Lo Geométrico y lo Analítico en las clases de Matemáticas para la Economía y Empresa

Antonio Sarmiento Escalona
Departamento de Economía Aplicada II
Universidade da Coruña

RESUMEN

Este trabajo muestra un proyecto de actuación en el aula a la búsqueda de una mejor interrelación entre la Matemática y la Economía en las clases de matemáticas de los nuevos grados universitarios. Para ello hemos analizado la conexión entre lo sintético-geométrico y lo analítico-aritmético y hemos descrito un posible recorrido de estudio e investigación, que podría desarrollarse como un taller de matemáticas en un primer curso de Matemáticas para la Economía y Empresa. El tema que nos sirve como motivo inspirador de este recorrido es el análisis de sensibilidad en la programación lineal y la excesivamente abstracta presentación que del mismo se hace en los textos de Matemáticas para la Economía y Empresa

***Palabras claves*:** Análisis de sensibilidad; Programación Lineal; Matemáticas; Economía; Sintético; Analítico

***Área temática*:** Metodología y Didáctica

ABSTRACT

This work shows a proposed action in the classroom in search of a better interface between mathematics and economics at the math of the new university degrees. We analyzed the connection between the synthetic-geometry thought and analytic-arithmetic thought, and we have described the design of a possible research and study courses that could develop as a mathematics workshop in a first course in Mathematics for Economics and Business. The theme serves as inspirational motive of this study processes is the sensitivity analysis in linear programming and the overly abstract presentation of it is done in the texts of Mathematics for Economics and Business

***Keywords*:** Sensitivity Analysis; Linear Programming; Economics; Mathematics; Synthetic; Analytic

***Clasificación JEL (Journal Economic Literature)*:** A22, C69

1. INTRODUCCIÓN

Las líneas recientes de investigación que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard 2006, Bosch & Gascón 2006) plantean la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza universitarios procesos de estudio funcionales donde los saberes no sean un "cuerpo de doctrina cerrado" que el profesor enseña a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Estos planteamientos se concretan en lo que Chevallard (2004) denomina "Recorridos de Estudio e Investigación" (REI), centrados en el estudio prolongado de cuestiones problemáticas que sean a la vez "vivas" y "fecundas", es decir que requieran como respuesta la construcción de toda una secuencia de organizaciones matemáticas completas y articuladas.

A diferencia de otras propuestas de ingeniería didáctica, el diseño de un REI debe mantenerse abierto en el sentido de que no se determina completamente a priori el tipo de contenido matemático al que se puede recurrir para elaborar una respuesta a la *cuestión generatriz* considerada, aunque sí hay un análisis previo de la potencialidad de la cuestión inicialmente abordada. (Serrano & Bosch & Gascón 2008). Plantear de manera abierta el comienzo es fundamental para que el trabajo no sea una simple construcción de saberes que lleve a una *determinada* respuesta.

Antes de hacer un proyecto de REI en las enseñanzas de Matemáticas para la Economía y Empresa podemos considerar, entre otras cosas, la propia idiosincrasia del curriculum de la materia que, por ejemplo, se articula en torno a tres tipos de razonamiento. El primero, evidente por la naturaleza de la materia impartida, de índole económico, y los otros dos de índole matemático, el pensamiento sintético-geométrico (habitual en las clases de micro y macroeconomía) y el pensamiento analítico-aritmético; citados en el orden que normalmente se supone que se generan histórica y genéticamente, sin señalar la prevalencia de uno sobre otro.

La Didáctica de las Matemáticas ha estudiado en profundidad las relaciones entre los enfoques del pensamiento sintético-geométrico y del pensamiento analítico-aritmético (Sierpinska 1994) recomendando su utilización conjunta en las clases de matemáticas. Sin embargo, y probablemente por razones de espacio y de elegancia, en los libros de texto se favorece el pensamiento analítico-aritmético sobre las intuiciones sintético-geométricas y muy pocos abordan ambos o únicamente hacen una somera introducción a esta última forma de razonamiento. En los desarrollos teóricos y en la resolución de problemas se utiliza únicamente el pensamiento analítico-aritmético y las conclusiones económicas, desechando las posibilidades del razonamiento sintético-geométrico. La predilección por esta forma de trabajar se justifica debido a la brevedad de escritura de los procesos algorítmicos; pero no es justificable desde las nuevas posibilidades para nuestro estudio que proporcionan las nuevas tecnologías, en forma de calculadoras gráficas y programas gráficos para ordenador.

