El modelo probabilístico rectangular-trapezoidal. Aplicación a la tasación de fincas rústicas

Herrerías Pleguezuelo, Rafael < rherreri@ugr.es >

Herrerías Velasco, José Manuel< jmherrer@ugr.es >

Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Universidad de Granada

RESUMEN

El presente trabajo constituye una lógica continuación de un trabajo anterior de Herrerías y Herrerías (2009) en él se estudia, en primer lugar, una distribución de probabilidad bivariante resultante de la mezcla de las distribuciones continuas univariantes rectangular y trapezoidal. En segundo lugar, a través de su análisis se concluye que sus componentes se comportan como variables aleatorias independientes lo que permite disponer de un modelo probabilístico, muy apropiado para la tasación de fincas rústicas, mediante el método de valoración comparativo denominado por Ballestero (1973) como método de las dos betas. Este método es especialmente útil en el caso de que, como es habitual, se dispongan de pocos datos para realizar comparaciones y simultáneamente se disponga de un indicador bidimensional para la calidad de la finca tal, que sus componentes unidimensionales no estén relacionadas. En tercer lugar, se aplica el modelo probabilístico bivariante a un caso práctico de la literatura especializada de tasación de fincas rústicas, encontrándose la misma dificultad de cálculo que en los modelos univariantes, si las variables aleatorias son estocásticamente independientes.

Palabras claves: *distribución rectangular; distribución trapezoidal; distribución bivariante; valoración; método de las dos funciones de distribución.*

ABSTRACT

This paper is a logical continuation of earlier work of Herrerías and Herrerías (2009), the present study first, focuses on a bivariate probability distribution resulting from the mixture of univariate continuous distributions rectangular and trapezoidal. Secondly, through its analysis it is concluded that the components behave as independent random variables which provides a probabilistic model suitable for the valuation of a farm using the comparative method of the two betas distributions, see Ballestero (1973). This method is especially useful in cases where, as usual, few data are available for comparison and simultaneously have a bidimensional indicator for the quality of the property that its unidimensional components are not related. Third, the bivariate probabilistic model is applied to a study case of the literature of farm valuation, if random variables are stochastically independent this procedure has the same difficulty of calculation that univariate models.

Keywords: *rectangular distribution; trapezoidal distribution; bivariate distribution; valuation; method of the two distribution functions.*

Área temática: Métodos Estadísticos.

1. INTRODUCCIÓN

Es sobradamente conocido la importancia de las distribuciones continuas univariantes, cuya función de densidad es una figura geométrica: cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio, parábola, etc… en el desarrollo de los métodos de valoración de la Economía Agraria, conocidos como método de las dos betas o método de las dos funciones de distribución, véase entre otros Lozano (1996), Romero (1997), Herrerías et al. (2001), García (2007) y Caballer (2008). Está claro que desde un punto de vista matemático-estadístico, estos modelos deben extenderse al campo bivariante en primer lugar y al multivariante posteriormente.

El objetivo principal de este trabajo es doble, por una parte, estudiar la distribución de probabilidad bivariante rectangular-trapezoidal desde un punto de vista probabilístico y por otra, extender el método de valoración de las dos betas, introducido por Ballestero (1971) y (1973), al caso bivariante. Utilizándose la mencionada distribución de probabilidad rectangular-trapezoidal, denominada de esta forma por su representación gráfica (como las similares univariantes: rectangular, triangular, trapezoidal, parabólica, biparabólica, etc…)

La figura 1 representa un modelo particular de dicha superficie de probabilidad. Nótese que dicha superficie puede obtenerse interceptando la superficie del modelo rectangular-triangular, véase Herrerías y Herrerías (2009), con un plano paralelo al eje OXY y de cota la del plano EFGH.

