefinido (como si fuera el infinito). Por ejemplo, argumentó que el movimiento era imposible: *Si un cuerpo se mueve de A a B entonces, antes de llegar a B pasa por el punto medio, B_1, de AB. Ahora bien, para llegar a B_1 debe primero pasar por el punto medio B_2 de AB_1. Continuando con este argumento se puede ver que A debe moverse a través de un número infinito de distancias y por lo tanto no puede moverse*. Esta idea corresponde a una confusión entre el infinito y lo indefinido (Boyer, 1992, pp.109-110). Actualmente este hecho se manifiesta en lo que se llama el infinito actual (el concepto de límite) y el infinito potencial (escuela griega, est*ática*). *Para el autor de este artículo, es injusto que se siga enseñando el cálculo con la noción griega de infinito potencial (proceso estático), por la formación matemática de algunos profesores que enseñan cálculo sin conocer su naturaleza relacionada con su historia, su epistemología y su didáctica (el autor) asociada al cambio y a la estabilidad del mismo.*

De otra parte, respecto al desarrollo del infinito actual (el que dio nacimiento al límite) Leucipo, Demócrito y Antifón hicieron contribuciones al método exhaustivo griego al que Eudoxio dio una base científica alrededor del año 370 a. C. El método se llama exhaustivo ya que considera las áreas medidas como expandiéndolas de tal manera que cubran más y más del área requerida. Sin embargo, Arquímedes alrededor de 225 a. C. hizo una de las contribuciones griegas más significativas. Su primer avance importante fue demostrar que el área de una sección de parábola es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo con las mismas base y vértice, e igual a $\frac{2}{3}$ del área del paralelogramo circunscrito. Arquímedes construyó una secuencia infinita de triángulos empezando con uno de área A y añadiendo continuamente más triángulos entre los existentes y la parábola para obtener áreas A, $(A + A/_4)$, $(A + A/_4 + A/_{16})$, $(A + A/_4 + A/_{16} + A/_{64})$, ... El área de la sección de la parábola es, por lo tanto: $A(1 + {}^1/_4 + {}^1/_4{}^2 + {}^1/_4{}^3 + ...) = ({}^4/_3)A_n$. Este es el primer ejemplo conocido de suma de una serie infinita. Arquímedes usó el método exhaustivo para encontrar la aproximación al área de un círculo. Esto, por supuesto, es un ejemplo temprano de integración que llevó a valores aproximados del número π. (Boyer, 1992, pp.171-176).

No hubo más progresos en este sentido, sino hasta el siglo XVI cuando la mecánica empezó a llevar a los matemáticos a examinar problemas como las lentes, los centros de gravedad y el cambio entre otros. Tres matemáticos de este siglo, fueron los siguientes en hacer contribuciones importantes que permitieron al cálculo diferenciarse del álgebra. Ellos fueron Fermat, Roberval y Cavalieri. Ellos usaron el método griego de Exhaución con secciones, sin mucho rigor para hallar áreas de secciones bajo curvas y también hallaron derivadas, pero con un aporte eminentemente algebraico. Curioso que hoy en día se siga promoviendo el aprendizaje de la derivada como una práctica algebraizada, como es el caso del cociente incremental, desarrollado por Fermat.

4 *Tomada de Boyer, 1992*

En este mismo siglo los trabajos de Descartes y de Hudde tuvieron una gran influencia en el de Newton. Otros aportes fundamentales en el cálculo los hicieron Torricelli y Barrow (profesor de Newton). El segundo dio un método de tangentes a una curva en el que la tangente está dada como el límite de una cuerda cuando los puntos se acercan uno a otro y que es conocido como el triángulo diferencial de Barrow; también desarrollaron la idea de que la derivada y la antiderivada eran procesos inversos. A partir de estos resultados fue que Newton dio explícitamente el Teorema Fundamental del cálculo. Los trabajos de Newton (1666) sobre fluxiones y de Leibniz (1672, 1684, 1686) sobre "los infinitésimos", marcan el nacimiento del análisis matemático o mejor dicho del cálculo. Para algunos historiadores Leibniz es considerado el padre del cálculo por sus aportes y porque fue el primero en direccionarlo hacia el análisis. A él se debe la actual notación de la integral y de la derivada, a pesar que Newton halló en serie de potencias la "función" exponencial fue Euler quien introdujo la notación actual de e^x, *la* cual ha permitido resolver problemas de las ciencias naturales, sociales entre ellas: economía, administración, ingenierías y contaduría, porque su construcción conceptual corresponde a un límite.

Después de Newton y Leibniz, el desarrollo del cálculo fue continuado por Jacobo y Johann Bernoulli, Berkeley, Maclaurin y otros pero fue necesario esperar hasta los trabajos de Weierstrass, Bolzano, Cantor, Dedekind y Cauchy en el siglo XIX, en el que se precisó el rigor matemático como actualmente se conoce y se determinó la naturaleza del cálculo en términos de la causalidad y el cambio, siendo hoy conocido como análisis matemático, (Boyer, 1992).