Como paso previo a diseñar una cuestión generatriz, suficientemente rica y motivadora para la enseñanza de las Matemáticas en el marco de los nuevos planes de estudio de los grados en Economía y Empresa podríamos plantear tres cuestiones: (1) ¿Cómo diseñar procesos didácticos capaces de situar las cuestiones problemáticas del mundo de la economía y la empresa en el punto de partida del estudio, haciendo que estas cuestiones sean las generadoras de los contenidos matemáticos que se enseñan y, en consecuencia, permitan articularlos y mostrar su funcionalidad? (2) ¿Cuáles serían en cada parte del curriculum las cuestiones generatrices más apropiadas para motivar la construcción de los diferentes contenidos matemáticos y cuáles son las organizaciones didácticas más adecuadas en cada caso? (3) ¿Es viable el diseño de este tipo de nuevas organizaciones didácticas en la institución, en este caso una Facultad de Economía y Empresa, en que la queremos experimentarlas?

Una parte importante (sobre todo para la toma de decisiones en Economía) de la programación matemática es el análisis de sensibilidad. Este análisis consiste en determinar cómo y cuánto es de sensible la respuesta óptima obtenida en el problema de programación matemática, al cambio de algunos datos como las ganancias o costes unitarios (coeficientes de la función objetivo) o la disponibilidad de los recursos (términos independientes de las restricciones). Los textos sobre la materia (Barbolla & Cerdá & Sanz 2001, Sydsaeter & Hammond 2000) colocan su estudio después de la obtención de la solución óptima del problema de programación matemática y lo sintetizan en el *teorema de la envolvente*.

En la parte siguiente del trabajo describimos un intento de REI sobre el tema del análisis de sensibilidad en la programación lineal (PL). Suponemos cubiertas las etapas de estudio necesarias, método gráfico, método de los puntos de esquina, método símplex, para obtener la solución óptima de un problema de PL. El análisis de sensibilidad de un programa de PL plantea una serie continua de dificultades que sugiere múltiples propuestas de trabajo para los alumnos. Pretendemos plantearlas como un trabajo abierto donde, en su estudio, pueden aparecer desvíos inesperados.

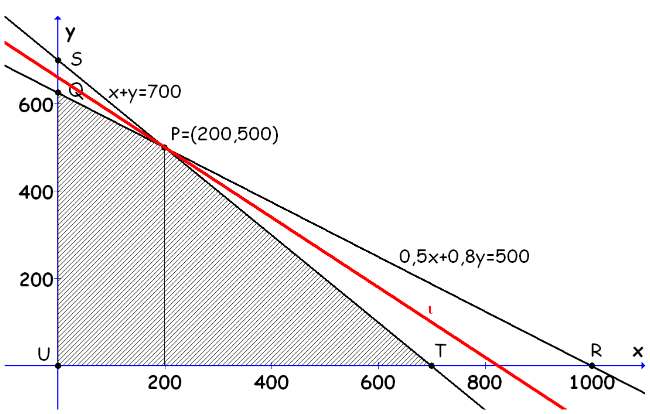
En el apartado 2 de este trabajo hemos desarrollado las sugerencias a las que el citado REI da origen en el marco de un razonamiento sintético-geométrico (método gráfico); en el apartado 3 nos hemos centrado en un razonamiento analítico-aritmético (método símplex), dejando para un apartado final las conclusiones del trabajo.

