Introducción del Álgebra Lineal en la Economía: Una Aproximación Histórica

Ángel F. Tenorio Villalón , Ana M. Martín Caraballo,
Concepción Paralera Morales
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide

RESUMEN

En este artículo mostraremos cómo el Álgebra Lineal (y más concretamente el álgebra matricial) se ha usado y viene usándose en la resolución de problemas económicos e indicaremos algunos de los que se han venido abordando con esta rama del Álgebra. Para ello, realizaremos un recorrido histórico no exhaustivo (por motivos de extensión) en el que se expondrá el nacimiento del Álgebra Lineal y cómo esta rama del Álgebra ha sido y está siendo empleada para tratar algunos problemas económicos, teniendo como ejemplo más caracteristico el del Análisis Input / Output.

Palabras claves: Ćlgebra matricial, an§lisis input-output , teor²a de juegos, introducci· n hist· rica

Área temática: Aspectos Cuantitativos del Fenómeno Económico

ABSTRACT

In this article, we show how Linear Algebra (and more concretely Matrix Algebra) has been previously used and is being used nowadays in economical problem solving, commenting some of them. To do so, we are going to run through history, but not comprehensively due to length extension, expounding Linear Algebra's birth and its application to several economical problems, with Input / Output Analysis as its most characteristic example.

***Keywords*:** Matrix Algebra, Input-Output Analysis, Game Theory, historic introduction

1. INTRODUCCIÓN

En el ámbito de las Matemáticas y sus aplicaciones, existen problemas que pueden modelizarse mediante ecuaciones e inecuaciones de primer grado o lineales. Es precisamente cuando esto ocurre que el Álgebra Lineal puede ser una herramienta a ser empleada para la resolución de tales problemas ya que los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser traducidos a expresiones matriciales a los que posteriormente pueden aplicarse distintos procedimientos. Por tanto, el trabajar con sistemas lineales y por ende, con matrices y determinantes para resolver problemas de nuestro mundo real se vuelve esencial, permitiendo resolver problemas numéricos y relativos a ecuaciones diferenciales por indicar algunos ejemplos.

Como veremos a lo largo del artículo, la necesidad de trabajar problemas algebraicos mediante ecuaciones lineales apareció bien temprano en la historia de la humanidad, teniéndose ejemplos de tales usos en los textos más antiguos sobre contenido matemático de los que se disponen. En concreto, problemas de álgebra lineal ya aparecen los las tablillas cuneiforme de la Antigua Babilonia datados sobre el año 3000 a.C., en los papiros Rhind y moscovita (entre 2000 y 1500 a.C.) o en los Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas (hacia el s. X a.C.), siendo la mayoría de ellos aplicados a problemas prácticos, muchos de ellos con un fuerte componente económico (véase Kline, 1992 y Joseph 1996 por ejemplo).

En este sentido, Fedriani et al. (2006) estudiaron las implicaciones económicas en la aparición de los sistemas de numeración a lo largo de la historia y cómo las necesidades en este sentido en las distintas culturas fueron llevando a la aparición de diferentes conceptos numéricos y la adquisición de unos niveles de representación numérica u otras.

Pero no solo los problemas económicos pueden modelizarse usando el álgebra lineal, sino que múltiples problemas de otras ramas también son tratables con este campo del conocimiento. Así, en el campo de la informática, todos los lenguajes de programación manejan los datos como ‘arrays’, que no son más que formas de interpretar tablas con un determinado número de filas y columnas (y que matemáticamente son modelizables mediante vectores o matrices, dependiendo de que el número de filas y columnas sea mayor que 1). Igualmente, las matrices pueden utilizarse como una transformación para codificar y decodificar códigos con información que se envía por un canal, mediante la teoría de códigos lineales. Más aún, las matrices de Hadamard permiten corregir los errores que se cometen al enviar información por una canal y volver a reconstruir dicha información, lo cual tiene importantes aplicaciones para la transmisión de imágenes y documentos por Internet. Otro ejemplo es en geometría con la posibilidad de traducir todos los movimientos en el espacio n-dimensional como matrices cuadradas invertibles (esto nuevamente tiene múltiples aplicaciones en el tratamiento de imágenes por ordenador).

Debido a la gran variedad de conceptos incluidos en el ámbito del Álgebra Lineal, nosotros vamos a centrarnos en este artículo en las nociones relativas al álgebra matricial. En este sentido, veremos cómo surgen los conceptos de matriz y sus operaciones esenciales y cómo dichas nociones son empleadas para diversos problemas económicos. De este modo, el presente artículo recorre históricamente el álgebra matricial desde sus comienzos, explicando la evolución histórica de las mismas en una primera sección, para posteriormente explicar diversos contenidos económicos que se pueden trabajar usando el álgebra matricial. Finalmente, indicamos algunas conclusiones al respecto del uso del álgebra matricial en el estudio de los problemas económicos tratados tanto desde un punto de vista investigador como docente.

