Historias de Matemáticas

Precisión en las Reglas de Cálculo

Precision on Slide Rules

Jorge Luis Victoria

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen VII, Número 1, pp. 129–148, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Oct'16; Aceptación: 1 Mar'17

1 de abril de 2017

Resumen

Las reglas de cálculo logarítmicas han sido durante años el instrumento de cálculo preferido por ingenieros y técnicos, usándose ampliamente hasta el advenimiento de las calculadoras científicas portátiles. Hoy día las reglas de cálculo ya en desuso, están despertando un renovado interés entre grupos de educadores que redescubren sus muchos valores pedagógicos para la enseñanza de las matemáticas. A su vez, las reglas de cálculo son un perfecto ejemplo de matemáticas aplicadas, y el uso de las mismas en la enseñanza puede ser llevado todavía un paso más allá complementándolo con estudios sobre el instrumento en sí mismo. Uno de los términos universalmente asociados a las Reglas de Cálculo es el de "Precisión", sin embargo generalmente fue usado de manera vaga y meramente intuitiva, por lo cual merece un estudio más detallado.

El presente artículo expone una breve reseña de los distintos aspectos que participan del concepto de precisión de una Regla de Cálculo. Se enfoca principalmente en analizar las particularidades del error de cálculo con escalas y su propagación, dada la especial naturaleza de la Regla de Cálculo y de su operación. Posteriormente propone una metodología general para evaluar y comparar desde lo teórico el desempeño de distintas escalas utilizadas en las Reglas de Cálculo, así como evaluar métodos diferentes de realizar el mismo cálculo. Finalmente el artículo presenta ciertas conclusiones generales a tener en cuenta al diseñar o utilizar Reglas de Cálculo.

Palabras Clave: Regla de Cálculo, Instrumento de Cálculo, Escala Logarítmica, Cálculo Analógico, Precisión.

Abstract

Logarithmic slide rules have been for years the calculation instrument preferred by engineers and technicians and widely used until the appearance of the pocket scientific calculators. Nowadays the no longer used slide rules, are arousing a renewed interest among groups of educators who are rediscovering its many pedagogical values for mathematics teaching. In turn, the slide rules are a perfect example of applied mathematics, and their use in education can still be taken a step further complementing it with studies about the instrument itself. One of the words universally associated with them is "Precision", however it was generally used in a vague and intuitive form, so it deserves more detailed study.

The present article depicts a brief overview on the different aspects that participate of the concept of precision in a slide rule. It focuses on studying the particularities about error in calculations with scales and its propagation, given the special nature of the slide rule and its operation. Later, proposes a general methodology to evaluate and compare from a theoretical point of view, the performance of the different scales used in slide rules, and to evaluate alternative methods for the same computation. Finally this article presents some general conclusions to take into account when designing or using slide rules.

Keywords: Slide Rule, Calculating Instrument, Logarithmic Scales, Analogic Calculation, Precision.

1. Introducción

La regla de cálculo (RC) de manera genérica, nos permite realizar variadas operaciones matemáticas a través seleccionar un valor numérico en alguna de sus escalas desplazando la reglilla o el cursor, operarlo con otros valores seleccionados de igual manera en la misma u otra escala, repetir el proceso según necesidad, y finalmente leer el resultado del cálculo, también en la misma u otra escala.

La incertidumbre en las mediciones con instrumentos, es un tema ampliamente estudiado a través de los años. También son de dominio público las leyes que describen la propagación de errores de datos a través de fórmulas matemáticas y su impacto en el resultado final. Sin embargo no parece estar suficientemente documentado lo que sucede en el caso de las RC.

La particularidad de las RC estriba en que éstas combinan un funcionamiento como instrumento imperfecto de medición, con su capacidad de realizar cálculos y la correspondiente propagación de la incertidumbre a través de los mismos.

Exploraremos brevemente el concepto de precisión en las reglas de cálculo a través de varios ejemplos, poniendo el foco en la búsqueda de formas prácticas de evaluar las RC, sus escalas, sus métodos de cálculo, y de demostrar o rebatir muchos supuestos populares.

2. Precisión de una Regla de Cálculo

Por motivos históricos en el uso del vocablo y la particular naturaleza de la Regla de Cálculo (RC), en este texto utilizaremos simplemente la acepción amplia y coloquial del término "precisión", como la posibilidad de obtener resultados precisos y exactos en los cálculos con este instrumento.