Hay un hecho fundamental en la historia del cálculo y es que primero se aprendió a integrar (sumas, sumatoria,…), luego se derivó (restas, diferencias,…), a finales del siglo XIX se construyó el concepto de límite y el rigor matemático; por último en el s. XX se definió el concepto de función. Este hecho histórico pone de manifiesto la diferencia entre la didáctica, la epistemología y la historia de las matemáticas; su desconocimiento contribuye a la confusión que se genera en el aprendizaje del cálculo Kieran (2001, p.117), porque se cree que el desarrollo del cálculo ha sido lineal y se desconocen las "Idas y venidas", que las matemáticas han sufrido durante siglos de trabajo de seres humanos como Arquímedes, Descartes, Newton, Leibniz y otros.

Es importante decir que el cálculo como construcción social y cultural, ha respondido a las necesidades de épocas diferentes y diversas. La construcción fue el producto de las acciones de cientos de personas a lo largo de varios siglos y además responde a situaciones en las que están presentes fenómenos (naturales, sociales,…), que requieren de un lenguaje formal y riguroso para estudiarlos; además el cálculo, presenta dificultades en el aprendizaje de los estudiantes por su complejidad y naturaleza[5]. En este sentido la Contaduría como profesi*ón*, estudia algunos problemas que la aritmética y el álgebra no pueden ayudar a resolver porque el cambio, la incertidumbre y la causalidad están presentes en los fenómenos económicos del s. XXI y en el desarrollo de la contabilidad que como columna vertebral de la contaduría exige ampliar el umbral de los conocimientos matemáticos que sustenten los procesos de medición, valoración, representación y evaluación.

Reseña histórica de la contaduría

"La Teoría Contable puede ser considerada como un motor indiscutible de la evolución de la contabilidad en los últimos 100 años (Mattessich, 2002; García-Casella, 2001)", mencionados por Villegas (2003, p. 3).

Para Cubides (1994, pp.1-2) la contabilidad es un pilar fundamental e histórico de la contaduría; es la fuente primordial de información, facilita la planificación macro y micro económica, promueve la creación y colocación eficiente de capitales, genera la

5 ARTIGUE M. 1995. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (eds) Ingeniería didáctica en Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica: México, pp. 97-140 confianza entre inversores y ahorradores, hace posible el correcto funcionamiento de las instituciones y unidades económicas, impulsa el desarrollo de los mercados capitales y constituye el motor de la actividad económica, fomentando el empleo racional de los recursos existentes e mm . . n un país. Pero también hay que responder a los procesos de cambio, en los que las variables son de diversa naturaleza (social, económica,…) y por lo tanto la causalidad, la incertidumbre y el infinito actual están presentes como fenómenos que estudia y dieron nacimiento al cálculo. El aspecto social de la contaduría y de la administración de empresas se evidencia en la naturaleza de las mismas y la información contable actúa en y para la colectividad, su validez y perfección se alcanzan en función de su concordancia con los valores, pautas y requerimientos de la comunidad en su conjunto; en la medida en que uno de estos requerimientos es el desarrollo, y dado que contribuye decididamente al mismo, queda claramente puesta de manifiesto la dimensión altamente social de la contabilidad Gracia (2002, p. 18).

Gracia también afirma que el experto contable no sólo debe conocer las técnicas de representación que utiliza en su tarea, sino que también debe poseer capacidad para interpretar no sólo los fenómenos económicos sino todos aquellos que se desarrollan en el entorno en el que se desenvuelve su actuación; conocer las obligaciones que se le imponen a la información financiera, a la empresa y a la actividad económica; tener amplios conocimientos de legislación; ser conciente del papel de la información en la economía y en la sociedad actual, para que pueda anticiparse a los requerimientos de información; dominar técnicas cuantitativas de áreas como la econometría, la informática, el pronóstico de apoyo empresarial y el análisis matemático.

La contaduría tiene un origen empírico. La contabilidad es tan antigua como las organizaciones sociales dueñas de algunos excedentes de producción y de ciertas actividades de intercambio; los individuos responsables de las funciones de registro y control de ingresos y gastos, hasta hace pocos años, se capacitaron exclusivamente a la luz de la experiencia acumulada y de la práctica personal. Estas condiciones de formación, con el paso de los años permanecieron ancladas, por lo que la sociedad y la misma universidad le han atribuido a la contaduría un carácter eminentemente técnico a pesar de incluir herramientas desarrolladas por otras disciplinas, en especial las de la economía, queda una deuda para que la profesión de la contaduría sea una ciencia contable, Cubides (1994, pp.50-52). En Colombia, en la década de los años cincuenta, la contaduría logra el rango de profesión universitaria y en los años sesenta se consolida su presencia en la Universidad, Cubides (1994, p.50).