2. HISTORIA

La presente sección se centra en desarrollar cómo van apareciendo las nociones relativas al álgebra matricial en el ámbito del conocimiento matemático. Para ello, primero iremos viendo cómo fueron apareciendo dichos conceptos dentro del tratamiento matemático que se llevó a cabo en algunas de las culturas clásicas antiguas (como pueden ser los alcanzados en la Antigua India y China), Tras ver el conocimiento matricial alcanzado en dichas civilizaciones, pasaremos a trabajar dichos conceptos en las denominadas matemáticas modernas, observando cómo se fueron formalizando los conceptos relativos del álgebra matricial a lo largo de los siglos, hasta la formalización de todos estos conceptos a finales del s. XIX.

2.1. Matemáticas antiguas

Podemos encontrar algunos ejemplos de cómo se utilizaron las matrices en las civilizaciones antiguas, aunque sin utilizar por supuesto el nombre de matriz, antes del comienzo de nuestra era. De hecho, será mucho después (hacia mediados del s. XIX) cuando se formalizará la noción y se acuñará dicho término.

2.1.1. India

En el siglo X encontramos un comentario del matemático árabe Halayudha sobre la obra de Pingala que fue un matemático indio del actual estado de Kerala. Durante mucho tiempo se creyó que Pingala vivió en el siglo VII a.C., pero según la tradición hindú Pingala habría sido el hermano menor de Panini, el gran gramático indio del s. V a.C., por lo que al final se situó a Pingala dos o tres siglos más tarde.

Pingala presentó la primera descripción conocida de un sistema de numeración binario. Describió dicho sistema en relación con la lista de métricas védicas y las sílabas cortas y largas. Su obra también contiene las ideas básicas del mātrā-meru (sucesión de Fibonacci) y el meru-prāstāra (el triángulo de Pascal) y describe la formación de una matriz (véase Joseph, 1996).

El Álgebra de la Antigua India se centraba en las actividades aritméticas y computacionales más que en hallar patrones deductivos o procedimientos técnicos. Disponían de reglas para resolver las ecuaciones lineales, sus sistemas y las ecuaciones cuadráticas. La primera incógnita de una ecuación se llamaba **incógnita** y las restantes tenían nombres de colores (negro, azul, amarillo…), siendo usual emplear iniciales de palabras como símbolos, lo que conllevaba una simbología poco extensa pero muy clarificadora. Los problemas y sus soluciones, expresados con estilo quasi-simbólico, indicaban los pasos seguidos, aunque careciendo de cualquier tipo de justificación sobre el método de resolución empleado.

Brahmagupta (598 – 665) escribió en el 628 el Brahma-sphuta-siddhanta (La ciencia perfeccionada de Brahma), cuyo decimoctavo libro se centraba en el Álgebra y en las ecuaciones indeterminadas. El libro de Bhaskara titulado Vijaganita estaba dedicado a la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas y a los sistemas de éstas.

2.1.2. China

Aunque sin tener el nombre de matriz, el origen de las matrices es muy antiguo. Así, hacia el 650 a. C. un cuadrado mágico 3 por 3, se registra en la literatura china.

El Jiu Zhang Suan Shu (Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas) es un texto matemático chino que recopilaba todo el conocimiento matemático en China desde el s. X a.C. hasta el s. I a.C., aunque la primera versión que se conserva del libro data del año 179 d.C. y cuyo autor y fecha exacta de composición son desconocidas, siendo teorizada esta en la última dinastía Chin o en la primera dinastía Han (s. I a.C.). En cualquier caso, la estructura del libro se basaba en la presentación de un enunciado de problema, seguido de un enunciado con la solución y finalmente una explicación del método de resolución empleado (que podía ir desde una regla general hasta una secuencia de operaciones sin justificación alguna). Al respecto de las explicaciones dadas a los métodos, son reconocidos como de gran valor los comentarios realizados por el matemático y filósofo matemático Liu Hui (circa 220-circa 280) en el año 263 d.C. Como hemos indicado antes, esta obra se compone de nueve capítulos en los que se resume todo el conocimiento matemático chino de esa época en los 246 problemas que plantea. Concretamente, en el capítulo octavo, titulado Fang Cheng (Método de las Tablas) encontramos el primer ejemplo conocido del uso de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas con dos o tres incógnitas en los 18 problemas planteados en este capítulo.

El método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales planteado es en esencia el mismo que utilizamos actualmente, cuyo desarrollo le debemos a Gauss (1777-1855) aunque mil quinientos años antes los matemáticos chinos utilizaron una variante de uno de los métodos de Gauss. Usando notación matricial, se partía de un sistema $A \cdot x = b$ y mediante transformaciones por columnas se llegaba a otro equivalente $D \cdot x = b$, con D una matriz triangular superior. Para las transformaciones por columnas, tuvieron que introducir números negativos y la regla cheng-fu (más-menos) para operar con ellos.