2. ANALISIS DE SENSIBILIDAD GRAFICO

Podemos empezar proponiendo un ejemplo elemental de PL de dos variables con dos restricciones. *Un comerciante acude al mercado a comprar naranjas. Dispone de 500 € y en su furgoneta caben 700 kg. En el mercado hay naranjas de tipo A a 0,5 € y de tipo B a 0,8 €. El comerciante las podrá vender a 0,58 € las de tipo A y a 0,9 €. las de tipo B. Se pregunta cuántos kilogramos de cada tipo debería comprar para conseguir que los beneficios sean lo más altos posibles*. Este problema da origen al siguiente problema de PL de máximo estándar:

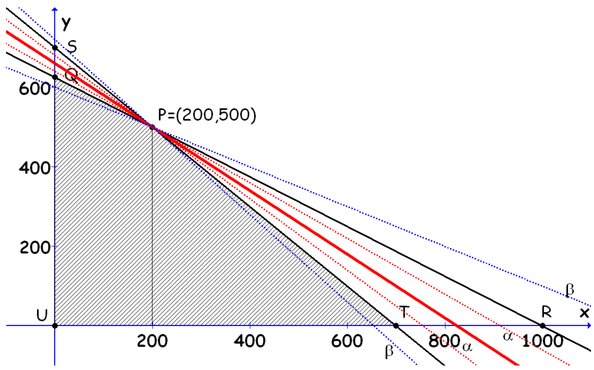
$$
\begin{array}{ll}
Maximizar\ B\ \ x,y\ \ = z = 0{,}08x + 0{,}10y & \\
 & 0{,}5x + 0{,}8y \leq 500 \\
s.a. & x + y \leq 700 \\
 & x \geq 0, y \geq 0
\end{array}
$$

cuya solución gráfica es:



El beneficio óptimo *66€* se alcanza para *200kg*. de naranjas de tipo *A* y *500kg*. de tipo *B*. Obtenida la solución óptima planteamos la pregunta fundamental, ¿cómo podemos modificar los coeficientes de la función objetivo y los términos independientes de las restricciones de uno en uno (*céteris paribus*), manteniendo constantes los demás, y manteniendo la solución óptima?

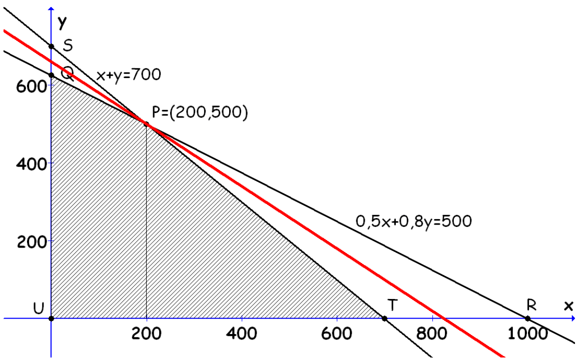
Gráficamente lo conseguiremos siempre que la recta que determina el beneficio máximo (ι) pase por el punto *(200, 500)* y no exista, por encima de ella ninguna parte de la región factible. En la figura todas las líneas marcadas (α) mantienen la solución óptima pero las líneas marcadas (β) pueden dar lugar a una nueva solución óptima pues existe un área de la región factible sobre ellas, lo cual indica que la función puede ser optimizada en algún punto distinto del *(200,500)*.