A continuación veremos los grandes factores que afectan la precisión final en un cálculo realizado con RC:

2.1 Precisión Constructiva

El primer elemento a tener en cuenta es la precisión constructiva de la regla. Sólo lo introduciremos brevemente señalando sus elementos principales:

- Construcción sólida y estable

- Bajo y uniforme rozamiento para una colocación precisa de los valores.
- Estabilidad del cursor, y deslizamiento suave.
- Perfecta alineación entre las escalas de las diferentes partes del cuerpo de la regla, la reglilla, y en el frente y reverso de las mismas.
- Perfecta verticalidad del trazo del cursor y sincronización entre caras.
- Exactitud de las escalas.
- Legibilidad de las escalas y facilidad de interpolación visual.

2.2 Precisión Operativa

Supongamos que hablamos de una regla ideal con una perfecta calidad constructiva. Luego la precisión en un cálculo vendrá dada por varios factores operativos principales:

- La habilidad manual y visual del operador para colocar y leer valores en la regla.
- La capacidad del operador para interpolar correctamente valores no marcados directamente en las escalas.
- El rango de los valores y resultados: Al involucrar el cálculo escalas no lineales, la precisión lograda no es la misma para todos los valores.
- La acumulación de los errores en el encadenamiento de cálculos:

Para cada uno de estos factores, constructivos y operativos, los fabricantes han tratado de producir RC que faciliten su reducción. El principal elemento no mecánico de diseño de una RC son sus escalas, por lo tanto estudiaremos la forma teórica en que las escalas afectan o limitan la precisión alcanzada en los cálculos.

3. La incertidumbre en las Reglas de Cálculo

Como ya dijimos, la RC requiere un enfoque un poco particular al considerar la incertidumbre en sus resultados. No es exactamente la incertidumbre de lectura de un instrumento de medición. Tampoco es un mero análisis de propagación de incertidumbre de datos a través de una expresión matemática. La Regla de cálculo de alguna forma hace ambas cosas, mide y calcula simultáneamente, entonces veremos cómo analizar su incertidumbre operativa.

3.1 Hipótesis y convenciones

- Dada la alta calidad de las buenas reglas, consideraremos despreciables los errores de la regla en sí, y analizaremos solo los errores de operación.
- El error de interpolación lineal sobre escalas no lineales resulta insignificante para las escalas usadas en reglas normales.
- El uso de un índice de escala o de la línea de cursor (puntos exactos), conlleva un error despreciable en relación al error de ajustar valores intermedios cualesquiera en las escalas.

- Llamaremos ***estimación*** a todas las operaciones sobre una escala que introduzcan incertidumbre, a saber:
    - Ajustar el cursor a un valor en una escala.
    - Ajustar un valor en una escala móvil sobre la línea del cursor.
    - Ajustar un índice de escala sobre un valor de otra escala.
    - Leer en una escala un valor apuntado por el cursor o por un índice.
- El número de estimaciones es muy importante y usualmente lo llamamos $\boldsymbol{n}$.
- Llamamos $\mathbf{X_E}$ a los valores **X** representados en una escala **E**.
- Llamamos **p** a la posición geométrica sobre la regla de un determinado valor de una escala (usualmente distancia al índice **1** de la escala C/D).
- Llamamos **L** a la longitud total de la escala.

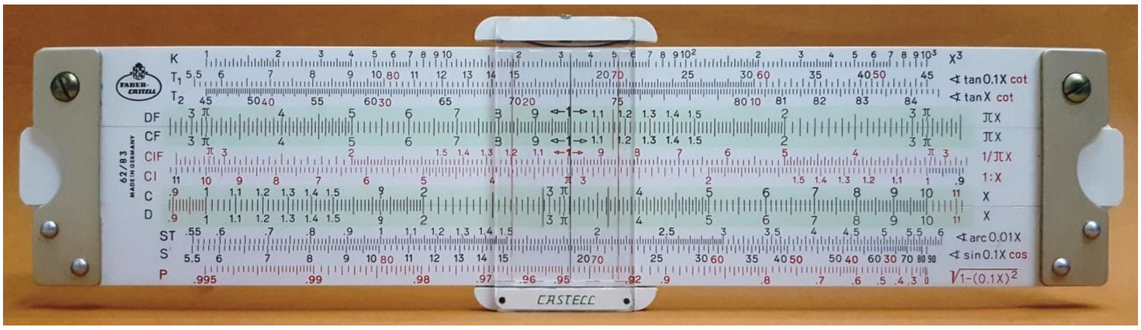

Figura 1. Regla de bolsillo de alta calidad.

4. Incertidumbre Intrínseca

Denominaremos ***incertidumbre intrínseca*** a una medida de la incertidumbre en los cálculos realizados con una RC propiciada por las características de las escalas y de los métodos utilizados. Aquí la palabra clave es “propiciado”, y con el concepto de incertidumbre intrínseca cuantificaremos la dificultad que ofrece el instrumento a un operador, para obtener una mejor precisión en los cálculos.

