

# Distribuciones de temperaturas en conductores térmicos



Katerin Yuranny Montoya Suárez<sup>1,2</sup>, Cristian Camilo Rodríguez Correa<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Universidad Nacional 1, Calle 1 No.100. Colonial1, CP 16,200, México D. F.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital, Carrera 3 No.26 A - 40, Bogotá, Colombia.

E-mail: katherinmontoya004@gmail.com

Received 28 May 2016, accepted 2 October 2016)

## Resumen

La temperatura hace parte de un modelo extrínseco de la energía interna asociado a los movimientos de las partículas del sistema; se plantea un problema basado en un modelo de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden denominado salto de rana. Se plantea el problema en dos fases, la primera fase del problema consiste en el enfriamiento de una barra conductora a medida que transcurre un intervalo de tiempo, donde la barra tiene como condiciones iniciales  $T$  de 100 °C en el interior y 0 °C en los bordes y en la segunda fase se invierten las condiciones iniciales, de tal forma que la temperatura que se asignaba a los bordes ahora es asignada al interior y viceversa. Con esto se modela el calentamiento de la barra y se define una red de puntos por la cual se itera computacionalmente en el lenguaje de programación C++, para encontrar el valor de la temperatura en diferentes puntos de la barra a medida que transcurre el tiempo. Esta distribución de temperatura se evidencia en cinco materiales diferentes, tales como: alúmina, cobre, níquel, oro y aluminio. Durante el proceso anteriormente descrito se concluye que la relación entre la capacidad calorífica y el tiempo de enfriamiento es directa, por ende los materiales térmicos con mayor conductividad se demoran más tiempo en calentarse.

**Palabras clave:** Ecuación de calor, Distribución de temperatura, Conductor térmico, Capacidad calorífica.

## Abstract

Temperature is determined from an extrinsic model of the internal energy, which is related to the movement of the particles in the system; leapfrog integration is used in order to solve the second-order differential equations. Two stages are accomplished during the resolution of this problem. Firstly, a conductor with initial temperatures of 100°C in its inner side and 0°C in its outer border is cooled down in a specific time interval. In the second stage, the same conductor is cooled down, but the initial temperatures are inverted, that means 0°C in its inner side and 100°C in its outer border. Hence, the heat transfer process inside the conductor is modelled and a mesh is defined in order to iterate the temperature values in different points of the conductor through the time, this mathematical problem is solved by means of the programming language C++. Five different materials are used in this experiment: aluminum oxide, copper, nickel, gold and aluminum. Finally, it is concluded that there is a direct relationship between the heat capacity and the time that the conductor takes to cool down, therefore the materials with a higher value of heat capacity take a higher time to heat themselves.

**Keywords:** Heat equation, Temperature distribution, Thermal conductor, Heat capacity.

**PACS:** 65.40.-b, 01.55+b, 01.40.E-

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La literatura es amplia en el sentido conceptual de la conductividad y distribución de temperatura, dado que se toma la conductividad térmica, como una propiedad física que mide la capacidad de transferir la energía cinética y las aleaciones son consideradas como una combinación de propiedades metálicas donde presenta un flujo de calor.

A partir de este concepto se toma que este flujo de calor presenta 3 fenómenos de transferencia los cuales son: Conducción, Convección y Radiación, sin embargo solo se hace la relación al fenómeno de conducción porque esta

solo ocurre si hay diferencia de temperatura entre dos partes del medio conductor [1].

El presente trabajo muestra una metodología de la solución de la ecuación del calor para encontrar la distribución de calor en barras de diferente material los cuales son: alúmina, cobre, níquel, oro y aluminio. Estos materiales se caracterizan por sus propiedades físicas (ver Tabla I), están sus principales características para la aplicación del modelo.

La modelación de la ecuación del calor de una barra de longitud finita con condiciones iniciales y de borde en función del tiempo y longitud, utilizando el método de

Katerin Yuranny Montoya Suárez, Cristian Camilo Rodríguez Correa  
separación de variables para ecuaciones diferenciales de segundo orden (ver Figura 1).

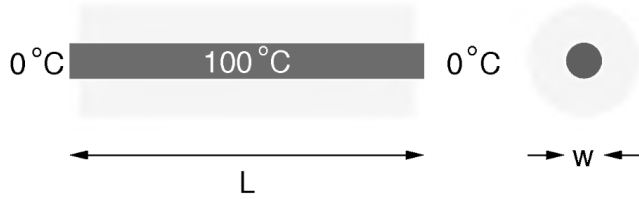


FIGURA 1. Barra metálica con aislamiento a lo largo de su longitud con sus extremos se mantiene a 0°C.

TABLA I. Características de cada material.