Para Cubides es claro que la contaduría pública es importante en la actividad económica y según él se evidenció con la promulgación de la Ley 43 de 1990. Con esta Ley se proclama el Código de Ética, el cual le ha permitido a la Junta Central de Contadores ejercer su papel de tribunal disciplinario de la profesión, porque con este Código se hace posible que el ejercicio individual no ético de los contadores públicos sea sancionado y así se pueda sanear la profesión. Sanear la profesión conlleva también a que los contadores(as) vayan más allá de las técnicas contables, es decir que sean analistas (conjeturen, anticipen eventos,…) y que construyan saberes que dinamicen el carácter de ciencia contable y no de técnica contable.

Entre 1929 y 1951 la educación comercial se extiende por todo el país, sobretodo en las ciudades comercial o industrialmente importantes y ésta predominaba en colegios de tipo religioso que determinaron las siguientes características: Regia disciplina, espíritu metódico, sentido práctico, contenido ideológico tradicional, dogmático y poco conflictivo. En el año de 1952 las reformas al sistema educativo colombiano culminaron con la denominación de "enseñanza universitaria" al nivel superior. Así, nació la universidad técnica. Durante los diez años siguientes se desarrollan una serie de conflictos básicos en torno a la significación de la práctica de la contaduría, a la concepción de la enseñanza contable y al modelo de reglamentación de la profesión. En este período se crean las primeras facultades privadas de contaduría Cubides (1994, p.55).

En la década de los 80 la universidad colombiana entra en crisis como consecuencia de la expansión indiscriminada del sistema de educación superior, del fracaso de las políticas de planeación educativa, de la escasa adecuación y aporte de los profesionales al modelo de desarrollo, así como al atraso de los contenidos formativos, crisis a la cual no escapa la contaduría. La necesidad de abandonar la concepción técnica e instrumental de la disciplina, obliga a consolidar la reflexión teórica y a identificar el fundamento científico de los principios por los cuales ha de regirse, lo cual diferencia las facultades que se interesan simplemente por una preparación profesionalizante y otras que buscan llevar al estudiante a una verdadera probidad intelectual, así como a su autonomía mental Gracia (2002, p. 20).

Hoy la formación del contador público está orientada por el interés de la calidad, la globalización y la abundante información. La globalización de los conocimientos han transformado los enfoques de la educación en los cuales el estudiante es protagonista de su propio aprendizaje y no un depósito de conocimientos, muchos de los cuales se tornan obsoletos rápidamente. Ello implica una transformación en el enfoque de enseñanza que oriente el aprendizaje hacia la autonomía responsable, que esté mediada por la didáctica, la epistemología y la historia de la contabilidad y del cálculo (profesor de matemáticas) que orienten en el contador un conjunto de conocimientos, competencias (procesos) y valores. Se insiste en que, además de los conocimientos y destrezas, el contador debe poseer habilidades para formarse como empresario, analista financiero, comunicador científico, relacionista público, fiscalizador y administrador.

La historia tanto del cálculo como de la profesión contable (Contaduría), permite inferir que han sido construcciones de diferentes culturas y épocas, que evidencian algunos aspectos comunes en ellas, como son: su naturaleza social, su historicidad empírica, su aplicación en la resolución de problemas, la contabilidad como relación matemática y núcleo fundamental de la contaduría, su contexto ético y en valores.

Aportes del cálculo (análisis matemático) a las competencias profesionales del contador.

Respecto a las competencias es importante recordar que existen diversas definiciones y trabajos sobre ellas, por ejemplo en Colombia las del ICFES (2000-2013), las de las Pruebas Saber (2001 en adelante) y las del SENA; por mencionar algunas. Es entonces claro que no existe una única tipología de éstas, sí en cambio hay algunos aspectos comunes entre ellas como por ejemplo el de relacionarlas con procesos y desempeños, elementos que se resaltarán en este escrito para poder ubicar al cálculo en este contexto. Dado que la definición de competencia es compleja, controvertible y difusa para algunos, en este escrito no se retomara ninguna, así como tampoco se propondrá una y éstas serán tomadas como procesos.