4.1 Trazado de escalas

Veremos primero las ecuaciones del trazado de las escalas en la regla:

Hallaremos como ejemplo las expresiones para una regla ficticia con las escalas estándar **B, S , C** de una determinada longitud geométrica **L** .

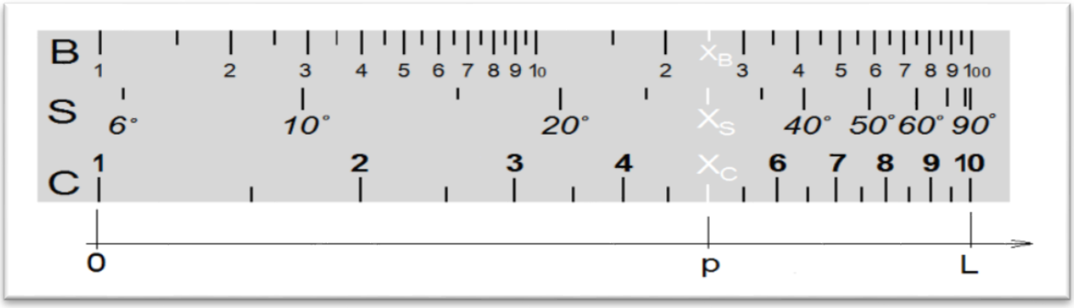

Figura 2. Tres ejemplos de escalas en una RC

Escala base C / D: Un punto cualquiera en la escala, etiquetado con el valor $\boldsymbol{X_C}$ deberá dibujarse en la posición $\boldsymbol{p}$. Por la definición de la escala logarítmica esta posición será:

$$p = L \cdot \log X_C \qquad [1]$$

Su inversa:

$$X_C = 10^{\frac{p}{L}} \qquad [2]$$

Escala de Cuadrados A / B: Un punto cualquiera en la escala, etiquetado con el valor $\boldsymbol{X_B}$ deberá dibujarse en la posición $\boldsymbol{p}$. Para referir esta escala a la escala base, recordamos la relación entre ambas escalas:

$$X_B = X_C^2 \quad \rightarrow \quad X_C = \sqrt{X_B} \qquad [3]$$

$$p = L \cdot \log X_C = L \cdot \log \left(\sqrt{X_B}\right) = L \cdot \frac{1}{2} \log X_B$$

$$p = \frac{L}{2} \log X_B \qquad [4]$$

Escala de Senos S (ángulos): Un punto de la escala etiquetado con el valor $\boldsymbol{X_S}$ deberá dibujarse en la posición $\boldsymbol{p}$. Para referir esta escala a la escala base, recordamos:

$$X_S = \text{arcsen } X_C \quad \rightarrow \quad X_C = \text{sen}\, X_S$$

$$p = L \cdot \log X_C = L \cdot \log (\text{sen}\, X_S)$$

Como la función seno (primer cuadrante) toma valores entre 0 y 1, en la escala S se introduce un factor de década $F_d = 10$, de manera de ajustar los valores leídos a la década logarítmica correcta. En este caso a la década 1 – 10.

$$p = L \cdot \log (F_d \cdot X_C)$$

$$p = L \cdot \log\ (10\,\mathrm{sen}\, X_S) \qquad [\,5\,]$$

Su inversa: $$X_S = \mathrm{arcsen}\left(10^{\frac{p}{L}-1}\right) \qquad [\,6\,]$$

Reemplazando los valores de las etiquetas $X_C = 5$, $X_B = 25$, $X_S = 30^{\circ}$, en las expresiones [1][4][5] correspondientes al ejemplo de la *Figura 2*, para una escala de Longitud normal L=250 mm. y para el factor de década de senos habitual $F_d = 10$, comprobamos según lo esperado la perfecta alineación de las marcas:

$$p = 174.74 \text{ mm.}$$

En general: Cada valor $\mathbf{X_f}$ de la escala para f(x) (referido a x en la escala base) se representará en la posición **p** según:

$$\mathbf{p = L \cdot \log\left(F_d \cdot f^{-1}(X_f)\right)} \qquad [\,7\,]$$

Inversamente, la función en sí: $$\mathbf{X_f = f\left(\frac{10^{\frac{p}{L}}}{F_d}\right)} \qquad [\,8\,]$$

De esta manera podemos representar en una RC cualquier función que nos pueda resultar útil, referida a la escala base. (Aunque no siempre habrá funciones inversas directas)

4.2 Incertidumbre intrínseca de las escalas

En la lectura o colocación de un valor en una escala, la incertidumbre vendrá dada por un desplazamiento del punto real respecto del ideal. Digamos como ejemplo que al colocar el cursor sobre un valor, en realidad lo estaríamos colocando algunas décimas de milímetro a un lado de la posición precisa, lo que equivale a utilizar un valor diferente.