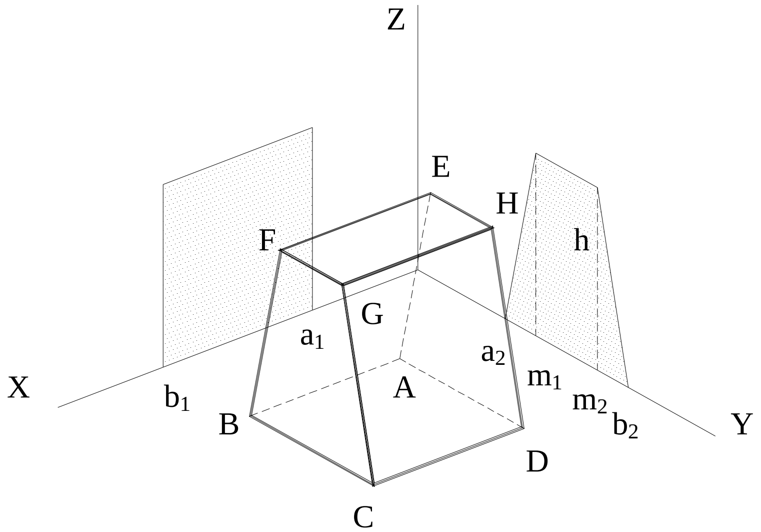


Figura 1: Representación gráfica modelo bivariante rectangular-trapezoidal

En su aplicación el método de valoración de las dos betas utiliza la metodología PERT, debido a la insuficiencia e incluso no existencia de datos que sirvan de testigos referentes, por ello se supone que de una variable X se conocen, o pueden estimarse, sus valores mínimo (a_1) y máximo (b_1), mientras que de otra variable Y se conocen, o pueden estimarse, sus valores mínimo (a_2), máximo (b_2) y más probable ó modal (m). En otras palabras, se consideran en los ejes cartesianos X e Y los valores necesarios para determinar una distribución rectangular o distribución uniforme $U(a_1,b_1)$ y otra trapezoidal $Tp(a_2,m_1,m_2,b_2)$, que generan en el espacio una superficie similar a la que se presenta en la figura 1.

Con mayor precisión, se trata de la superficie formada por dos de las caras rectangulares de un tronco de prisma triangular, unidas por su tercera cara superior que también es rectangular.

En esta misma línea de trabajo debe destacarse, por un lado, una fundamentación teórica del método de valoración de las dos betas que puede verse en Palacios et al. (2000) y, por otro lado, respecto al tema de índices de calidad multidimensionales es aconsejable consultar García et al. (2000) y (2002), Herrerías (2002) y Franco y Vivo (2006).

Como aportaciones adicionales de este trabajo, cabe señalar las siguientes:

1. Continúa la línea de investigación para el estudio de otras distribuciones de probabilidad bivariantes, que puedan usarse como modelos probabilísticos en

el método de valoración de las dos betas extendido, véase Herrerías y Herrerías (2009).

2. Constituye un segundo paso en la extensión del método de valoración de las dos betas al caso multivariante.

Para conseguir los objetivos señalados, el presente trabajo se organiza en las siguientes secciones:

En la sección 2 se presenta la distribución de probabilidad bivariante rectangular-trapezoidal, en primer lugar, se obtiene su función de densidad mediante consideraciones geométricas y posteriormente se determinan sus características estocásticas: vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas, así como se comprueba que las componentes del vector aleatorio son independientes.

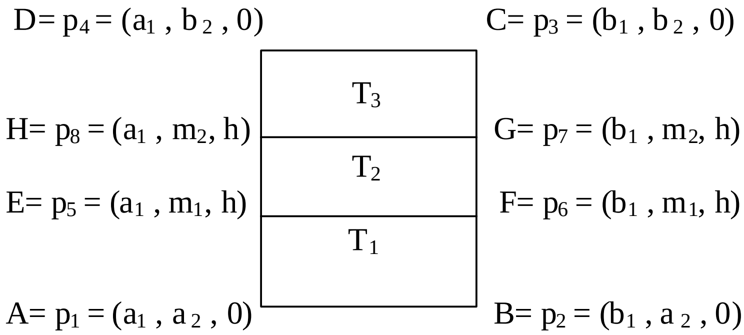
En la sección 3 se obtiene la función de distribución del vector aleatorio rectangular-trapezoidal, que es clave en el método de valoración de las dos betas.