El cálculo (análisis matemático) genera (construye, desarrolla,…) procesos cognitivos (razonamiento, conteo, clasificación, seriación, análisis, síntesis,…) que han dado lugar a un cuerpo de conocimientos que sirven para resolver algunos problemas como por ejemplo "*quien quiera que tenga un negocio necesita llevar el registro de cómo van las cosas. Pero, ¿Cómo se hace esto? Con frecuencia los profesionales en finanzas miden el desempeño de una compañía por medio de fracciones denominadas razones financieras. Existen más de 50 razones financieras de uso común. ¿Cuál utilizar? Depende de si el analista está tratando de evaluar el crecimiento de una compañía, su productividad, su nivel de endeudamiento o algún otro aspecto de su desempeño*". Haeussler (2003, p.1). El anterior ejemplo está ubicado en un contexto en el que el resolutor debe conocer el aspecto que necesita resolver del problema, para determinar el modelo matemático adecuado al caso, porque no sería coherente hacer uso de las 50 definiciones de las razones financieras para hacerlo. Ahora bien, una razón financiera también puede ser de cambio (un proceso de marginalidad) y en ese sentido corresponde a los procesos del cálculo o análisis matemático llamados diferenciabilidad y antidiferenciabilidad (derivada e integral).

Algunos procesos inherentes a la matemática y a la contaduría, (en la enseñanza del cálculo) son:

• **Pensar y razonar**. Plantear las preguntas características del cálculo (punto de equilibrio, razón de rotación de inventarios, aplicación de máximos y mínimos, área entre curvas, excedente de los consumidores y de los productores,...); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); entender, manipular el rango y los límites de ciertos conceptos del cálculo diferencial e integral.

• **Argumentar**. Saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamientos; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; construir y expresar argumentos matemáticos (hallar curvas marginales, áreas, aplicar límites).

• **Comunicar**. Capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas que requieran de conceptos matemáticos y de su lenguaje simbólico.

• **Modelar**. Estructurar la situación que se va a moldear; traducir una "realidad" a una estructura del cálculo; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); monitorear y controlar el proceso de modelado.

• **Plantear y resolver problemas**. Plantear, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas que requieran del cálculo.

• **Representar**. Codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre ellas; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares (gráficas, tablas, expresiones algebraicas, …).

• **Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas**.

Decodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico del cálculo, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje Simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar operaciones.

• **Utilizar ayudas y herramientas**. Conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad del cálculo, comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

Ejemplo del empoderamiento de las relaciones que se establecen entre el cálculo como matemática escolar, los procesos anteriores y la contaduría está el de estudiar la elasticidad de las funciones de oferta y demanda en el desarrollo y dinámica de la economía (local y global). En este sentido se propuso a un grupo de estudiantes de contaduría de segundo semestre en 2011, de la universidad Libre (Sede Bogotá) como un ejercicio de aula, realizar una actividad práctica para encontrar la elasticidad de las funciones de oferta o demanda con datos reales y verificables.

Para ello los grupos tenían que presentar datos con soporte en evidencias confiables de cómo los obtuvieron (encuestas, datos proporcionados por una empresa,…) sobre una situación particular, en la que intervinieran ofertantes o demandantes.

Se hace necesario aclarar que para hallar el valor correspondiente a la derivada $f'(a)$ en un punto $(a, f(a))$, se asumió el hecho de que la función media es igual a la derivada en un punto crítico (máximo o mínimo) y para tal caso, este valor de la derivada en un punto fue hallado como dato agrupado discreto con dispersión distinta de cero, como una diferencia finita dividida (DFD), de la interpolación de Newton, en donde, el polinomio de *n-ésimo* orden es:

$$f_n(X) = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1) + \ldots + b_n(X - X_0)(X - X_1)\ldots(X - X_{n-1})$$

Con $\boldsymbol{b_0}$, $\boldsymbol{b_1}$,..., $\boldsymbol{b_n}$., puntos en la evaluación de los coeficientes y para lo cual se requieren ***n+1*** puntos para obtener un polinomio de *n-ésimo* orden: $\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_1}$,..., $\boldsymbol{X_n}$. Usando estos datos, con las ecuaciones siguientes se evaluaron los coeficientes:

$b_0 = f(X_0)$
$b_1 = f[X_1, X_0]$
$b_2 = f[X_2, X_1, X_0]$
...
$b_n = f[X_n, X_{n-1}, ..., X_1, X_0]$

En donde la función entre corchetes son diferencias divididas finitas.

Por ejemplo, la primera diferencia finita dividida se representa generalmente como:

$$f\left[X_i, X_j\right] = \frac{f(X_i) - f(X_j)}{X_i - X_j}$$

La segunda diferencia dividida finita, que representa la diferencia de las dos primeras diferencias finitas divididas, se expresa como:

$$f\left[X_i, X_j, X_k\right] = \frac{f\left[X_i, X_j\right] - f\left[X_j, X_k\right]}{X_i - X_k}$$

De manera similar, la *n-ésima* diferencia dividida finita es:

$$f\left[X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0\right] = \frac{f\left[X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\right] - f\left[X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_1, X_0\right]}{X_n - X_0}$$

Estas diferencias se usan para evaluar los coeficientes de la ecuación, los cuales se sustituyen en la misma, para obtener el polinomio de interpolación de Newton.