No siendo las escalas lineales, el error producido por este desplazamiento no será constante a lo largo de toda la escala, sino será una función de la posición sobre ésta. Podemos cuantificar este concepto de "Incertidumbre" mediante un índice que indique la variación de los valores X_f de la escala f para un desplazamiento unitario, en función de la posición física p. De manera que en una escala de mayor incertidumbre intrínseca, un desplazamiento unitario del punto de lectura producirá un mayor error que en una escala de menor incertidumbre. Esto no es más que la derivada de los valores respecto de la posición.

Definimos la función Incertidumbre intrínseca $\mathbf{I_f(p)}$ de la escala f a:

Incertidumbre intrínseca: $$\mathbf{I_f = \frac{\partial X_f}{\partial p}}$$

Este índice es un claro indicador de la "sensibilidad" de la escala a los errores de posicionamiento. (Siendo siempre pequeños entornos, la escala puede considerarse lineal).

4.2.1 Incertidumbre intrínseca de la escala base

Para la escala base C tendremos sin duda una curva exponencial. Partiendo de la ecuación [2] de la escala C:

$$X_C = 10^{\frac{p}{L}} \quad \rightarrow \quad I_C = \frac{\partial X_C}{\partial p} = \frac{\partial \left(10^{\frac{p}{L}}\right)}{\partial p} = \frac{1}{L}\left(10^{\frac{p}{L}}\right) \ln 10$$

$$I_C = \frac{\ln 10}{L} \cdot \left(10^{\frac{p}{L}}\right) \qquad \left[\frac{1}{mm}\right] \qquad [\,9\,]$$

Para otras décadas aplicar el factor de potencia de 10 apropiado.

Esta incertidumbre también la podemos expresar respecto de los propios valores de la escala C, reemplazando ***p*** en la última expresión, según [1].

$$I_C = \frac{\ln 10}{L} \cdot X_C \qquad \left[\frac{1}{mm}\right] \qquad [\,10\,]$$

4.2.2 Incertidumbre relativa de la escala base

Si lo que nos interesa es cuantificar la Incertidumbre relativa ***i***, dividiremos la Incertidumbre absoluta por el valor de lectura de la escala:

$$i_C = \frac{I_C}{X_C} = \frac{\ln 10}{L} \qquad [\,11\,]$$

- ***La Incertidumbre relativa de la Escala Base (C) de una regla de cálculo es constante y sólo depende, inversamente, de la longitud de la escala.***

4.2.3 Incertidumbre intrínseca de la escala de senos

Partiendo de la expresión de la escala de senos [6]:

$$X_S = \operatorname{arcsen}\left(10^{\frac{p}{L}-1}\right)$$

$$\frac{\partial X_S}{\partial p} = \frac{\partial \left(\operatorname{arcsen}\left(10^{\frac{p}{L}-1}\right)\right)}{\partial p} = \frac{1}{L} \cdot \frac{10^{\frac{p}{L}-1}}{\sqrt{1-\left(10^{\frac{p}{L}-1}\right)^2}} \cdot \ln 10$$

$$I_S = \frac{\ln 10}{L} \cdot \frac{10^{\frac{p}{L}-1}}{\sqrt{1-\left(10^{\frac{p}{L}-1}\right)^2}} \qquad \left[\frac{rad}{mm}\right] \qquad [\,12\,]$$

Más convenientemente, reemplazando **p** según [5], tendremos la incertidumbre en función del ángulo:

$$I_S = \frac{\ln 10}{L} \cdot \operatorname{tg} X_S \qquad \left[\frac{rad}{mm}\right] \qquad [13]$$

Lo que muestra a simple vista la tendencia a infinito de la incertidumbre de la escala de senos al acercarnos a 90º.

4.2.4 Incertidumbre intrínseca de escalas LogLog

Para la escala LogLog, se deduce de igual manera:

$$LL_2: (e^{0.1\,x}) \quad \rightarrow \quad I_{LL_3} = \frac{\ln 10}{L} \cdot 10^{\frac{P}{L}-1} \cdot e^{10^{\frac{P}{L}-1}}$$

$$LL_3: (e^{x}) \quad \rightarrow \quad I_{LL_3} = \frac{\ln 10}{L} \cdot 10^{\frac{P}{L}} \cdot e^{10^{\frac{P}{L}}}$$

Etc.