En la sección 4 se ilustra su aplicabilidad con un caso práctico de la literatura especializada.

2. DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD

Para obtener la expresión de la función de densidad en el punto (x,y) se halla la ecuación de la superficie de la figura 1, que puede determinarse fácilmente mediante las ecuaciones de sus tres caras, ya que son planos que pasan por tres puntos, dos de ellos situados en la base del tronco del prisma y el tercero en un vértice de la cara superior del mismo. Utilizándose su cota, h, como constante normalizadora para la distribución continua bivariante resultante.

Proyectando la superficie de la rectangular-trapezoidal en el plano Z = 0. Se denotan por T_i (i = 1,2,3) los diferentes rectángulos que conforman los recorridos de (X ,Y) y por p_i (i = 1,2,…,8) los vértices del tronco del prisma (entre paréntesis sus coordenadas).



Se determinan los tres planos que conforman las tres caras rectangulares de la rectangular-trapezoidal, a partir de la ecuación del plano que pasa por tres puntos.

El plano que pasa por los puntos A, B y E, se obtiene a través de la ecuación:

$$\Pi(p_1, p_5, p_2) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 1 \\ a_1 & m_1 & h & 1 \\ b_1 & a_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Pi(p_1, p_5, p_2) \equiv -h(a_1 - b_1)y + \left[a_1(m_1 - a_2) + b_1(a_2 - m_1)\right]z + a_2 h(a_1 - b_1) = 0$$

Teniendo en cuenta que $a_1 \neq b_1$, puede dividirse por $(b_1 - a_1)$ y resulta:

$$(a_2 - y)h + (m_1 - a_2)z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{y - a_2}{m_1 - a_2} h \quad \text{si } (x, y) \in T_1 \tag{1}$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos E, F y H tiene por ecuación:

$$\Pi(p_5, p_8, p_6) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & m_1 & h & 1 \\ a_1 & m_2 & h & 1 \\ b_1 & m_1 & h & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Pi(p_5, p_6, p_8) \equiv (a_1 m_2 + b_1 m_1 - b_1 m_2 - a_1 m_1)\, z - (a_1 m_2 + b_1 m_1 - b_1 m_2 - a_1 m_1)\, h = 0$$

Dividiendo $(a_1 m_2 + b_1 m_1 - b_1 m_2 - a_1 m_1) \;\Rightarrow\; z = h \quad \text{si } (x, y) \in T_2$ (2)

El otro plano que pasa por los puntos C, D y H tiene por ecuación:

$$\Pi(p_3,p_8,p_4)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ b_1 & b_2 & 0 & 1\\ a_1 & m_2 & h & 1\\ a_1 & b_2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Pi(p_3,p_8,p_4)\equiv -h(b_1-a_1)y+\left[b_1(m_2-b_2)+a_1(b_2-m_2)\right]z+b_2h(b_1-a_1)=0$$

Al igual que antes puede dividirse por (b_1-a_1):

$$(b_2-y)h+(m_2-b_2)z=0 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{b_2-y}{b_2-m_2}h \quad \text{si } (x,y)\in T_3 \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) se obtiene la función de densidad, especificando el valor de h.

El procedimiento más sencillo que puede usarse para determinar h como constante normalizadora es el geométrico.