En el capítulo séptimo, titulado Ying Buzu (demasiado y no suficiente), se plantean 19 problemas que se resuelven utilizando un caso especial de la regla de Cramer para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas. Así, el concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de su publicación por el matemático japonés Seki Kowa (circa 1639-1708) en su obra "Kai Fukudai no Hô" (cuya traducción sería "Método de resolución de problemas cubiertos") de 1683, diez años antes de que lo hiciera el matemático alemán Leibniz (1646-1716) en 1693 aunque es a éste a quien históricamente se le ha atribuido el descubrimiento de los determinantes.

Posteriormente, ya en la Edad Media, Zhu Shijie (circa 1260-circa 1320) introdujo diversos métodos algebraicos generales, perfeccionado incluso la simbología y usando la exclusión sucesiva de las incógnitas en su obra Siyuan Yujian (El espejo de jade para los cuatro elementos) en 1303, donde las incógnitas eran simbolizadas por los cuatro elementos de la cultura china: cielo, tierra, hombre y objeto. Este método consistía en el uso del tian yuan (que traducido vendría a ser el "método de la incógnita celeste") y que consiste en el método de resolución ecuaciones que Horner (1786-1837) describió para las matemáticas occidentales medio siglo después y que comúnmente denominamos Regla de Ruffini.

2.2. Matemáticas modernas

Algunos grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX ayudaron a desarrollar las propiedades de los determinantes. Muchos consideran que la teoría de los determinantes tuvo su origen con el matemático alemán Leibniz (1646-1716), que utilizó los determinantes (a los que denominaba resultantes) en 1693 para resolver los sistemas de ecuaciones lineales, aunque fue el matemático japonés Seki Kowa quien empleó previamente esta misma metodología una década antes, tal y como se comentó previamente.

Unos años después, en 1748, el capítulo XI del libro "Treatise of Algebra", Maclaurin (1698-1746) presenta la solución habitual de las ecuaciones lineales simultáneas por eliminación de incógnitas y en el capítulo XII describe una solución alternativa mediante lo denominados determinantes y que consiste en lo que hoy denominamos la Regla de Cramer, autor al que Maclaurin atribuyó la regla que reproducía en su libro, teniendo conocimiento de dicha regla posiblemente desde 1730. Dos años después, en 1750, el propio Cramer publicó el método de resolución que lleva su nombre en el apéndice de su tratado de geometría titulado "Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques" y que ya había incluido Maclaurin en su tratado. A partir de entonces los trabajos sobre determinantes, empezaron a aparecer con cierta regularidad. Así, en 1764, Bezout dio algunos métodos para calcular determinantes al igual que hizo Vandermonde en su obra "Mémoire sur l'élimination" de 1772, aunque el famoso determinante que lleva su nombre apareció explícitamente solo en la obra "Mémoire sur la résolution des équations" en 1771. Ese mismo 1772, Laplace generalizó los trabajos de Bezout, Vandermonde y Cramer, afirmando que los métodos introducidos por Cramer y Bezout eran impracticables. Todo ello lo hizo en el contexto de su obra "Recherches sur le calcul integral et sur le systeme du monde", donde estudiaba las órbitas de planetas interiores y discutía la solución de sistemas de ecuaciones lineales sin calcularlos pero, usando determinantes (que llamó resultantes al igual que Leibniz, pero sin saber de esta coincidencia). Fue en un escrito de 1773 cuando Lagrange obtuvo la fórmula de desarrollo de un determinante de orden mayor o igual que 4 para su ingreso en la Academia de Ciencias de Francia.

Ya en el siglo XIX, el término "determinante" fue introducido por primera vez por Gauss en "Disquisitiones Arithmeticae" (1801) Sin embargo, este concepto de determinante no era el mismo que conocemos ahora, sino que hacía referencia a una expresión de discriminante de una forma cuadrática expresada respecto a un determinado módulo. En este mismo trabajo, Gauss expresó los coeficientes de sus formas cuadráticas en 'arrays' rectangulares, además de describir la multiplicación de matrices y la inversa de una matriz en el contexto particular de los 'arrays' de coeficientes de formas cuadráticas. Antes de continuar, querríamos comentar que la palabra 'array' viene a significar una distribución en forma tabular de datos mediante filas y columnas, por lo que en Computación e Informática este término viene a ser un sinónimo del término 'matriz', pero sin tener en cuenta las connotaciones matemáticas que tiene a nivel de estructura algebraica este último término.

Pero el primer matemático en usar el término "determinante" en el sentido moderno tal y como lo hacemos en la actualidad fue Cauchy (1789-1857) en su "Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valuers égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment" publicada en 1812 y que le hizo ser el autor más prolífico sobre la teoría de los determinantes en su época. Posteriormente en 1829, publicó su "Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes" en el que empleaba por primera vez el término "*tableau*" para referirse a la matriz de coeficientes asociada a una forma cuadrática en *n* variables, calculando los autovalores de esta matriz (que era cuadrada y definida), dando los primeros resultados sobre diagonalización de matrices en el contexto de expresar una forma cuadrática como suma de cuadrados. En ese mismo trabajo, introducía la noción de matrices similares, aunque sin darles nombre y mostrando que dos matrices similares eran las que tenían la misma ecuación característica (y por ende los mismos autovalores con la misma multiplicidad), además de demostrar que toda matriz simétrica real era diagonalizable.

Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes en Crelle's Journal durante 1841, en los que se formaliza por primera vez de manera algorítmica la definición de determinante y permitiendo que los términos en los determinantes fuesen tanto números como funciones. Estos tres artículos fueron los que le dieron gran relevancia a la noción de determinante y la hicieron ampliamente conocida. En ese mismo año, Cayley publicó su artículo sobre la geometría de la posición con la primera contribución inglesa a la teoría de determinantes e introdujo la notación que empleamos en la actualidad con las dos líneas verticales en ambos lados de la estructura tabular o 'array'.

El término 'determinante' es cronológicamente anterior en su aparición al término 'matriz', que fue acuñado en 1850 por Sylvester, definiéndola como estructura tabular rectangular de términos del que se podían obtener diversos determinantes como estructuras tabulares cuadradas almacenadas en su interior. Cayley rápidamente vio el significado del concepto de matriz tal y como lo había introducido su buen amigo Sylvester y en 1855 publicó una nota titulada "Remarques sur la notations de fonctions algébriques" en la que se introducía, por primera vez la inversa de una matriz y el producto de dos matrices, además de relacionar la estructura matricial con una forma cuadrática y bilineal. Simultáneamente, en 1853, Hamilton empleó el cálculo matricial para el estudio de los cuaterniones obteniendo para estos objetos varios de los resultados que posteriormente se formalizarían para matrices en la obra de Cayley sobre matrices.

En 1858 Cayley publicó su "Memoir on the theory of matrices" en la que no solo aparece la primera definición abstracta de matriz, sino el tratamiento de sus operaciones y los principales resultados sobre estas. En concreto, Cayley definió algebraicamente las distintas operaciones matriciales: adición y multiplicación de matrices, multiplicación por un escalar y matriz inversa. De hecho, daba una construcción explícita de la inversa de una matriz en términos del determinante. Incluso introducía la notación matricial como forma abreviada de escribir un sistema de ecuaciones lineales, representando las filas las ecuaciones y las columnas las incógnitas.

En 1870, la forma canónica de Jordan aparece en “Traité des substitutions et des équations algébriques” escrita por Jordan. Posteriormente, en 1878, Fröbenius escribió uno de los más importantes trabajos sobre matrices, titulado “Über lineare substitutionen und bilineare formen” sin aún ser consciente de la obra de Cayley que, tal y como comentamos previamente, sí empleó en su memoria de 1896. En este primer trabajo de 1878, Fröbenius trabajaba con coeficientes de formas cuadráticas, aunque no usaba el término matriz. Sin embargo, probó importantes resultados sobre matrices canónicas como representaciones de clases de equivalencia de matrices. En su artículo menciona los trabajos tanto de Krönecker (1874) como de Weierstrass (1868), poniéndolos como casos especiales de sus resultados. Pero este escrito de Fröbenius en 1878 no se limita solo a estos aspectos, sino que además probaba el resultado general de que toda matriz ha de satisfacer una ecuación característica e incluía la primera definición formal del rango de una matriz (empleado en sus trabajos sobre formas canónicas) y de las matrices ortogonales.

Fue tras conocer la obra publicada por Cayley en 1858, cuando Fröbenius comenzó a utilizar el término ‘matriz’. Así ocurre en su artículo de 1896, en el que incluye una demostración general del Teorema de Cayley-Hamilton para matrices cuadradas de cualquier orden (Cayley en 1858 solo demostró el resultado para matrices cuadradas de orden menor o igual que 3, pero Fröbenius le atribuyó el honor completo del resultado pese a ser él quién hizo la demostración general).

El espacio nulo o núcleo de una matriz cuadrada fue definido por Sylvester en 1884 cuando estudiaba los invariantes en matrices (i.e. propiedades que cumplen las matrices y que no resultan alteradas bajo cierto tipo de transformaciones, esencialmente, transformaciones elementales).

Aunque se estima que tanto Weierstrass como Krönecker dispondrían de una definición formal y rigurosa de la noción de determinante desde mediados de la década de 1860 y que dichas definiciones las utilizaban en sus enseñanzas, no sería hasta las publicaciones póstumas de ambos autores en 1903 que la comunidad matemática dispondría de dichas definiciones. Por parte de Weierstrass, su definición de determinante como función homogénea, lineal y normada aparecería en la nota “Zur Determinantentheorie”; mientras que la definición de Krönecker se publicó en “Vorlesungen über die Theorie der Determinanten” con las lecciones sobre determinantes que este impartía. Con ambas publicaciones, la teoría moderna de determinantes estaba completamente desarrollada, aunque la teoría de matrices requeriría de un poco más de tiempo para convertirse en una teoría completamente aceptada. En cualquier caso, fue con el beneplácito de matemáticos como Cayley, Fröbenius, Weierstrass y Krönecker que el uso de los términos ‘matriz’ y ‘determinante’ pasaron a ser de práctica común en la comunidad matemática.