4.2.5 Gráficos de Incertidumbre de algunas escalas comunes

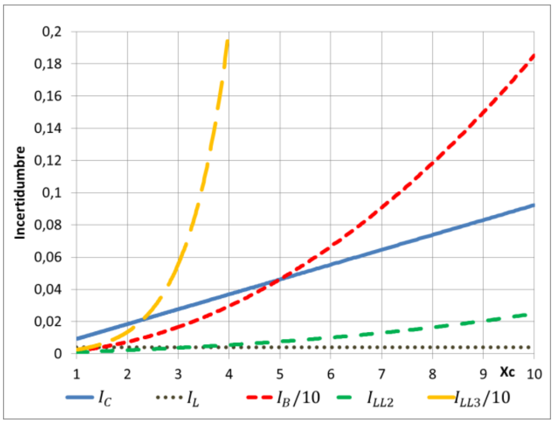

Figura 3. Incertidumbre escalas usuales

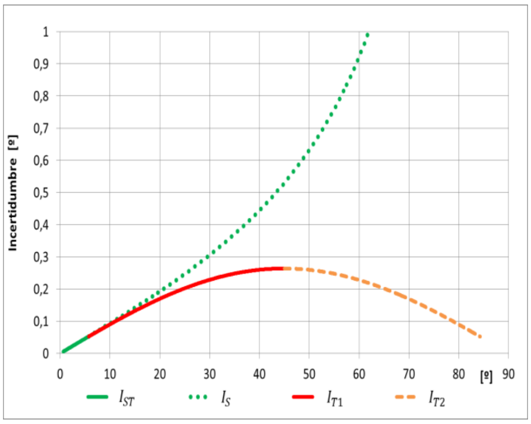

Figura 4. Incertidumbre escalas trigonométricas

En el gráfico de la incertidumbre absoluta, se aprecia la constancia de la escala logarítmica (que resulta lineal en la regla). También vemos la linealidad de la incertidumbre en la escala logarítmica base, C.

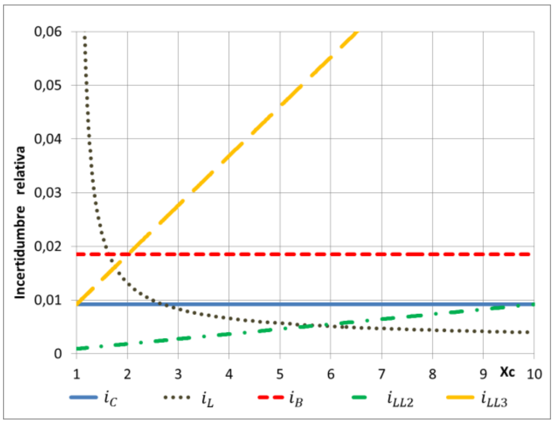

Figura 5. Incertidumbre relativa escalas usuales

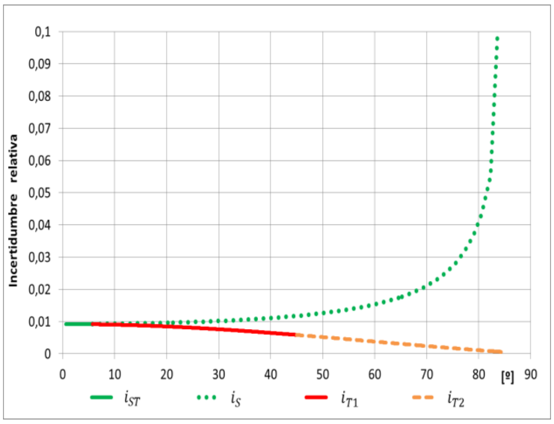

Figura 6. Incertidumbre relativa esc. trigonométricas

Observamos especialmente la ya señalada constancia de la incertidumbre relativa de las escalas logarítmicas; la base C, y la B que la duplica.

4.3 Incertidumbre Intrínseca de operaciones

De la misma manera que para las escalas, podemos elaborar un índice que valore cómo la RC propicia el error cuando se ejecuta una operación dada. En este caso la incertidumbre estará dada por las *estimaciones* sucesivas de valores en las escalas, en combinación con las operaciones realizadas, recordando que todas las incertidumbres son funciones de la posición dentro la escala.

4.3.1 Incertidumbre Intrínseca de operaciones unitarias

Este es el caso de operaciones directas, como ser hallar el cuadrado o la raíz de un número, o el seno de un ángulo.

Tomemos este último caso. Hallar el seno de un ángulo implica colocar el valor del ángulo en la escala S y luego leer el seno en la escala base. Por ende tendremos que combinar la incertidumbre de la escala S con la de la escala C.