Material	Simbolo Químico	Densidad (Kg/m <sup>3</sup> )	Capacidad calorífica (J/kgK)	Conductividad térmica (K(Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ))
Alumina	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3960	775	15.8
Aluminio	Al	2698.4	900	237
Cobre	Cu	8460	385	400
Oro	Au	19300	130	401
Níquel	Ni	8908	440	90.7

## II. ECUACIÓN PARABÓLICA DEL CALOR

Una ecuación diferencial en la que existen dos o más variables independientes se denomina ecuación en derivadas parciales. La ecuación del calor es una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden que describe la distribución del calor sobre un cuerpo y depende de una variable espacial ( $x$ ) y de una variable temporal ( $t$ ), (de modo, que tenemos a la función general  $f=f(x, t)$ ).

Se define la ecuación de calor de la forma:

$$u_t - k\Delta_x^2 u = f. \quad (1)$$

Donde  $u(x, t)$  es la función que mide la temperatura en un punto  $x$  y en un instante de tiempo  $t > 0$  y  $u_x$  es la primera derivada de la función  $u$  con respecto a la variable espacial ( $x$ ). La variable temporal es unidimensional, mientras que, la espacial para este caso será bidimensional es decir  $x(x_1, x_2)$  de modo que:

$$\Delta_x^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \quad (2)$$

### A. Ecuación del calor unidimensional. 1

De modo que si se considera una barra muy delgada de longitud  $l$ ,  $x(0, l)$ , es decir, la ecuación del calor queda expresada de la forma:

$$u_t - k u_{xx} = f \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f. \quad (3)$$

Remplazando la energía interna  $u$  y siendo  $f = 0$  se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho C} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Donde  $T$  es una función de  $x$  y  $t$ .

### B. Ecuación del calor bidimensional. 2

Para el caso de una placa plana, la ecuación de difusión del calor queda de la siguiente forma:

$$u_t - k u_{xx} = f \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - k \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right\} = f. \quad (5)$$

## III. SOLUCIÓN NUMÉRICA E IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

### A. Salto de rana 1

El salto de rana es el nombre con el que se le llama a un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales, y además de segundo orden, lo cual es indicado para resolver la ecuación 4, y computacionalmente es sencillo y eficaz.

Sea una función multivariada  $F(x, y)$  se tiene que:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = \frac{F(x, y + \Delta y) + F(x, y - \Delta y) - 2F(x, y)}{(\Delta y)^2}. \quad (6)$$

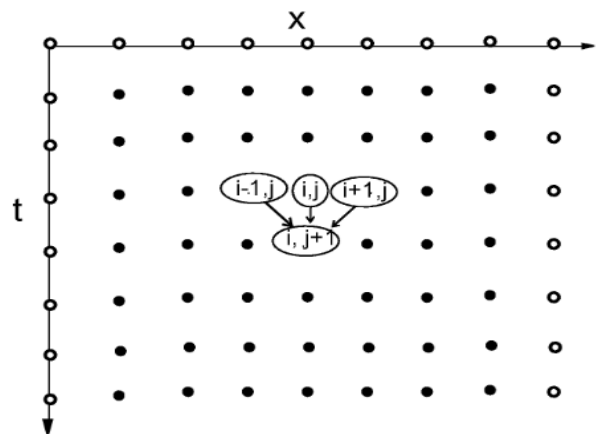


FIGURA 2. Método del salto de rana. El algoritmo para la ecuación del calor en el que la temperatura está localizada  $x = i\Delta x$  y el tiempo  $t = (j + 1)\Delta t$  se calcula a partir de los valores de temperatura en tres puntos de un momento anterior. Los nodos con centros blancos corresponden a las condiciones iniciales y de contorno conocidos [2].

El salto de rana es un método de diferencias centradas, ecuación (7), que consiste en que a partir de una red de

puntos se obtiene uno y su valor a través de los tres anteriores, estos son en el momento del tiempo inicial de frontera, con los cuales se comienza las diferentes situaciones. La Figura 2 muestra el método.