Un importante texto que abriría camino en la cimentación de las matrices como objetos a tener en cuenta dentro de las matemáticas fue la obra “Introduction to Higher Algebra” escrita por Bôcher en 1907. Posteriormente, Turnbull (1928, 1932) y Aitken (1939) escribirían tres de los textos más influyentes en este campo durante la década de 1930, para que finalmente Mirsky, con “An Introduction to Linear Algebra” de 1955, mostrase la relevancia de la teoría de matrices y la estableciese como uno de los más importantes tópicos matemáticos para estudiantes de grado.

3. ALGUNOS CONCEPTOS ECONÓMICOS QUE UTILICEN MATRICES

Las aplicaciones que pueden darse a las matrices son múltiples y variadas. En este sentido, pueden utilizarse en cálculo numérico para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales (tanto de manera teórica como numérica), las matrices aparecen de forma natural en otros múltiples campos de la ciencia como ya indicamos en la introducción. En la presente sección nos referimos a algunos de los conceptos a los que pueden aplicarse las matrices.

3.1. Input-Output

El Análisis Input-Output fue desarrollado por Leontief en tres artículos esenciales fechados en 1936, 1941 y 1966, valiéndole su desarrollo y aplicación a problemas económicos ser galardonado con el Nobel de Economía en 1973, La motivación que le llevó a usar esta técnica fue el poder estudiar las interrelaciones existentes entre las diferentes actividades económicas y para ello se valió del algebra matricial para medir la estructura de una economía.

No obstante, hay algunos autores anteriores a Leontief que ya propugnaron algunos de los puntos principales del Análisis Input-Output. Así, la estructura básica de las tablas (matrices / arrays) input-output fue establecida por François Quesnay en su “Tableau Economique” (1758, 1766). Esta obra representaba, gráfica y numéricamente, la relación existente entre compras y ventas de las industrias en el caso de una economía concreta, empleando una estructura tabular (‘array’) para representar los datos. Esta estructura resulta ser el germen de las matrices input-output que hoy día se usan como herramienta de trabajo en el análisis input-output.

No es hasta 1874 cuando Leon Walras adaptó la obra de Quesnay proveyéndola de una formulación teórica concisa. De hecho, usó un conjunto de coeficientes de producción que relacionaban las cantidades de productos por sectores necesarios para alcanzar la producción total de ese producto. Estos coeficientes son, en esencia, los precursores de los coeficientes tecnológicos usados hoy en día.

El logro principal de Leontief fue que su modelo simplificaba la formulación teórica del modelo de Walras. Para esta simplificación impuso como hipótesis que los comportamientos tanto de la tecnología como del comercio se mantuviesen constantes a lo largo del tiempo. Estas hipótesis permitían aplicar los datos conocidos en los períodos anteriores y obtener una previsión del comportamiento futuro. De hecho, el comportamiento futuro de la economía podía verse como un producto de la denominada matriz técnica de la economía. Por tanto, el comportamiento de la economía podía traducirse a operaciones matriciales.

Los modelos input-output combinan las compras intermedias (entre industrias) y las finales (a los usuarios y al gobierno), además de las correspondientes ventas intermedias y finales. Esta técnica es uno de los modelos interindustriales más populares actualmente. De hecho, las agencias nacionales de estadísticas construyen tablas input-output de las economías nacionales y regionales de manera regular.

El Análisis Input-Output goza de una gran aceptación y de un amplio uso en múltiples ramas de la Economía, máxime con los adelantos computacionales que facilitan el manejo de las tablas input-output y las operaciones con las mismas. Algunos de los ámbitos en los que se usa esta técnica matricial son los siguientes: sistemas de cuentas nacionales, elaboración de tablas input-output, economía medioambiental, análisis regional y multirregional, análisis input-output estocástico (imponiendo que los términos de las matrices input-output no son números, sino variables estadísticas), equilibrio general aplicado, matrices de contabilidad social (SAM), política económica y análisis de la productividad, la innovación y el empleo.

El modelo básico de análisis input-output se centra en observar los datos económicos de los sectores productivos en una específica región geográfica. Cada sector produce unos bienes (outputs) y consume los producidos por otros (inputs). Por tanto, cada sector productivo debe considerarse simultáneamente como productor (los bienes se denominan outputs) y como consumidor (los bienes se denominan inputs). Estos flujos intersectoriales entre sectores productivos se miden para un período de tiempo (normalmente un año) en unidades monetarias y estas mediciones pueden resumirse en una matriz que recibe el nombre de tabla de flujos intersectoriales. Es la matriz que se construye almacenando toda esta información la herramienta esencial en el análisis input-output y la que nos generará la información necesaria para conocer el comportamiento de la economía representada en ella.