Llamaremos I_{SC} a la Incertidumbre de la escala de Senos leídos en la escala C, y para encontrarlo proyectaremos la Incertidumbre de la escala S sobre la escala C y la sumaremos a la Incertidumbre propia de la escala C para la lectura. De igual manera encontraremos la Incertidumbre de la escala C leída en la escala S de senos, I_{CS} para el caso inverso de hallar un ángulo.

$$I_{SC} = I_S \cdot \frac{\partial X_C}{\partial X_S} + I_C \qquad y \qquad I_{CS} = I_C \cdot \frac{\partial X_S}{\partial X_C} + I_S$$

Reemplazando y operando veremos que los índices de incertidumbre tanto para leer senos, como para leer ángulos combinando ambas escalas son exactamente el doble de los índices sencillos de la escala de lectura. (En completa concordancia con el análisis geométrico de la acumulación de los errores de posicionamiento).

$$I_{SC} = 2\ I_C \qquad y \qquad I_{CS} = 2\ I_S$$

- ***La Incertidumbre intrínseca de una operación unitaria está dada sólo por la Incertidumbre de la escala de lectura multiplicada por dos.***

4.3.2 Incertidumbre Intrínseca de operaciones encadenadas

Veremos qué sucede con la incertidumbre al realizar operaciones matemáticas. En primera instancia lo haremos sobre la misma escala, para lo cual tomemos por caso una simple multiplicación $z = x \cdot y$. Tendremos dos elementos básicos en la Incertidumbre final: La Incertidumbre de la propia multiplicación dada por la colocación de los factores, y la Incertidumbre en la lectura del resultado.

$$I_M = I_{x.y} + I_z$$

$$I_M = \frac{\partial(x.y)}{\partial p} + I_z = y\,\frac{\partial x}{\partial p} + x\,\frac{\partial y}{\partial p} + I_z$$

Reemplazando x e y según [2]:

$$I_M = \left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right)\frac{\partial x}{\partial p} + \left(10^{\frac{p_X}{L}}\right)\frac{\partial y}{\partial p} + I_z$$

Al trabajar sobre la misma escala C/D, la función de Incertidumbre y su derivada, será la misma para las tres variables. Entonces reemplazando las derivadas:

$$I_M = \left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right)\frac{\ln 10}{L}\cdot\left(10^{\frac{p_X}{L}}\right) + \left(10^{\frac{p_X}{L}}\right)\frac{\ln 10}{L}\cdot\left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right) + I_z$$

$$I_M = \frac{\ln 10}{L}\left\{\left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right)\left(10^{\frac{p_X}{L}}\right) + \left(10^{\frac{p_X}{L}}\right)\left(10^{\frac{p_Y}{L}}\right)\right\} + I_z$$

$$I_M = 2\,\frac{\ln 10}{L}\left(10^{\frac{p_X + p_Y}{L}}\right) + I_z$$

Siendo $p_X + p_Y = p_Z$ por el funcionamiento de la RC al multiplicar dos valores (suma de sus segmentos logarítmicos) podemos escribir:

$$I_M = 2\,\frac{\ln 10}{L}\left(10^{\frac{p_Z}{L}}\right) + I_z = 2\,I_z + I_z$$

$$\mathbf{I_M = 3\,I_z}$$

- ***Por lo tanto, la Incertidumbre intrínseca de una multiplicación queda determinada únicamente por la Incertidumbre de la escala C/D en el punto de obtención del resultado, multiplicado por el número de estimaciones* (n).**
- ***En general, aunque intervengan escalas diferentes (como las escalas LL) la función Incertidumbre intrínseca de una operación estará dada por la Incertidumbre intrínseca de la escala de resultado* (I_E)*, multiplicada por la cantidad de estimaciones* (n).**

$$\mathbf{I_{Op}(p) = n \cdot I_E(p)} \qquad [\,14\,]$$

Habrá expresiones equivalentes en función de los valores $\mathbf{X_E}$ de la escala.

- ***Esta conclusión está en total concordancia con el análisis geométrico de los desplazamientos de la reglilla con sus correspondientes errores de posicionamiento.***

4.3.3 Incertidumbre de operaciones con transferencia

Para poder comparar métodos de cálculo en general, nos faltaría analizar los métodos que incluyen la lectura de un resultado intermedio en una escala y su recolocación en otra escala para continuar.

Estas operaciones, por su variedad, deben analizarse caso por caso. Entonces en este artículo desarrollaremos un caso a modo de ejemplo, y de paso analizaremos la conveniencia de dos métodos alternativos de realizar el mismo cálculo. Calcularemos con la RC:

$$z = \sqrt{a \cdot b}$$

Recordemos que las escalas A y B son idénticas entre sí, así como las C y D.

Método 1:

Multiplicar en las escalas de cuadrados A/B, y leer el resultado directamente en C.