Imponiendo la condición de que el volumen de la rectangular-trapezoidal sea la unidad, se obtiene la siguiente expresión:

$$h=\frac{2}{(b_1-a_1)\big((b_2-a_2)+(m_2-m_1)\big)} \tag{4}$$

Por lo cual la expresión de la función de densidad de la distribución Rectangular-Trapezoidal es la siguiente:

$$z(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y-a_2}{m_1-a_2}\,\dfrac{2}{(b_1-a_1)\big((b_2-a_2)+(m_2-m_1)\big)} & \text{si } (x,y)\in T_1\\[2ex] \dfrac{2}{(b_1-a_1)\big((b_2-a_2)+(m_2-m_1)\big)} & \text{si } (x,y)\in T_2\\[2ex] \dfrac{b_2-y}{b_2-m_2}\,\dfrac{2}{(b_1-a_1)\big((b_2-a_2)+(m_2-m_1)\big)} & \text{si } (x,y)\in T_3\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \tag{5}$$

O lo que es lo mismo:

$$z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2(y-a_2)}{(m_1-a_2)(b_1-a_1)\big((b_2-a_2)+(m_2-m_1)\big)} & \text{si } \ a_1\le x\le b_1 \ \wedge \ a_2\le y\le m_1\\[2ex] \dfrac{2}{(b_1-a_1)\big((b_2-a_2)+(m_2-m_1)\big)} & \text{si } \ a_1\le x\le b_1 \ \wedge \ m_1\le y\le m_2\\[2ex] \dfrac{2(b_2-y)}{(b_2-m_2)(b_1-a_1)\big((b_2-a_2)+(m_2-m_1)\big)} & \text{si } \ a_1\le x\le b_1 \ \wedge \ m_2\le y\le b_2\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \tag{6}$$

El resultado de independencia de las variables se obtiene observando que se puede expresar la función de densidad conjunta, dada en (6), como el producto de las marginales, esto es, $z(x,y)=z_1(x)z_2(y)$, donde $z_1(x)$ es la función de densidad de una distribución rectangular o uniforme, U(a_1,b_1) y $z_2(y)$ es la función de densidad de una trapezoidal Tp(a_2,m_1,m_2,b_2), véase Herrerías y Palacios (2007).

Las características estocásticas relevantes de la variable aleatoria bidimensional (X,Y) son su vector de medias, μ, y su matriz de varianzas-covarianzas, Σ, que responden a las expresiones siguientes:

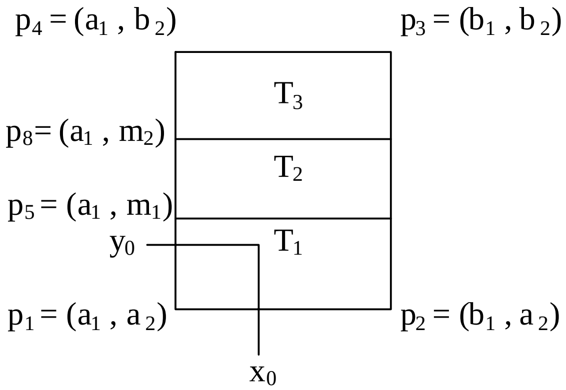
$$\mu=\begin{pmatrix}\dfrac{a_1+b_1}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{3}\left(b+m_1+m_2+a-\dfrac{b\,m_2-a\,m_1}{b-a+m_2-m_1}\right)\end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\dfrac{(b_1-a_1)^2}{12} & 0\\[2ex] 0 & \dfrac{1}{18}\left((b-m_1)^2+(m_2-a)^2+(b-m_2)(m_1-a)-\dfrac{2(b-a)(m_2-m_1)(m_2-a)(b-m_1)}{(b-a+m_2-m_1)^2}\right)\end{pmatrix}$$

3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DEL MODELO RECTANGULAR-TRAPEZOIDAL

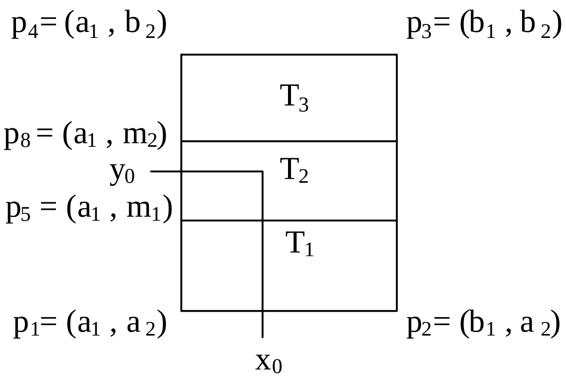
En el cálculo de la función de distribución hay que distinguir tres casos:

1. Si $(x_0 , y_0)\in T_1$, se tiene que:



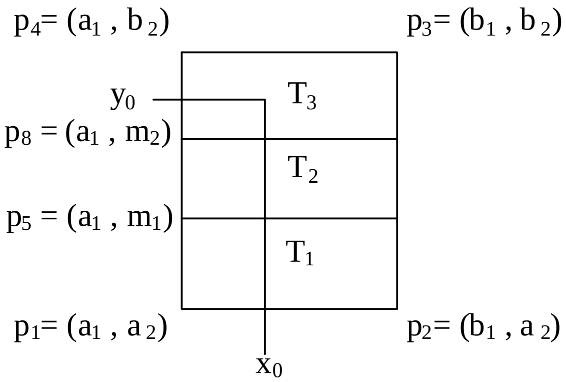
$$F(x_0, y_0) = \int_{a_2}^{y_0}\int_{a_1}^{x_0} z_1 dxdy = \int_{a_2}^{y_0}\int_{a_1}^{x_0} h \frac{y - a_2}{m_1 - a_2} dxdy =$$
$$= \frac{h}{2}\frac{(x_0 - a_1)(y_0 - a_2)^2}{m_1 - a_2} \qquad (7)$$

2. Si $(x_0 , y_0) \in T_2$, se tiene que:



$$F(x_0, y_0) = \int_{a_1}^{x_0}\int_{a_2}^{m_1} z_1 dydx + \int_{a_1}^{x_0}\int_{m_1}^{y_0} z_2 dydx =$$
$$= \int_{a_1}^{x_0}\int_{a_2}^{m_1} h \frac{y - a_2}{y_1 - a_2} dydx + \int_{a_1}^{x_0}\int_{m_1}^{y_0} h\, dydx = \qquad (8)$$
$$= \frac{h}{2}(x_0 - a_1)(2y_0 - m_1 - a_2)$$

3. Si $(x_0 , y_0) \in T_3$, se tiene que:



$$F(x_0, y_0) = \int_{a_1}^{x_0}\int_{a_2}^{m_1} z_1 dydx + \int_{a_1}^{x_0}\int_{m_1}^{m_2} z_2 dydx + \int_{a_1}^{x_0}\int_{m_2}^{y_0} z_3 dydx =$$

$$= \int_{a_1}^{x_0}\int_{a_2}^{m_1} h\frac{y-a_2}{m_1-a_2} dydx + \int_{a_1}^{x_0}\int_{m_1}^{m_2} h\ dydx + \int_{a_1}^{x_0}\int_{m_2}^{y_0} h\frac{b_2-y}{m_2-y_2} dydx = \qquad (9)$$

$$= \frac{h}{2}(x_0-a_1)(b_2-a_2+m_2-m_1) - \frac{h}{2}\frac{(x_0-a_1)(b_2-y_0)^2}{b_2-m_2}$$

Por tanto, la función de distribución del modelo probabilístico rectangular-triangular es:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 \wedge y < a_2 \\ \dfrac{h}{2}\dfrac{(x-a_1)(y-a_2)^2}{m_1-a_2} & \text{si } \begin{matrix} a_1 < x < b_1 \\ a_2 < y < m_1 \end{matrix} \\ \dfrac{h}{2}(x-a_1)(2y-m_1-a_2) & \text{si } \begin{matrix} a_1 < x < b_1 \\ m_1 < y < m_2 \end{matrix} \\ \dfrac{h}{2}(x-a_1)(b_2-a_2+m_2-m_1) - \dfrac{h}{2}\dfrac{(x-a_1)(b_2-y)^2}{b_2-m_2} & \text{si } \begin{matrix} a_1 < x < b_1 \\ m_2 < y < b_2 \end{matrix} \\ 1 & \text{si } x > b_1 \wedge y > b_2 \end{cases} \qquad (10)$$

4. CASO PRÁCTICO

En este trabajo se utiliza la distribución de probabilidad estudiada en los apartados anteriores como modelo probabilístico para un indicador bidimensional de calidad para fincas rústicas. El trabajo que se toma como referente es el de Alonso y Lozano (1985), parcialmente reproducido en el texto de Alonso e Iruretagoyena (1990), en el que se realiza la valoración de una finca de Valladolid atendiendo a un único índice de calidad, la producción de la finca.