### B. Aplicación a la ecuación del calor. 2

Teniendo en cuenta la ecuación (7) y que la discretización es sobre el tiempo y la posición las derivadas parciales quedan:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial t} = \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t) - 2T(x,t)}{(\Delta x)^2}. \quad (8)$$

De lo cual (7) y (8) reemplazadas en la ecuación de calor (4) y despejando  $T(x, t + \Delta t)$ , que es la temperatura en el tiempo futuro o posterior, se encuentra:

$$\frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\rho C} \frac{T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t) - 2T(x,t)}{(\Delta x)^2}, \quad (9)$$

∴

$$T(x,t+\Delta t) = \left[ \frac{\kappa}{\rho C (\Delta x)^2} T(x+\Delta x,t) + T(x-\Delta x,t) - 2T(x,t) \right] + T(x,t). \quad (10)$$

### C. Construcción de la forma computacional. 3

Para el modelo computacional que se trabaja en 2D se tiene que re expresar la ecuación (10) en componentes  $(i, j)$  de la matriz formulada 2, se tiene ahora que:

$$T_{i,j+1} = \frac{\kappa \Delta t}{\rho C (\Delta x)^2} [T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}] + T_{i,j}.$$

Nombrando a  $k\Delta t/(\rho C \Delta x)$  computacionalmente que trabaja en 2D como  $\eta$ , se obtiene:

$$T[i][j+1] = \eta(T[i+1][j] + T[i-1][j] - 2T[i][j]) + T[i][j]. \quad (11)$$

La ecuación (11) se implementa en el código así:

```
for (int j=0; j<t; j++)
  for (int i=0; i<L; i++)
  {
    if ((i!=0)&&(i!=9))
    {
```

```
Distribuciones de temperaturas en conductores térmicos
tmp=eta*(T[i+1][j]+T[i-1][j]-
2*T[i][j])+T[i][j];
T[i][j+1]=tmp;
}
}
```

## IV. RESULTADOS

Las Figuras de la 3 a la 9 fueron generadas por *Gnuplot*, este grafico en base a los datos arrojados por el programa en C++.

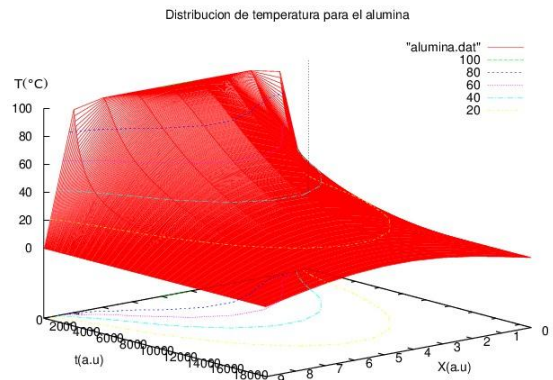


FIGURA 3. Distribución de temperatura para alúmina.

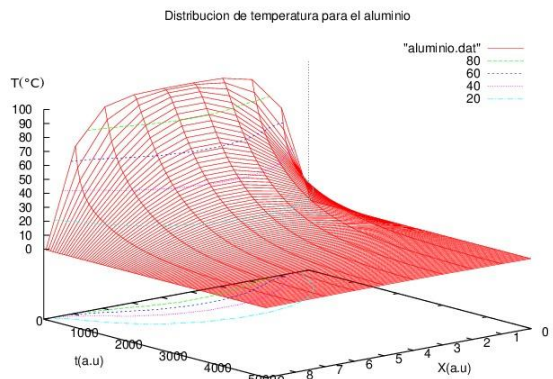


FIGURA 4. Distribución de temperatura para aluminio.

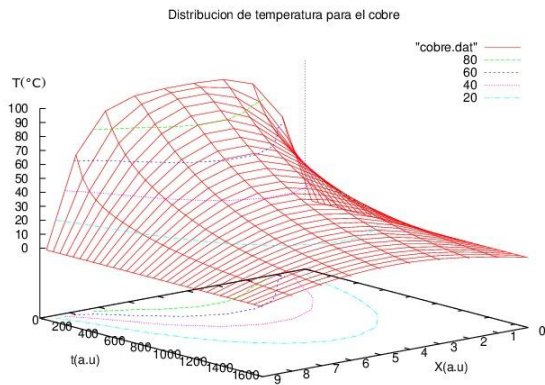


FIGURA 5. Distribución de temperatura para cobre.

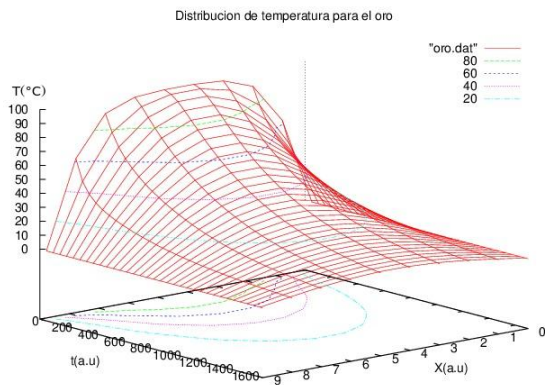


FIGURA 6. Distribución de temperaturas para el oro.