+ Gran economía de estimaciones y movimientos.

\- Operar la multiplicación en escalas menos precisas.

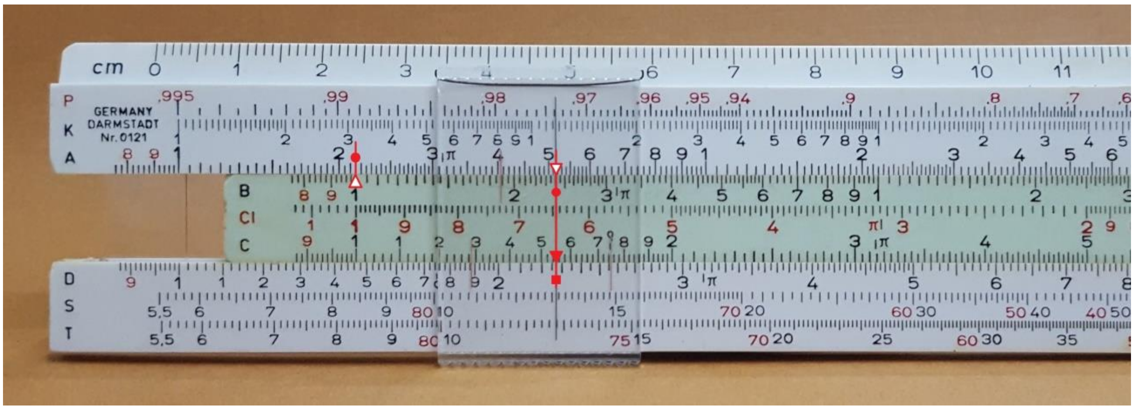

Figura 7.Método 1 : Raiz (2,15 x 2,40) = 2,27 (sin lectura del producto)

Método 2:

Multiplicar y leer el producto en las escalas C/D.

Luego colocar el producto en la escala de cuadrados A y leer el resultado en D.

+ Multiplicamos con mayor precisión.

- La lectura intermedia es incómoda, y podría empeorar la precisión.