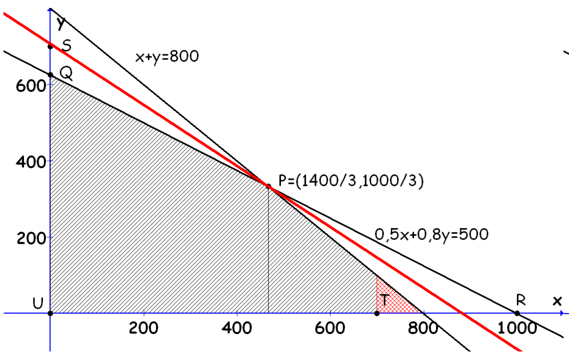


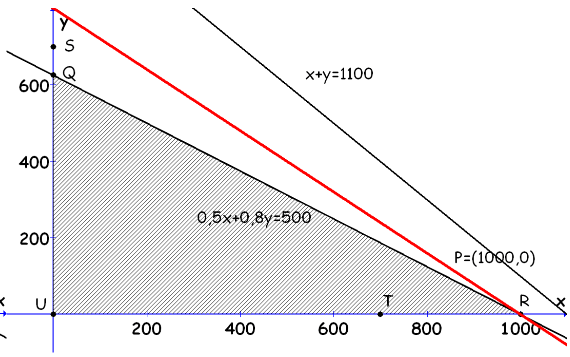
¿Cómo determinar las rectas que dan el beneficio máximo? Como el conjunto factible no varía y las rectas que consideramos pasan por el óptimo *(200, 500)* las posibles rectas que dan el beneficio máximo tendrán la ecuación $y - 500 = m(x - 200)$. Pero sólo valen las marcadas con (α) y no las marcadas con (β). La gráfica, ¿no sugiere la existencia de un *haz de rectas*?, este haz de rectas ¿no queda determinado por la pendiente *m*? La observación de la gráfica anterior nos sugiere que una línea de máximo beneficio *válida* no puede exceder la inclinación de las restricciones, es decir que la pendiente no puede ser mayor ni menor que las pendientes de las restricciones que determinan la solución. Como las líneas de las restricciones son $x + y = 700$ y $0{,}5x + 0{,}8y = 500$, con pendientes -1 y $-0{,}625$ respectivamente, concluimos que las pendientes de nuestras rectas válidas deben estar comprendidas entre estos valores: $-1 \le m \le -0{,}625$.

Ahora bien, nuestro objetivo es determinar ¿cuánto pueden valer los coeficientes (céteris paribus) de la función objetivo $z = C_x x + C_y y$ de manera que la solución óptima no se altere? De $66 = C_x x + C_y y$ obtenemos que la pendiente deseada es $m = -\frac{C_x}{C_y}$. Entonces, podemos concluir que: $-1 \leq -\frac{C_x}{C_y} \leq -0{,}625$ Ahora podemos resolver la desigualdad para ambos coeficientes suponiendo el otro constante. Si $C_y = 0{,}10$ entonces $-1 \leq -\frac{C_x}{0{,}10} \leq -0{,}625$ de donde $0{,}0625 \leq C_x \leq 0{,}10$. Si $C_x = 0{,}08$ entonces $-1 \leq -\frac{0{,}08}{C_y} \leq -0{,}625$ de donde $0{,}08 \leq C_y \leq 0{,}128$.

Ahora bien, ¿qué pasa cuando uno de los términos independientes de las restricciones varía, ya sea incrementándose o reduciéndose; suponiendo que los demás datos del problema de PL siguen constantes? La lógica a seguir en el análisis de sensibilidad de estos términos es un poco diferente, ya que cuando se poseen más recursos, es evidente que la solución óptima variará. ¿Qué aceptaremos como nuevo objetivo que mantenga la solución óptima? Una posible solución es intentar que el vértice que determina la solución óptima siga siendo la intersección de las mismas restricciones, es decir, que las restricciones que daban solución al problema original, le den también solución al nuevo problema. Las siguientes figuras pueden aclarar la situación para la segunda restricción.