Más concretamente, si tenemos *n* sectores productivos, situaremos en el término (i,j) de la matriz anteriormente comentada las ventas del sector i al sector j. De este modo, la fila i de la matriz de flujos intersectoriales representa la distribución de ventas del sector i en la economía y la columna j las compras realizadas por el sector j en la economía. Si además de los sectores productivos consideramos a los consumidores finales (usuarios, gobierno y exportaciones), se hacen necesarias columnas adicionales para registrar las ventas que hace cada sector a cada uno de estos colectivos. No se añaden filas porque estos consumidores finales no producen, sino que solo consumen. Observa que de este modo tenemos una matriz cuadrada representando las transacciones entre sectores productivos, que se transforma en una matriz rectangular cuando añadimos al estudio los consumidores finales, que suele representarse todos conjuntamente en una única columna denominada de demanda final. La matriz de flujos ampliada por el vector demanda final es lo que se denomina matriz de transacciones.

Si la matriz de flujos intersectoriales la representamos por la matriz $Z=[Z_1|\ldots|Z_n]$ definida por columnas, a la demanda final por el vector Y y a la producción de la economía por el vector X, entonces los términos X_i e Y_i son la producción y demanda final del sector i, por lo que se podría expresar el modelo input-output mediante la siguiente ecuación vectorial:

$$X=Z_1+\ldots+Z_n+Y.$$

La matriz de transacciones solo describe el comportamiento actual de la economía. Para estudiar los cambios que podrían acontecer en la producción de cada sector productivo con respecto de los cambios en la demanda final, se considera una matriz cuadrada A que proviene de relativizar la matriz de flujos intersectoriales: la matriz de coeficientes técnicos, cuyo elemento (i,j) representa el valor del bien comprado por el sector j al sector i por unidad monetaria en el sector j. Por tanto, la obtención de las columnas de esta matriz A se obtienen simplemente reescalando las columnas de la matriz Z de flujos intersectoriales (es decir, multiplicando vectores por escalares):

$$A_j = \frac{1}{X_j} \cdot Z_j$$

La matriz A que acabamos de construir permite obtener información sobre la estructura interna del sistema económico, comparar distintos períodos temporales de una misma economía e incluso comparar distintas economías entre sí. El modelo input-output se traduce con la matriz de coeficientes técnicos a la siguiente ecuación matricial (o equivalentemente sistema de ecuaciones lineales):

$$A \cdot X + Y = X$$

con lo que las relaciones entre el vector de producción X y el de demanda final Y viene dado por las expresiones:

$$Y = (A - Id) \cdot X \qquad \text{y} \qquad X = (A - Id)^{-1} \cdot Y,$$

donde Id representa la matriz identidad de orden n y la potencia -1 de una matriz representa a la inversa matricial. Las matrices de coeficientes que permiten calcular la inversa $(A\text{-}Id)^{-1}$ son de gran interés económico y reciben el nombre de matrices productivas. Su interés reside en que para cualquier demanda final que se considere, se puede considerar una producción por parte de los sectores que soporte dicha demanda. Como hemos dicho, esa propiedad económica se traduce en el estudio de una inversa y equivalentemente en el estudio de los autovalores de la matriz de coeficientes técnicos. Por tanto, el análisis input-output permite traducir problemas de índole económico a problemas relativos a la teoría de matrices y, más ampliamente, al álgebra lineal.

3.2 Teoría de Juegos

La teoría de juegos es una rama de la matemática aplicada a la economía, sociología, biología y psicología, que analiza las interacciones entre individuos que toman decisiones en un marco de incentivos formalizados (juegos). En un juego, varios agentes buscan maximizar su utilidad eligiendo determinados cursos de acción. La utilidad final obtenida por cada individuo depende de los cursos de acción escogidos por el resto de los individuos.

En el mundo real, tanto en las relaciones económicas como en las políticas o sociales, son muy frecuentes las situaciones en las que, al igual que en los juegos, su resultado depende de la conjunción de decisiones de diferentes agentes o jugadores. Se dice de un comportamiento es **estratégico** cuando se adopta teniendo en cuenta la influencia conjunta sobre el resultado propio y ajeno de las decisiones propias y ajenas.

La técnica para el análisis de estas situaciones fue puesta a punto por el matemático John von Neumann que, a comienzos de la década de 1940, trabajó con el economista Oskar Morgenstern en las aplicaciones económicas de esa teoría. El libro "Theory of Games and Economic Behavior", publicado conjuntamente por ambos en 1944, fue el primer trabajo que abrió un insospechadamente amplio campo de estudio en el que actualmente trabajan miles de especialistas de todo el mundo.