Tomando de partida los datos contenidos en el mencionado artículo de Alonso y Lozano (1985). Se pretende determinar el valor de mercado (€ / hectárea) para una finca cuya producción es de 2.100 kg de cebada por hectárea y que se encuentra a una distancia de 24 Km. de Valladolid.

Los datos originales para las variables usadas por Alonso y Lozano (1985) son:

	VALOR DE MERCADO (€/ hectárea)	INDICE PRODUCCIÓN (kg de cebada / hectárea)
Mínimo	1.502,53	1.800
Máximo	2.704,55	4.000
Moda	1.803,04	2.000

Tabla 1: Elaboración propia, a partir de los datos utilizados por Alonso y Lozano (1985)

Estos autores suponen que la distribución de la variable valor de mercado es triangular, luego su función de distribución es la siguiente:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \le 1.502{,}53 \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(m-a)}=\dfrac{(x-1.502{,}53)^2}{361.215{,}55} & \text{si } 1.502{,}53 \le x \le 1.803{,}04 \\ 1-\dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-m)}=1-\dfrac{(2.704{,}55-x)^2}{1.083.646{,}65} & \text{si } 1.803{,}04 \le x \le 2.704{,}55 \\ 1 & \text{si } x \ge 2.704{,}55 \end{cases} \tag{11}$$

Al igual que en Herrerías y Herrerías (2009) la distribución de probabilidad que se va a utilizar es bidimensional, por tanto, se deben de tomar dos índices de calidad en la valoración de la finca, para ello, además de tomar como índice la producción de la finca; se va a tomar un segundo índice de calidad, la proximidad a Valladolid, que claramente no están relacionados uno con el otro y puede presuponerse que su comportamiento es independiente, se considera la proximidad en vez de la distancia para que se cumpla la hipótesis de relación directamente proporcional entre el índice y el valor de mercado. Esto hace suponer que el precio de la finca aumenta cuando la distancia a Valladolid es menor o lo que es lo mismo cuando su proximidad es mayor, algo que resulta obvio. Este índice de proximidad puede obtenerse fácilmente como el complementario de la distancia a un valor superior a la mayor distancia presentada por las fincas testigo, en este caso puede tomarse el valor de 70 Km.

Se va a aplicar la distribución rectangular-trapezoidal, esto es, se supone que el índice de proximidad sigue una distribución rectangular y que el índice de producción sigue una distribución trapezoidal.

Como el índice de producción parte de tres datos, mínimo, a, máximo, b, y más probable, m, se recurre a la distribución trapezoidal CPR, introducida por Callejón, Pérez y Ramos (1996), para obtener el cuarto parámetro necesario para la determinación de la distribución trapezoidal. La obtención del cuarto parámetro se realiza como sigue:

i. Se calcula el punto medio del intervalo, $\frac{a+b}{2}$

ii. Si $\frac{a+b}{2} > m$ entonces se nota por $m_1 = m$ y $m_2 = \frac{a+b}{2}$

iii. Si $\frac{a+b}{2} < m$ entonces se nota por $m_1 = \frac{a+b}{2}$ y $m_2 = m$

A partir de los datos de la Tabla 1 se tiene

$$\frac{a+b}{2} = 2.900 > m = 2.000 \;\Rightarrow\; m_1 = 2.000 \quad y \quad m_2 = 2.900$$

La siguiente tabla resume los valores para cada uno de los índices empleados:

INDICE PROXIMIDAD A VALLADOLID $I_1 = 70 - d$ (Km.)	INDICE PRODUCCIÓN I_2 (kg de cebada / hectárea)
$a_1 = 70 - 65 = 5$	$a_2 = 1.800$
$b_1 = 70 - 10 = 60$	$b_2 = 4.000$
	$m_1 = 2.000$
	$m_2 = 2.900$

Tabla 2: Elaboración propia, a partir de los datos utilizados por Alonso y Lozano (1985)

Lo primero que se realiza con la información de la finca que se quiere valorar es determinar el complementario de la distancia para obtener la proximidad a Valladolid, 70 – 24 = 46, entonces se determina que el valor del índice bivariante es:

$$(x_0, y_0) = (46\ ,\ 2.100) \qquad (12)$$

Para determinar en qué región se encuentran los datos de la finca a valorar, hay que tener en cuenta que:

$$x_0 \in (5\ ,\ 60\ ) \quad \text{y} \quad m_1 < y_0 = 2.100 < m_2$$

Entonces (12) se encuentra en la región T_2

A partir de (10) y teniendo en cuenta los valores de la Tabla 2, se calcula la función de distribución en el punto (12), que está en la región T_2, y el resultado es 0,096188. La aplicación del método de las dos betas lleva a utilizar la expresión $F(v_d) = G(i_{1d}, i_{2d})$, véase Herrerías y Herrerías (2009), por ello, se compara este resultado de la distribución conjunta con el valor de la función de distribución del valor de mercado en la moda, que es $0{,}2500065 \approx 1/4$. Al ser menor, hay que despejar de la primera rama de la función de distribución del valor de mercado vista en (11), obteniéndose:

$$\frac{(x - 1.502{,}53)^2}{361.215{,}55} = 0{,}\ 096188 \ \text{ luego } \ x = 1.688{,}93 \text{ € /hectárea}$$

Si se compara el valor obtenido con el que se obtuvo con el modelo rectangular-triangular, 1.722,41 € /hectárea, se aprecia una ligera diferencia.

Siguiendo con la misma metodología considerada, se puede replicar este procedimiento de valoración suponiendo que la distribución de la variable valor de mercado es trapezoidal, aplicando la distribución trapezoidal CPR, introducida por Callejón, Pérez y Ramos (1996), se calcula $\frac{a+b}{2} = \frac{1.502{,}53 + 2.704{,}55}{2} = 2.103{,}54$, y se considera ahora que el modelo probabilístico usado para la variable valor de mercado es la distribución trapezoidal $Tp(1.502{,}53; 1.803{,}04; 2.103{,}54; 2.704{,}55)$, Herrerías et al. (2001)

Supuesto que los índices de calidad se distribuyen según una distribución rectangular-triangular, estudiada en Herrerías y Herrerías (2009), y según una distribución rectangular-trapezoidal, introducida en este artículo, se obtienen los cuatro siguientes valores de mercado para la finca considerada:

Índices de calidad / Valor de Mercado	Rectangular-Triangular	Rectangular-Trapezoidal
Triangular	1.722,41	1.688,93
Trapezoidal	1.748,36	1.710,93

Tabla 3: Resumen valores de mercado (€/ hectárea) para las distintas distribuciones

La media aritmética de estas cuatro valoraciones es 1.717,66 €/ hectárea. Esta forma de proceder hallando la media de los diferentes métodos de valoración es práctica habitual en el campo de valoración, véase Guadalajara (1996).

CONCLUSIONES

En este trabajo, en primer lugar, se ha presentado y estudiado una distribución de probabilidad bivariante que sirve, en una etapa posterior, como modelo para un índice de calidad bidimensional de componentes no relacionadas.

En segundo lugar, se ha profundizado en la extensión formal del método de valoración de las dos betas al caso bidimensional, lo que constituye un sólido comienzo para abordar en su generalidad los índices multivariantes.