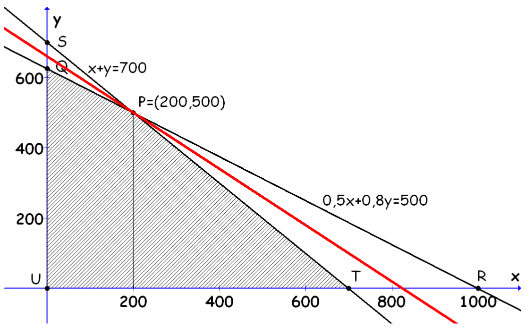


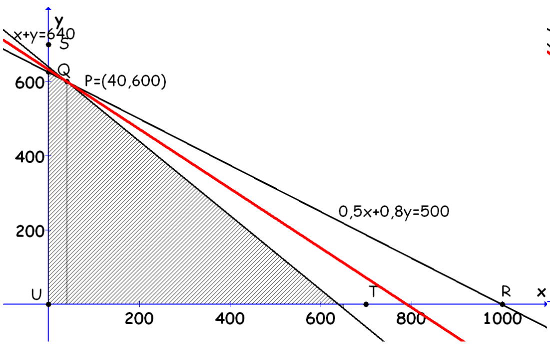


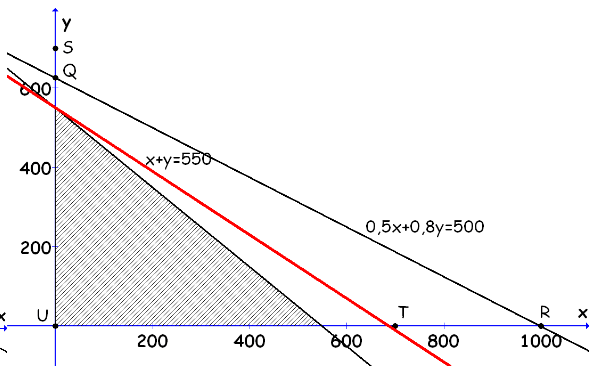
Podemos ver que aumentando en *100* unidades los recursos de una de las restricciones ($x + y \leq 800$) la región factible se modifica, se expande (ver zona después de T) y evidentemente cambia la solución óptima; pero resulta que las mismas dos restricciones que determinaban la solución inicial, definen también la nueva solución. Si aumentamos más los recursos en la restricción ($x + y \leq 1100$) con un término independiente mayor, llegaremos a un punto en que esa restricción ha dejado de pertenecer a la solución óptima (que es precisamente lo que no queremos).

El nuevo problema que planteamos es, ¿hasta dónde podemos desplazar la recta? Observando la figura anterior vemos que a partir del punto *(1000,0)*, la recta de la restricción deja de participar en la solución óptima. La recta que pasa por este punto será $x + y = 1000$ que da el máximo valor que puede tomar el término independiente de esta restricción.

Todo lo que hemos hecho aumentando el término independiente de la segunda restricción se puede plantear disminuyéndolo ¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar este término manteniendo los planteamientos del caso anterior; es decir, que la solución óptima quede determinada por las mismas dos restricciones? Podemos ver que con 60 unidades menos de recurso en la restricción ($x + y \leq 640$), la región factible se ha contraído y evidentemente la solución óptima ha cambiado también; pero las mismas dos restricciones que definían la solución inicial, definen también la nueva solución.

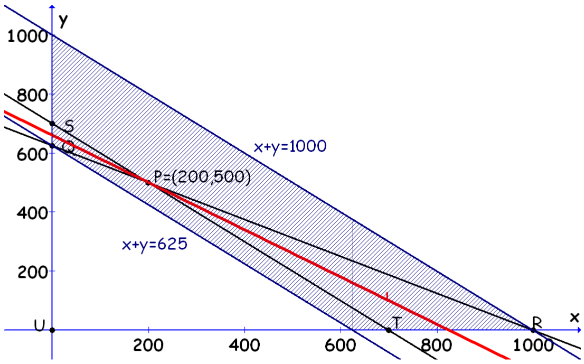






Si seguimos desplazando la recta de la restricción disminuyendo su término independiente, por ejemplo para ($x + y \leq 550$) la región factible ya no depende de dicha restricción y por tanto esta restricción ha dejado de pertenecer a la solución óptima. ¿Qué determina hasta donde podemos desplazar la recta? De manera similar al caso anterior vemos que el punto *(0,625)*, es el que limita el valor de nuestro término independiente. En conclusión, si b es el término independiente de la restricción $x + y \leq b$, entonces la solución sigue siendo la óptima, sino alteramos ningún otro dato del problema original siempre que $625 \leq b \leq 1000$.

El gráfico siguiente muestra la zona involucrada en el razonamiento anterior.

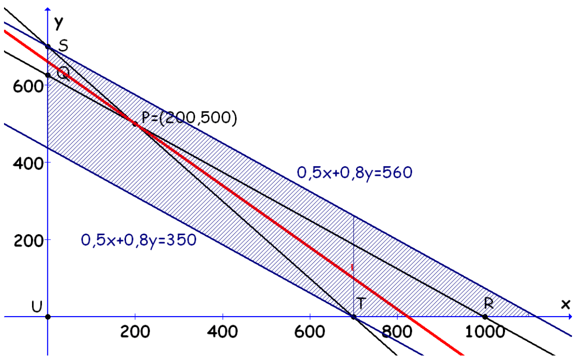


¿En qué sentido se mantiene la solución óptima? La observación de la gráfica permite intuir que la solución óptima se mantiene en un sentido de proporcionalidad. Si la restricción segunda queda determinada por la recta $x + y = 625$ el punto en que se alcanza el óptimo es el *(0, 625)* y el valor óptimo es $z(0,625) = 62,5$. Si la restricción segunda queda determinada por la recta $x + y = 1000$ el punto en que se alcanza el óptimo es el *(1000, 0)* y el valor óptimo es $z(1000,0) = 80$. La tasa proporcional entre la diferencia de los valores óptimos y la diferencia entre los valores que la restricción b puede tomar nos da una medida de la variación de la solución óptima. Obtenemos, para concretar, el *precio sombra* para la segunda restricción que será