La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchos campos de la Economía —equilibrio general, distribución de costes…— se han visto beneficiados por las aportaciones de este método de análisis. En el medio siglo transcurrido desde su primera formulación el número de científicos dedicados a su desarrollo no ha cesado de crecer. Y no son solo economistas y matemáticos sino sociólogos, politólogos, biólogos o psicólogos. Existen también aplicaciones jurídicas: asignación de responsabilidades, adopción de decisiones de pleitear o conciliación, etc.

Un ejemplo muy conocido de la aplicación de la teoría de juegos a la vida real es el dilema del prisionero, popularizado por el matemático A.W. Tucker, el cual tiene muchas implicaciones para comprender la naturaleza de la cooperación humana.

Un juego consiste en un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos (o estrategias) disponible para esos jugadores y una especificación de recompensas para cada combinación de estrategias.

La forma normal (o forma estratégica) de un juego es una matriz de pagos, que muestra los jugadores, las estrategias, y las recompensas (ver el ejemplo más abajo). Hay dos tipos de jugadores; uno elige la fila y otro la columna. Cada jugador tiene dos estrategias, que están especificadas por el número de filas y el número de columnas. Las recompensas se especifican en el interior. El primer número es la recompensa recibida por el jugador de las filas (el *Jugador 1* en nuestro ejemplo); el segundo es la recompensa del jugador de las columnas (el *Jugador 2* en nuestro ejemplo). Si el *jugador 1* elige arriba y el *jugador 2* elige izquierda entonces sus recompensas son 4 y 3, respectivamente.

	El jugador 2 elige izquierda	***El jugador 2 elige derecha***
El jugador 1 elige arriba	4, 3	-1, -1
El jugador 1 elige abajo	0, 0	3, 4

Cuando un juego se presenta en forma normal, se presupone que todos los jugadores actúan simultáneamente o, al menos, sin saber la elección que toma el otro. Si los jugadores tienen alguna información acerca de las elecciones de otros jugadores el juego se presenta habitualmente en la forma extensiva.

4. CONCLUSIONES

En el presente artículo hemos expuesto una presentación del origen de los conceptos de matriz y de determinante, mostrando las dificultades y cómo estos conceptos también aparecieron en algunas civilizaciones orientales antiguas, mostrando además que el tratamiento de dicho conceptos se veía condicionado por la necesidad de resolver determinados problemas de índole económica. Concretamente, se ha visto cómo las nociones matriciales aparecían implícitamente en las matemáticas de la Antigua India y China y eran empleado para la resolución de problemas prácticos (y en nuestro caso de índole económico). Una vez expuesto cómo las necesidades prácticas llevaban en la antigüedad a resolver problemas matemáticos con herramientas teóricas potentes y actuales (aunque sin fundamentación), se pasó a exponer las distintas etapas en el surgimiento de las nociones de determinante y matriz (en ese orden de aparición) se consolidaban en las matemáticas occidentales europeas hasta consolidar el álgebra matricial y, por extensión, lineal como una herramienta esencial en el conocimiento matemático del s. XX y XXI.

Tras esta exposición histórica hemos pasado a tratar algunos problemas económicos que se modelizan usando la teoría de matrices y que son resueltos mediante operaciones matriciales. Concretamente, hemos expuesto el análisis input-output y la teoría de juegos como casos de problemas económicos cuyo tratamiento está fuertemente fundamentado en el manejo de matrices.

Con este artículo esperamos haber mostrado cómo el álgebra matricial y lineal está fuertemente vinculada a los problemas económicos y resulta ser una herramienta esencial para el tratamiento de problemas en esta disciplina científica.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AITKEN, A.C. (1939). “Determinants and Matrices”. Oliver and Boyd: Edimburgo.
- BEZOUT, E. (1764). “Recherches sur le degré des équations résultantes de l‘évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations”. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris 1764, pp. 288–338.
- BÔCHER, M. (1907). “Introduction to Higher Algebra”. Macmillan: New York.
- CAUCHY, A.L. (1812). “Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valuers égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu’elles renferment”, Journal de l’Ecole Polytechnique 10, pp. 29–112.
- CAUCHY, A.L. (1829). “Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes”. Exer. Math. 4.
- CAYLEY, A. (1841). “A theorem in the geometry of position”. Cambridge Mathematical Journal II, pp. 267–271.
- CAYLEY, A. (1855). “Remarques sur la notations de fonctions algébriques”. Crelle’s J. 50 pp. 282-285.
- CAYLEY, A. (1858). “A memoir on the theory of matrices”. Philos. Trans. Roy. Soc. London 148, pp. 17–37.
- CRAMER, G. (1750). “Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques”. Frères Cramer: Ginebra.