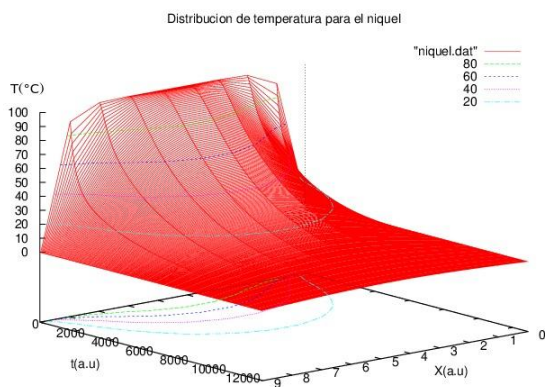


FIGURA 7. Distribución de temperaturas para el níquel.

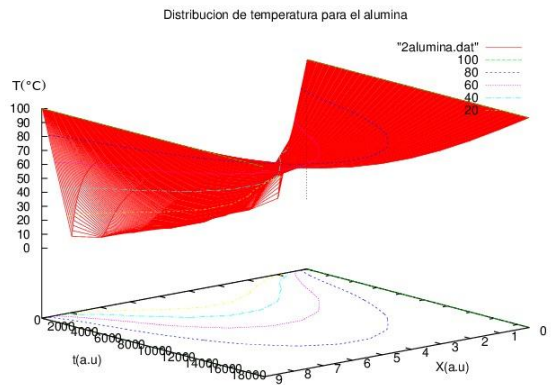


FIGURA 8. Distribución de temperaturas para el alumina. Modelo 2.

#### IV. CONCLUSIONES

Al hacer una revisión se encuentra que en la literatura hay pocas referencias que utilizan el método computacional Salto de Rana, y el desarrollo de la Ecuación de Calor, con esto se comprobó mediante las gráficas que efectivamente a mayor capacidad calorífica mayor va a ser el tiempo en llegar al equilibrio térmico y ver cómo se evalúa esta distribución en los diferentes materiales (alumina-aluminio), (cobre-oro-níquel) donde da un estudio interesante frente al contraste de cada material.

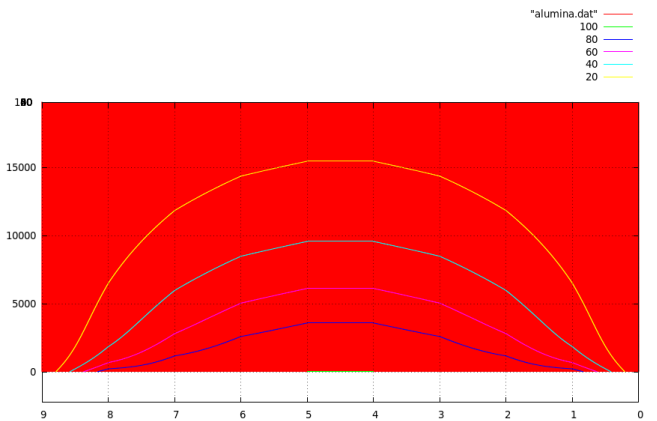


FIGURA 9. Isothermas de la Figura 8.

TABLA II. Tiempo de enfriamiento de cada material.

Material	Notación química	Tiempo de Enfriamiento (Horas)
Alumina	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	6.94
Aluminio	Al	1.38
Cobre	Cu	0.52
Oro	Au	0.55
Níquel	Ni	3.61

En el material de la alúmina es la que presenta mayor tiempo en enfriamiento por sus mismas propiedades, este material es usado como un aislante donde absorbe 17 veces más hidrogeno que cualquier otro material.

En el análisis de la alúmina presento una dificultad frente al computador implementado de (32 bits) y se evidencia en la Figura 8, en donde al transcurrir más 15000 segundos aún se encuentra en 20°C esto quiere decir que llega al punto en el que se necesita más capacidad de memoria RAM dinámica la cual requiere actualizarse miles de veces por segundo.

En el cobre presenta un menor tiempo en enfriamiento en comparación de los otros materiales ver (Tabla II) y el oro en donde se evidencio lo esperado ya que el oro pertenece a la familia del cobre. Esta aplicación del método computacional puede ser utilizada para varios materiales y analizar distintos comportamientos frente a la distribución de temperatura.

Además se puede utilizar el modelo de la barra con distintas condiciones iniciales.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradecemos al espacio de trabajo brindado por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

## **REFERENCIAS**

- [1] Morse, P. M., Feshbach, H., *Methods of Theory Physics Vol I*, (Mc Graw-Hill, New York, 2003).
- [2] Landau, R. H., Páez, M. J. & Bordeneianu, C. C., *Physics Computational* 2a Ed. (Wiley-VCH, Weinheim, 2007). pp. 369-377.
- [3] Vernotte, P., *Some posible complications in the phenomena of thermal conduction*, *Compte Rendus* **252**, 252-290 (1961).