$$p_2 = \frac{80 - 62,5}{1000 - 625} = 0,047$$

Un análisis similar permite encontrar el intervalo del término independiente de la primera restricción. Si llamamos a al término independiente de la restricción $0{,}5x + 0{,}8y \leq a$, la solución sigue siendo la óptima siempre que $350 \leq a \leq 560$.

Y, como antes, un gráfico permite mostrar la zona involucrada en el razonamiento anterior.



Podemos repetir para la restricción primera el razonamiento anterior. La recta $0{,}5x + 0{,}8y = 350$ alcanza el óptimo en el punto $(700, 0)$ y el valor óptimo es $z(700,0) = 56$. Si la restricción primera queda determinada por la recta $0{,}5x + 0{,}8y = 560$ el punto en que se alcanza el óptimo es el $(0,700)$ y el valor óptimo es $z(0,700) = 70$. El cambio proporcional nos da una medida de la variación de la solución óptima. Obtenemos el *precio sombra* para la primera restricción que será:

$$p_1 = \frac{70 - 56}{560 - 350} = 0{,}067$$

En resumen, el programa de PL de maximum:

$$\begin{array}{rl} Maximizar\ B\ \ x,y\ \ = z = 0{,}08x + 0{,}10y & \\ & 0{,}5x + 0{,}8y \leq 500 \\ s.a. & x + y \leq 700 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

tiene la solución óptima $x = 200$, $y = 500$ para la cual $z = B(200,500) = 66$. Si llamamos C_x y C_y a los coeficientes de la forma lineal; a y b a los términos independientes de las restricciones el programa de PL de maximum:

$$\begin{array}{c} Maximizar\ B\ \ x,y\ \ = z = C_x x + C_y y \\ 0{,}5x + 0{,}8y \leq a \\ s.a. \qquad x + y \leq b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

con $0{,}0625 \leq C_x \leq 0{,}10$, $0{,}08 \leq C_y \leq 0{,}128$, $350 \leq a \leq 560$ y $625 \leq b \leq 1000$, tiene la *misma solución óptima*, siempre que exista una modificación en uno y sólo uno de los parámetros, manteniendo todos los demás datos del problema constantes, y dicho parámetro se modifique entre los valores del intervalo citado. Exactamente, modificando sólo una de las dos C_x ó C_y obtenemos la misma solución óptima $x = 200$, $y = 500$. Modificando uno sólo de los parámetros de las restricciones a ó b ambas restricciones siguen determinando la solución óptima. Por ejemplo, si aumentamos b a *800*, que es un valor admisible obtenemos que $z = 66 + 0{,}047.100 = 70{,}7$.

Una notable cantidad de modificaciones y preguntas son posibles: ¿qué pasaría en un programa de PL de dos variables con tres restricciones?, ¿qué pasaría en un programa de PL donde la solución óptima no se encuentre en un punto esquina sino en un hiperplano (recta) frontera?, ¿qué pasaría en un programa de PL de mínimo con un conjunto factible no acotado? … Una exploración reflexiva de todos y otros posibles caminos puede llevarnos a nuevos, y a lo mejor, inesperados resultados.