$$f_n(X) = f(X_0) + (X-X_0)f[X_1, X_0] + (X-X_0)(X-X_1)f[X_2, X_1, X_0] + \\ \ldots + (X-X_0)(X-X_1)\ldots(X-X_{n-1})f[X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0]$$

De acuerdo con lo anterior, se eligió una situación de un grupo que planteó el siguiente objetivo: “Identificar para qué sirve la aplicación de la fórmula de la elasticidad en las empresas y qué determinaciones se pueden dar a partir de este ejercicio”. Ellos se propusieron, *Conocer el comportamiento de la elasticidad en la oferta de la entrega de correspondencia que realiza BSI Colombia S.A* (Empresa nacional de mensajería), *para la empresa electrificadora del Caribe S.A. E.S.P En la ciudad de Barranquilla y sus alrededores analizando el año 2010 (algunos meses)*. El desarrollo de la situación planteada correspondió a lo siguiente.

Las siguientes figuras (gráficas y tablas) escaneadas corresponden al trabajo presentado por el grupo en cuestión y son soporte del análisis de la situación planteada, así como de las conclusiones.

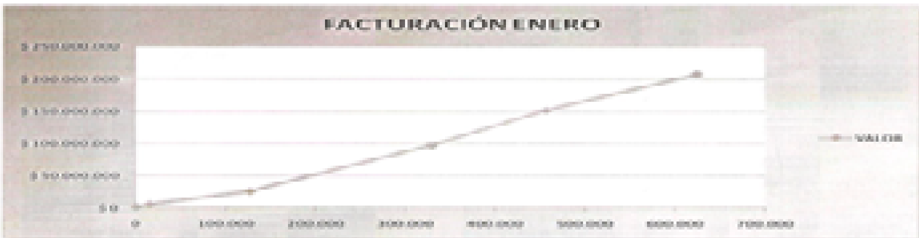
SEGUIMIENTO DE LA OFERTA

ENERO 2010

1. FACTURACIÓN

CANTIDAD	VR. TOTAL FACTURADO
424	$ 890.400
15.224	$ 4.140.558
126.873	$ 25.120.854
328.936	$ 96.378.248
456.832	$ 151.668.224
623.987	$ 207.163.684

2. GRÁFICA



3. DATO ELASTICIDAD CANTIDADES

424					
15.224	14.800				
126.873	111.649	96.849			
328.936	202.063	90.414	-6.435		
456.832	127.896	-74.167	-164.581	-158.146	
623.987	167.155	39.259	113.426	278.007	436.153

Figura 1

En la figura1, se representa la tabla de valores de la cantidad *Q (*de correspondencia entregada) contra precio (*P*, facturación total del mes), la gráfica y DDF de cantidades. Este procedimiento se repitió en cada mes del año 2010.

La figura 1, corresponde al desarrollo de la elasticidad del mes de Enero del año mencionado. Este mismo procedimiento fue usado por sus autores, para los demás meses del año.

4. DATO ELASTICIDAD VR. TOTAL FACTURAS

$ 890.400					
$ 4.140.558	$ 3.250.158				
$ 25.120.854	$ 20.980.296	$ 17.730.138			
$ 96.378.248	$ 71.257.394	$ 50.277.098	$ 32.546.960		
$ 151.668.224	$ 55.289.976	-$ 15.967.418	-$ 66.244.516	-$ 98.791.476	
$ 207.163.684	$ 55.495.460	$ 205.484	$ 16.172.902	$ 82.417.418	$ 181.208.894

5. FORMULA ELASTICIDAD

$$\text{Elasticidad} = \frac{\frac{P}{Q}}{\frac{\Delta P}{\Delta Q}} = \frac{\frac{\$\,80.893.661}{258.713}}{\frac{\$\,181.208.894}{\$\,436.153}} = \frac{\$\,313}{415} = \boxed{0{,}75}$$

Figura 2

BOLETÍN VIRTUAL-AGOSTO-VOL 5-8 ISNN 2266-1536

En la figura 2, se presenta la tabla de elasticidades del año 2010, así como la tabla de los promedios del precio (*P*) y de la cantidad promedio de cada mes.

PROMEDIO ELASTICIDAD MES A MES

MES	ELASTICIDADES
ENERO	0,75
FEBRERO	0,98
MARZO	1,08
ABRIL	1,56
MAYO	1,56
JUNIO	0,59
JULIO	0,61
AGOSTO	0,85
SEPTIEMBRE	0,50
OCTUBRE	0,83
NOVIEMBRE	0,88
DICIEMBRE	0,69
2010 =	0,91