En tercer lugar, se ha tratado un caso práctico de la literatura especializada mediante el método de valoración de las dos betas extendido, constatándose que es tan sencillo de utilizar como en el caso unidimensional. El valor de mercado obtenido por el método extendido con la distribución rectangular-trapezoidal es ligeramente distinto al determinado por el mismo método si se considera la distribución rectangular-triangular, algo menor es la diferencia si se toma como valor de mercado final la media obtenida por los cuatro métodos de valoración resumidos en la Tabla 3.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONSO, R e IRURETAGOYENA, M. T. (1990) "Casos prácticos de Valoración Agraria. Conceptos, Métodos y Aplicaciones". MAPA. Madrid.
- ALONSO, R y LOZANO, J. (1985) "El método de las dos funciones de distribución: una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarcas Centro y Tierra de Campos (Valladolid)". Anales del INIA, Economía, 9, 295-325.
- BALLESTERO, E. (1971) "Sobre la valoración sintética de tierras y un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria". Revista de Economía Política. Abril, 225-238.
- BALLESTERO, E. (1973) "Nota sobre un nuevo método rápido de valoración". Revista de Estudios Agrosociales, 85, 75-78.
- CABALLER, V. (2008). "Valoración Agraria. Teoría y Práctica". Mundiprensa, 5ª Edición, Madrid.
- CALLEJÓN, J.; PÉREZ, E. y RAMOS, A. (1996) "La distribución trapezoidal como modelo probabilístico para la metodología PERT". Actas en CD-Rom de la X Reunión de ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Albacete por la Universidad de Castilla la Mancha.
- FRANCO, M. y VIVO, J. M. (2006) "Weighting tools and alternative techniques to Generate weighted probability models in Valuation theory". En HERRERÍAS, R.; CALLEJÓN, J. y HERRERÍAS, J. M. (editores, 2006). "Distribution Models Theory". World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 67-83.
- GARCÍA, C. B. (2007) "Generalizaciones de la distribución biparabólica: Aplicaciones en el ámbito financiero y al campo de la valoración". Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- GARCÍA, J., CRUZ, S. y ROSADO, Y. (2000) "Las funciones de distribución multivariantes en la Teoría General de Valoración". Actas en CD-Rom de la XIV Reunión ASEPELT-ESPAÑA, celebrada en Oviedo.
- GARCÍA, J., CRUZ, S. y ROSADO, Y. (2002) "Extensión multi-índice del método beta en valoración agraria". Economía Agraria y Recursos Naturales, 2, 3-26.

- GUADALAJARA, N. (1996) (2ª Edición) "Valoración Agraria. Casos Prácticos". Ed. Mundi-Prensa. Madrid.
- HERRERÍAS, J. M. (2002). "Avances en la Teoría General de Valoración en Ambiente de Incertidumbre". Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- HERRERÍAS, R.; GARCÍA, J.; CRUZ, S. y HERRERÍAS, J. M. (2001) "Il modello probabilistico trapezoidale, nel metodo delle due distribuzioni della teoria generale di valutazione". Genio Rurale. Anno LXIV Abril 2001, nº 4, 3-9
- HERRERÍAS, R. y PALACIOS, F. (2007) "Curso de Inferencia Estadística y del Modelo Lineal Simple". Delta Publicaciones.
- HERRERÍAS, R. y HERRERÍAS, J.M. (2009) "El modelo probabilístico rectangular-triangular. Aplicación a la tasación de fincas rústicas". XVII Jornadas ASEPUMA – V Encuentro Internacional. Rect@ Vol Actas_17 Issue 1.
- LOZANO, J. J. (1996) "Tasación urbana: una metodología para informes de tasación masiva". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica Madrid.
- PALACIOS, F.; CALLEJÓN, J. y HERRERÍAS, J. M. (2000) "Fundamentos probabilísticos del método de valoración de las dos distribuciones". Actas en CD-Rom de la XIV Reunión ASEPELT-ESPAÑA, celebrada en Oviedo.
- ROMERO, C. (1977) "Valoración por el método de las dos distribuciones Beta: una extensión". Revista de Economía Política, 75, 47-62. Madrid.