3. ANALISIS DE SENSIBILIDAD CON EL ALGORITMO SIMPLEX

Como sabemos el algoritmo simplex se introduce para resolver un problema de PL cuya representación gráfica no sea posible y el método de punto esquina no sea fácilmente aplicable, por ser demasiado largo u otra causa, etc... El análisis de sensibilidad es necesario traducirlo al desarrollo y características del algoritmo. Con objeto de analizar sólo el funcionamiento del algoritmo en el análisis de sensibilidad y para no recargar de cálculos este trabajo vamos a seguir estudiando el mismo problema. Recordemos el problema inicial:

$$\begin{array}{c} Maximizar\ B\ \ x,y\ \ = z = 0{,}08x + 0{,}10y \\ 0{,}5x + 0{,}8y \leq 500 \\ s.a. \qquad x + y \leq 700 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

La tabla símplex inicial correspondiente, donde representamos por s y t las variables de holgura correspondientes a la primera y segunda restricción respectivamente, sería:

z	x	y	s	t		
1	-0,08	-0,10	0	0	0	
0	0,5	0,8	1	0	500	s
0	1	1	0	1	700	t

La tabla símplex final que obtendríamos sería:

z	x	y	s	t		
1	0	0	1/15	7/150	66	
0	0	1	10/3	-5/3	500	y
0	1	0	-10/3	8/3	200	x

La filosofía inherente al análisis de sensibilidad en el algoritmo símplex se centra en modificar la tabla símplex final en el sentido de introducir valores negativos en la primera fila que obliguen a dar un paso más para acabar el algoritmo. En este caso las dos variables de la función objetivo son básicas por lo que se hace lo mismo en ambos casos se reemplaza el cero de la primera fila por una variable negativa arbitraria $-\lambda$. La nueva tabla símplex requiere para la terminación del algoritmo eliminarla.

z	x	y	s	t		
1	$-\lambda$	0	1/15	7/150	66	
0	0	1	10/3	-5/3	500	y
0	1	0	-10/3	8/3	200	x

Ahora surge una nueva tabla simplex final:

z	x	y	s	t		
1	0	0	1/15-10λ/3	7/150+8λ/3	66+200λ	
0	0	1	10/3	-5/3	500	y
0	1	0	-10/3	8/3	200	x

Para que el algoritmo efectivamente acabe tiene que ocurrir que todos las entradas de la primera fila deben ser no negativas por lo que los intervalos $\frac{1}{15} - \frac{10}{3}\lambda \geq 0$, y $\frac{7}{150} + \frac{8}{3}\lambda \geq 0$.Lo que nos lleva a los siguientes resultados $\lambda \leq \frac{1}{50}$, y $\lambda \geq -\frac{7}{400}$; y en definitiva a $-\frac{7}{400} \leq \lambda \leq \frac{1}{50}$. En conclusión: como el coeficiente de la variable *x* en la forma lineal inicial es *0,08* tenemos: $0{,}08 - \frac{7}{400} \leq 0{,}08 + \lambda \leq 0{,}08 + \frac{1}{50}$ lo que determina la variación admisible del coeficiente $0{,}0625 \leq C_x \leq 0{,}10$, que coincide obviamente con el que obtuvimos en el apartado anterior.

Puede repetirse el mismo razonamiento para la variable y. En la columna correspondiente a la variable y se reemplazaría ahora el cero de la primera fila por una variable negativa arbitraria -λ. La nueva tabla símplex requiere, como antes, para la terminación del algoritmo eliminarla.

z	x	y	s	t		
1	0	-λ	1/15	7/150	66	
0	0	1	10/3	-5/3	500	y
0	1	0	-10/3	8/3	200	x

Surge una nueva tabla simplex final:

z	x	y	s	t		
1	0	0	1/15+10λ/3	7/150-5λ/3	66+500λ	
0	0	1	10/3	-5/3	500	y
0	1	0	-10/3	8/3	200	x

Repitiendo pasos similares a los del caso anterior obtenemos que $0{,}08 \leq C_y \leq 0{,}128$.

Finalmente, nos corresponde analizar, mediante el algoritmo simplex, la sensibilidad a cambios en cada uno de los términos independientes de las restricciones, donde recordemos que las restricciones de un problema de PL representan las limitaciones de recursos que tiene una empresa. La sensibilidad del término independiente de una restricción se analizará fijándonos en la variable de holgura asociada a dicha restricción.