ELASTICIDAD 2010

1. PRECIO Y CANTIDAD

MES	P	
ENERO	$ 80.893.661	
FEBRERO	$ 107.450.272	
MARZO	$ 135.619.120	
ABRIL	$ 113.762.600	
MAYO	$ 114.566.361	
JUNIO	$ 70.472.620	
JULIO	$ 104.591.865	
AGOSTO	$ 81.189.190	
SEPTIEMBRE	$ 84.895.014	
OCTUBRE	$ 92.180.208	
NOVIEMBRE	$ 115.297.680	
DICIEMBRE	$ 95.424.450	
TOTAL	$ 1.196.243.041	$ 99.686.920

MES	Q	
ENERO	258.713	
FEBRERO	342.083	
MARZO	389.525	
ABRIL	358.737	
MAYO	360.740	
JUNIO	331.280	
JULIO	357.440	
AGOSTO	274.043	
SEPTIEMBRE	307.328	
OCTUBRE	313.320	
NOVIEMBRE	377.803	
DICIEMBRE	318.463	
TOTAL	3.984.475	332.040

Figura 3

La primera tabla de la figura 3 (***elasticidad***), corresponde a la elasticidad hallada como DDF mes a mes y no como un promedio, como escribieron ellos. Las tablas de precio y cantidad corresponden a los promedios de cada mes y los totales de ellas son el promedio del año. Este análisis es aproximado de acuerdo con la condición de que hay un precio mínimo fijado por la empresa para la entrega de un número determinado de correspondencia (fijado por la empresa), por lo tanto ese mínimo es comparable con el promedio (ver más adelante el teorema 1).

La siguiente figura 4 corresponde a los promedios hallados mes a mes para las cantidades y el costo (año 2010), a partir de estos valores, el grupo determinó la elasticidad de la función de oferta para el año 2010, en la empresa.

2. ΔP Y ΔQ

MES	Δ P	
ENERO	$ 181.208.894	
FEBRERO	$ 310.011.554	
MARZO	$ 79.723.441	
ABRIL	$ 156.052.519	
MAYO	$ 71.392.313	
JUNIO	$ 292.612.303	
JULIO	$ 272.042.023	
AGOSTO	$ 184.298.766	
SEPTIEMBRE	$ 408.127.304	
OCTUBRE	$ 459.466.335	
NOVIEMBRE	$ 221.011.199	
DICIEMBRE	$ 540.060.120	
TOTAL	$ 3.176.006.771	**$ 264.667.231**

MES	Δ Q	
ENERO	436.153	
FEBRERO	966.497	
MARZO	-247.460	
ABRIL	767.116	
MAYO	350.137	
JUNIO	811.676	
JULIO	565.252	
AGOSTO	526.882	
SEPTIEMBRE	733.974	
OCTUBRE	1.299.846	
NOVIEMBRE	634.402	
DICIEMBRE	1.247.729	
TOTAL	8.092.204	**674.350**

3. FORMULA ELASTICIDAD 2010

$$\textbf{Elasticidad}= \frac{\frac{P}{Q}}{\frac{\Delta P}{\Delta Q}} = \left|\frac{\frac{\$\,99.686.920}{332.040}}{\frac{\$\,264.667.231}{674.350}}\right| = \left|\frac{300}{392}\right| = \boxed{0,76}$$

Para el análisis del comportamiento general de la elasticidad de la oferta en el año 2010, aplicamos dos métodos, el primero que fue hallar el promedio de las elasticidad obtenidas mes a mes, que nos arrojo el dato de 0.91 y el segundo método que fue aplicar la formula de la elasticidad a partir del precio, la cantidad, Δ del precio y Δ de la cantidad de cada mes, el resultado fue de 0.76, en los dos casos nos indica que durante este año la oferta del servicio prestado por BSI COLOMBIA S.A. de la entrega de correspondencia respecto al cliente ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. E.S.P. tuvo un comportamiento inelástico, ya que este presenta una variación menor de la cantidad ofrecida respecto al precio.

Teniendo en cuenta lo anterior, la variación en la cantidad de servicios prestados no aumenta, ni disminuye considerablemente ya que como se evidencia en los datos recolectados el precio mes a mes se mantiene.

Figura 4

En la figura 4 determinaron la elasticidad de la oferta del año 2010 a partir de DDF, que fue de 0.91 y la compararon con la elasticidad promedio 0,76 hallada en la figura 3.

El hecho de que la elasticidad de la función de oferta sea menor que uno, indica que la empresa debió aumentar la cantidad de la entrega de correspondencia por el mismo precio; luego ese hecho, generó a la empresa gastos no previstos.

La siguiente figura 5 corresponde a las conclusiones que el grupo sacó de su respectivo trabajo.

CONCLUSIONES

Mediante el ejercicio de aplicación de la formula de la elasticidad de la oferta logramos identificar que esta es aplicada en las empresas con el fin de conocer el comportamiento de la variación de la cantidad frente al precio dado según la actividad económica que realice la misma, a partir de los resultados los empresarios pueden tomar decisiones como incrementar la producción de un bien o la prestación de un servicio.