- FEDRIANI, E.M.; MARTÍN, A.M. y TENORIO, A.F. (2006). "Bases económicas en la constitución de los sistemas de numeración y sus operaciones". En V. Guirao y V.J. Cano (eds.) Anales de Economía Aplicada vol. XX, Delta Publicaciones: La Laguna, 25 pp.
- FEDRIANI, E.M.; MELGAR, M.C. y TENORIO, A.F. (2007): "Matemáticas para Administración y Dirección de Empresas". Editorial elaleph.com: Buenos Aires.
- FRÖBENIUS, G. (1878). ""Über lineare substitutionen und bilineare formen". Crelle's J. 84, pp. 1-63.
- FRÖBENIUS, G. (1896). "Über vertauschbare matrizen". Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1896:2, pp. 601-614.
- GAUSS, C.F. (1801). "Disquisitiones Arithmeticae". Apud G. Fleischer: Leipzig.
- HAMILTON, W.R. (1853). "Lectures on quaternions". Hodge and Smith editors: Dublín.
- JACOBI, C.G.J. (1841a). "De Formatione et Proprietatibus Determinantium". Crelle's J. 22, pp. 285-318.
- JACOBI, C.G.J. (1841b). "De Determinantibus functionalibus". Crelle's J. 22, pp. 319-359.
- JACOBI, C.G.J. (1841c). "De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum". Crelle's J. 22, pp. 360-371.
- JORDAN, C. (1870). "Traité des substitutions et des équations algébriques". Gauthier-Villars: Paris.
- JOSEPH, G.G. (1996). "La Cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas". Editorial Pirámide: Madrid.
- KLINE, M. (1992). "El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días". Alianza Editorial: Madrid.
- KOWA, S. (1683). "Kai Fukudai no Hô". Fujioka.

- KRÖNECKER, L. (1874). "Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen". Monatsber. Akad. Wiss. Berlin 59-76.
- KRÖNECKER, L. (1903). "Vorlesungen über die Theorie der Determinanten". Teubner: Leipzig.
- LAGRANGE, J.L. (1773). "Sur l'attraction des spheroides elliptiques". Mém. Acad, Roy. Sci. Berlin 1773, pp. 121-148.
- LAPLACE, P.S. (1772): "Recherches sur le calcul integral et sur le systeme du monde". Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 2 partie, 1772, pp. 267-376.
- LEIBINIZ, G.W. (1693). "Letter to L'Hopital, VI, Hannover, 28 April 1693". Publicada en Gerhardt, G.I. ed. (1850). "Leibnizens mathematische Schriften". Part I, Volume 2, Berlin, pp. 238-241.
- LEONTIEF, W.W. (1936). "Quantitative input-output relations in the economic system of the United States". Review of Economic Statistics 18, pp. 105-125.
- LEONTIEF, W.W. (1941). "The Structure of the American Economy, 1919-1929". Harvard University Press: Cambridge.
- LEONTIEF, W.W. (1966). "Input-Output Economics". Oxford University Press: New York.
- MACLAURIN, C. (1748). "Treatise of Algebra". Millar & Nourse: Londres.
- MIRSKY, L. (1955). "An Introduction to Linear Algebra". Oxford University Press: Oxford.
- VON NEUMANN, J. y MORGENSTERN, O. (1944). "Theory of Games and Economic Behavior". Princetom University Press: Princeton.
- QUESNAY, F. (1758). "Le Tableau économique". Reimpreso en Quesnay, F. (2004) The Economical Table. University Press of the Pacific.
- QUESNAY, F. (1766). " Analyse de la formule arithmétique du tableau économique de la distribution des dépenses annuelles d'une Nation agricole". Journal de l'agriculture, du commerce & des finances, tome II, 3ème partie, pp. 11-41.

- SYLVESTER, J.J. (1850). “Additions to the articles: ‘On a new class of theorems’ and ‘On Pascal's theorem’. Phil. Mag. 37:3, pp. 363-370.
- SYLVESTER, J.J. (1884). “On involutants and other allied species of invariants to matrix systems”. John Hopkins University Circulars 3:28, pp. 34-35.
- TUCKER, A.W. (1950). “A Two-Person Dilemma”. Notas sin publicar. Stanford. Reimpreso en Rasmussen, E. ed. (2001). “Readings in Games and Information”. Blackwell: Maiden, pp. 7-8.
- TURNBULL, H. (1928). “The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants”. Blackie and Sons Ltd.: Londres.
- TURNBULL, H. y AITKEN, A. (1932). “Introduction to the Theory of Canonical Matrices”. Blackie & Sons Ltd: Londres.
- VANDERMONDE, A.T. (1771). “Mémoire sur la résolution des équations”. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 1771, pp. 365-416.
- VANDERMONDE, A.T. (1772). “ Mémoire sur l'élimination”. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 1772, 2° partie, pp. 516-525.
- WALRAS, L. (1874). “Éléments d'économie politique pure”. Corbaz & Cie. : Lausana.
- WEIERSTRASS, K. (1868). “Zur Theorie der quadratischen und bilinearen formen”. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, pp. 311-338.
- WEIERSTRASSS, K. (1903): “Zur Determinantentheorie”. Notas basadas en las lecturas impartidas en 1886/1887. Publicadas póstumamente en Knoblauch, J. ed. (1903). “Mathematiche Werke” Vol. III, Mayer & Müller: Berlin, pp. 271-286.