El margen de posibilidades de variación de estos recursos viene dado por el resultado de sumar a la última columna de la tabla simplex final la columna de la variable de holgura de la restricción que analizamos multiplicada por λ: $C_{final} + \lambda C_{holgura}$. Recordemos que por las restricciones de no negatividad (en el conjunto factible), los valores en la última columna de la tabla simplex deben ser siempre positivos; por tanto el resultado anterior debe cumplir la condición obvia que: $C_{final} + \lambda C_{holgura} \geq 0$. Cada término de este resultado debe cumplir esta condición y la primera fila, que es meramente descriptiva a estos efectos, no es necesario tenerla en cuenta. El resto del razonamiento debe seguir los planteamientos que hemos desarrollado a lo largo del trabajo Se plantean las desigualdades de cada término y se resuelven individualmente.

Tenemos para la primera restricción (prescindiendo de la primera fila de la tabla símplex final):

$$\lambda \begin{matrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{matrix} + \begin{matrix} 500 \\ 200 \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{10}{3}\lambda + 500 \geq 0 \\ -\frac{10}{3}\lambda + 200 \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda \geq -150 \\ \lambda \leq 60 \end{matrix} \Rightarrow -150 \leq \lambda \leq 60$$

$$-150 \leq \lambda \leq 60 \Leftrightarrow 500 - 150 \leq 500 + \lambda \leq 500 + 60 \Leftrightarrow 350 \leq a \leq 560;$$

Y para la segunda restricción (prescindiendo también de la primera fila de la tabla):

$$\lambda \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{3}\lambda + 500 \geq 0 \\ \frac{8}{3}\lambda + 200 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \leq 300 \\ \lambda \geq -75 \end{cases} \Rightarrow -75 \leq \lambda \leq 300$$

$$-75 \leq \lambda \leq 300 \Leftrightarrow 700 - 75 \leq 700 + \lambda \leq 700 + 300 \Leftrightarrow 625 \leq b \leq 1000;$$

Hemos elegido un ejemplo suficientemente sencillo y breve pero todas las preguntas del final del apartado anterior pueden volver a expresarse y generar nuevas preguntas a lo largo de sr resolución. Lo que permite vislumbrar las grandes líneas en que puede desarrollarse este REI. Multitud de preguntas y en consecuencia multitud de posibles caminos han quedado sólo señalados.

4. CONCLUSIONES

Frente al formalismo con que se introduce el análisis de sensibilidad en programación matemática (Barbolla & Cerdá & Sanz 2000, Sydsaeter & Hammond 2000) en este trabajo hemos expuesto una posible alternativa al mismo como un posible recorrido de estudio e investigación (REI).

Ha sido planteado como un proyecto de trabajo abierto, susceptible de utilizar en los nuevos grados en Economía y Empresa. Múltiples preguntas, múltiples derivaciones y múltiples caminos posibles de desarrollar a partir del mismo, que pueden surgir, han quedado sin hacer.

La experimentación “organizada” en clases interactivas, así como la evaluación de la experiencia no ha sido todavía puesta en marcha; pero pensamos en desarrollarla en un futuro trabajo. En este momento creemos que la exposición de este proyecto de trabajo puede ser interesante como un nuevo enfoque didáctico.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- BARBOLLA, R., CERDA, E., SANZ, P. (2000). “Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía". Prentice-Hall.
- BARQUERO, B., BOSCH M., GASCON J. (2007). “Using *Research* and *Study Courses* for teaching mathematical modeling at university level”. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 5) pp. 2050-2059.
- BOSCH M., GASCON J. (2006). “Twenty-five years of the didactic transposition”. *ICMI Bulletin, 58.* pp. 51-63.
- CHEVALLARD, Y. (2004). “Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistemologie scolaire”. (http://yves.chevallard.free.fr).
- CHEVALLARD, Y. (2006). “Steps towards a new epistemology in mathematics education”. *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4) pp. 21-30.
- SERRANO, L., BOSCH M., GASCON J. (2008). “Un “*Recorrido de Estudio e Investigación”* en matemáticas para el primer curso de Administración y Dirección de Empresas”. (documento de trabajo).
- SIERPINSKA, A. (1995). “Mathematics: "in Context", "Pure" or "with Applications"? A contribution to the question of transfer in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics* 15, 1, pp. 2-15.
- SYDSAETER, K., HAMMOND, P. J. (2000). “Matemáticas para el Análisis Económico". Prentice-Hall.