En el caso tomado especificamente que fue el análisis del comportamiento de la elasticidad en la oferta de la entrega de correspondencia que realiza BSI COLOMBIA S.A. para la empresa ELECTRIFICADORA DEL CARIBE S.A. E.S.P. en la ciudad de Barranquilla y sus alrededores analizando el año 2010, llegamos a la conclusión de que el comportamiento de la oferta es inelástico, pues no existen cambios relevantes en la cantidad de prestación del mismo, ya que el precio en la prestación del servicio se mantiene.

Cabe resaltar que en el análisis realizado durante el año notamos que en los meses de marzo, abril y mayo el comportamiento de la oferta fue elástico pues existieron cambios destacados en la cantidad facturada ya que la variación de los precios fue mayor, el mes de febrero el comportamiento de la elasticidad en la oferta se acerca a uno, o sea que la elasticidad de la oferta podria ser unitaria, porque la variación de la cantidad ofrecida es proporcional o equivalente a la variación del precio.

Figura 5

De estas conclusiones se aclaró la consecuencia de que la empresa ofertante tenga una elasticidad inelástica. Hizo falta informar que al comparar las elasticidades promedio con la razón de cambio (diferencias divididas finitas- DDF), las dos dieron como resultado una elasticidad inelástica con valores cercanos pero diferentes, la diferencia numérica entre ellas se debe entre otras a la dispersión que presentaron las elasticidades de los meses de Marzo, Abril y Mayo y de otra que el comportamiento de la oferta en estos meses favoreció (económicamente) a la empresa ofertante.

Otro aspecto a resaltar en este trabajo es el hecho de comparar las elasticidades halladas como diferencias divididas finitas con la hallada como un promedio de la función de demanda P(Q), teniendo en cuenta el teorema 1, enunciado a continuación.

1. Elasticidad-precio de la demanda (E_d): determina la sensibilidad de la cantidad demandada de un bien a las variaciones de su precio, manteniéndose todo lo demás constante. Su definición exacta “es la variación porcentual de la cantidad demandada dividida por la variación porcentual del precio”. Luego:

   $E_d > 1$- Demanda elástica

   $E_d = 1$- Demanda unitaria

   $E_d < 1$- Demanda inelástica

La elasticidad de la demanda respecto al precio, se define como

$$\left[E(Q,P) = -\frac{P}{Q} * d'(P) \right]$$

A partir de este marco conceptual, se definieron la elasticidad para la oferta (E_Q) y la elasticidad para la demanda (E_P). Teniendo en cuenta que: la variable independiente en la oferta es el precio y en la demanda es la cantidad demandada, se hizo la siguiente construcción para desarrollar las situaciones.

Q: Representa una cantidad

Q(p): es la función de la oferta respecto al precio

p: es el precio de una cantidad Q

P(Q): es la función de la demanda respecto a una cantidad.

Función de demanda promedio (en función de la cantidad Q).

Las rectas secante y tangente son de la forma $y = mx + b$, de donde,

m: pendiente recta secante, que pasa por los puntos (Q, P) y (Q_1, P_1), y b, punto de corte con el eje de las ordenadas ***y***, luego:

$$m_{\sec} = \frac{P_1 - P}{Q_1 - Q} = \frac{P_1 - P}{\Delta Q}, dedonde\ldots \quad m_{\sec}\Delta Q = P_1 - P \quad y \quad como \quad también \quad se \quad cumple$$

$$que: \quad P_1 = P + \Delta P, \quad entonces \quad m_{\sec}\Delta Q = P + \Delta P - P; \quad luego \quad m_{\sec} = \frac{\Delta P}{\Delta Q}$$

$$Ahora \quad si \quad Q \to Q_1 \quad entonces \quad m_{\sec} \to m_{\tan} \quad por \quad lo \quad tanto$$

$$m_{\tan} = P' \quad de \quad donde \quad P' = \frac{dP}{dQ} \quad y \quad por \quad lo \quad tanto \quad si \quad \Delta Q \to 0$$

$$\frac{P(Q + \Delta Q) - P(Q)}{\Delta Q} \cong P'(Q) \quad y, \quad P'(Q)\Delta Q + P(Q) = P(Q + \Delta Q) \quad si \quad dQ \to 0$$

$$se \quad tiene \quad que: \quad \frac{dP}{dQ}\Delta Q + P(Q) = P(Q + \Delta Q) \quad y, \quad como \quad dQ \cong \Delta Q, \quad entonces$$

$$dP + P = P(Q + dQ)$$

De acuerdo con lo anterior, las siguientes expresiones de la elasticidad (E) de las funciones de oferta y demanda son equivalentes.

En este sentido, dadas las relaciones de equivalencia cuando se hace que $\Delta Q \to 0$ (delta de Q tienda a cero), se tiene que la diferencia, ΔQ, se aproxima al diferencial, dQ.

Teniendo en cuenta el análisis anterior, se calculó la elasticidad como una diferencia dividida finita, es decir que cualquiera de estas expresiones, fueron válidas para el trabajo con datos discretos y no agrupados, que además presentaban dispersión distinta de cero.

De otra parte se requiere hallar y fijar los valores mínimos de las funciones de oferta y demanda, así: En la oferta la cantidad (Q), de un producto para maximizar las ganancias y en la demanda el precio (P) por mayor cantidad (Q). De acuerdo con esto se tiene que:

Teorema 1.

$$Promedio: \overline{P(Q)} = \frac{P(Q)}{Q}, \quad si \quad \overline{P(Q)} \quad tiene \quad un \quad mínimo \quad (1)$$

$$entonces: \quad si \quad \Delta Q \to 0, \quad \frac{\Delta P}{\Delta Q} \cong \frac{dP}{dQ} \quad y \quad también \quad \overline{P} \cong P' \cong \frac{dP}{dQ}$$

$$Demostración \quad (1): \quad Como \quad \overline{P(Q)} = \frac{P(Q)}{Q} (definición \quad de \quad promedio)$$

$$\overline{P'(Q)} = \frac{QP'(Q) - P(Q)}{Q} = 0 \quad (información, \quad existencia \quad de \quad un \quad mínimo)$$

$$QP'(Q) = P(Q) \quad de \quad donde \quad P'(Q) = \frac{P(Q)}{Q} = \overline{P(Q)} \quad lo \quad que \quad se \quad quería \quad demostrar.$$

Esta relación de razón promedio () equivalente con la razón instantánea, corresponde al desarrollo histórico que la derivada, antes de llegar a ser función tuvo entre los siglos XVI-XIX, tiempo durante el cual los infinitésimos estuvieron presentes en los trabajos matemáticos en occidente, hasta cuando se construyeron los números reales s. XIX. (Tomado de la tesis doctoral de (Ramírez 2012).

Conclusiones

Se evidencia que el desarrollo histórico de la contaduría es eminentemente social y en ese proceso aparecieron las variables que dieron paso a los procesos variacionales determinados por el cambio, la causalidad y la incertidumbre. La contabilidad es un pilar fundamental de la contaduría que ha tenido que adecuarse para dar respuesta a los procesos planteados en la dinámica económica del s. XXI y que debe posibilitar la comunicación confiable en estos procesos realizados por contadores, economistas y administradores, porque las diversas formas de las razones de cambio financiera exigen de modelos matemáticos variacionales, como los proporcionados por el cálculo. Resolver un problema propio del contador, modelarlo, comunicar una posible solución, argumentar los resultados hallados, predecir y anticipar eventos propios de una empresa, conjeturar resultados deben ser habilidades de un contador.

BIBLIOGRAFIA

ARTIGUE, M. (2001), What can we learn from educational research at the university level? In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 207–220). Holland: Kluwer Academic.

ARTIGUE, M. (2003). Reaction. Learning and teaching analysis: What can we learn from the past in order to think about the future? In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of l'enseignement mathématique: moments of mathematics education in the twentieth century. Monograph No. 39* (pp. 211–223). Genova, Italia: L'Enseignement Mathématique.

BOYER, C. (1992), Historia de la Matemática, versión Española de Mariano Martínez Pérez, Alianza Universidad Textos, Madrid España.

CABAÑAS, G. Y CANTORAL, R. (2006). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, G. Martínez y R. Farfán, *et al.* (Eds.), *Matemática educativa: algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 3–25). México: Días de Santos.

CUBIDES, H. (1994). Historia de la Contaduría Pública en Colombia Siglo XX. Fundación Universitaria Central. Santa fé de Bogotá.

GASCÓN, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (1), pp.129–159.

GRACIA, E. (2002). *Estado Actual de la Educación Contable en Colombia.* En: Del Hacer al Saber. Universidad del Cauca. Popayán.

HAEUSSLER, E. (2003), Matemáticas para Administración y Economía. Décima Edición, Editorial Prentice Hall, México.

KIERAN, C. (2001), The Mathematical Discourse of 13-year-old Partnered Problem Solving and Its Relation to the Mathematics that Emerges´, Educational Studies in Mathematics, 42, pp. 115-140.

RAMÍREZ, R., E. (2012). E*nseñanza de la función derivada con el uso de infinitesimales como alternativa para reducir los conflictos semióticos de los estudiantes*. Tesis doctoral, Programa de Doctorado Interinstitucional en Educación.

Énfasis Educación en Ciencias Matemáticas. Grupo Probleduciencias, Universidad Pedagógica Nacional.

VILLEGAS, M. (2003). Dinámica de la concepción y la enseñanza de la teoría contable en Colombia (1970-2000): una exploración institucional. Universidad Nacional de Colombia, ISSN 2011-6314.