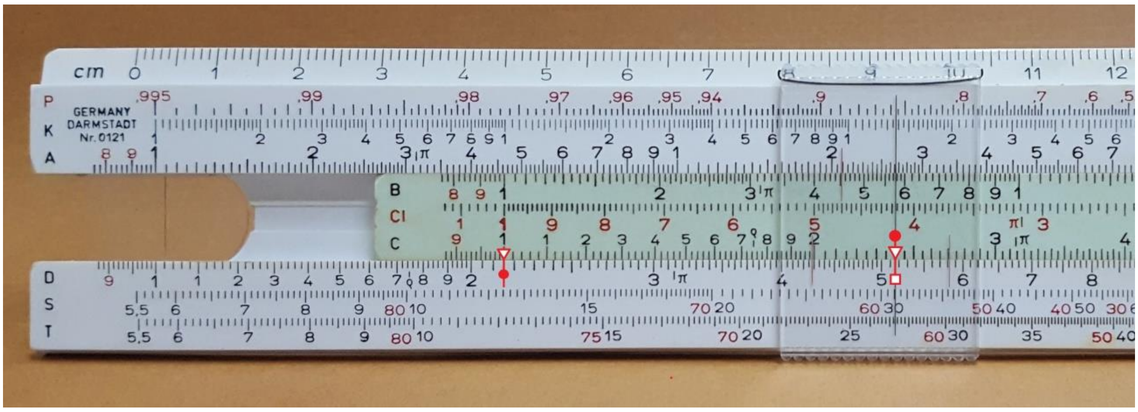

Figura 8.Método 2: Primer Paso, 2,15 x 2,40 = 5.16

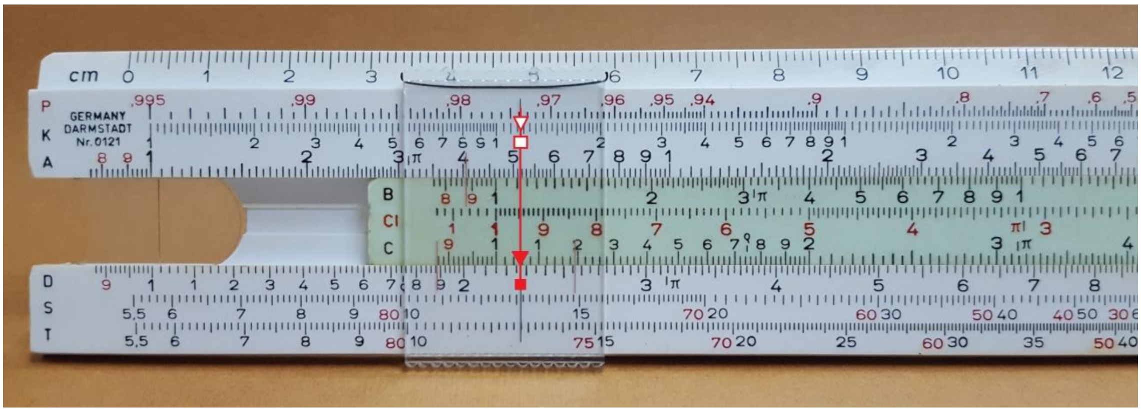

Figura 9.Método 2: Segundo Paso, Raiz (5,16) = 2,27

El método 1 es una sencilla operación encadenada que consta de 3 *estimaciones*, leyendo finalmente sobre la escala C. Su función de incertidumbre será según la expresión [14] ajustada para valores de escala y $n = 3$:

$$I_{M1}(X_C) = 3 \cdot I_C(X_C)$$

Reemplazando X_C=z (resultado final) en *[10*], resulta para el método 1:

$$I_{M1}(z) = 3 \cdot \frac{\ln 10}{L} \cdot z \qquad [\,15\,]$$

Para el método 2, primero tendremos que obtener la incertidumbre de la multiplicación en la escala C incluyendo la lectura. Esta incertidumbre se transfiere a la escala A y luego debemos propagarla sobre la escala C en su punto de aplicación. Y finalmente agregar la incertidumbre de la colocación del valor en A y de la lectura de la raíz en la escala C.

Para la multiplicación tendremos 3 estimaciones, y para la raíz tendremos 2. La proyección se hace sobre el punto X_C , y la función incertidumbre de la multiplicación se evalúa en X_C^2 . Entonces:

$$I_{M2}(X_C) = \frac{\partial X_C}{\partial X_A} \cdot 3\ I_C\left(X_C{}^2\right) + 2\ I_C(X_C)$$

Siendo: $$X_c = \sqrt{X_A} \qquad \text{y} \qquad I_C(X_C) = \frac{\ln 10}{L} \cdot X_C$$

$$I_{M2}(X_C) = \frac{\ln 10}{L} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{X_A}}\ X_C{}^2 + 2\ X_C\right)$$

$$I_{M2}(X_C) = \frac{\ln 10}{L} \cdot \left(\frac{3}{2}\ X_C + 2\ X_C\right)$$

$$I_{M2}(z) = 3.5 \cdot \frac{\ln 10}{L} \cdot z \qquad [\ 16\ ]$$

Comparando [15] y [16] quedan definitivamente zanjadas las subjetividades sobre cuál método es preferible. El **método 1**, además de ser más cómodo, rápido y seguro, también es algo más preciso (14%).

4.4 Incertidumbre Estadística de los cálculos

En todo lo hecho hasta aquí, consideramos incertidumbres máximas absolutas, lo cual en la práctica no sucede.

Para obtener un valor más realista de la incertidumbre, y del peso relativo del número de estimaciones sobre el mismo, se debe tener en cuenta el concepto estadístico del error. Por lo tanto la *estimación* de valores en la regla seguirá en cada caso una distribución normal centrada en el valor exacto, y el error en cada paso será en algunos casos aumentado y en otros reducido. (Suponiendo razonablemente que el operador no lee con sesgos)

El enfoque estadístico queda fuera del alcance de este texto, pero utilizando ciertas simplificaciones, podemos asumir que:

$$I_{Est} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (dx)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (dy)^2 + \ldots}$$

Operando llegamos a que en operaciones encadenadas, el factor a aplicar para encontrar la incertidumbre estadísticamente esperable será $\sqrt{\boldsymbol{n}}$ en lugar de $\boldsymbol{n}$. Tendremos entonces para un cálculo encadenado:

$$I_{Est} = \sqrt{n} \cdot I_E$$

Siendo **n** el número de estimaciones, e $\mathbf{I_E}$ la función de Incertidumbre intrínseca de la escala de lectura. Así, en la práctica se disminuye ligeramente la influencia de la cantidad de cálculos encadenados respecto de la incertidumbre final.

5. Evaluación comparativa de Escalas y Métodos

La Incertidumbre Intrínseca de escalas y métodos es una valoración objetiva que nos permite determinar la conveniencia en cuanto a su precisión posible, de un método de cálculo y sus escalas asociadas.

Haremos un ejemplo de evaluación de métodos y escalas para hallar senos de ángulos, y recíprocamente, usando los tres métodos más frecuentes encontrados en las RC: Con escalas S y C, con escalas S y P y con la menos usual escala trigonométrica diferencial de senos Sd y C.

5.1 Senos con escalas usuales (S y C)

Ya hemos visto la evaluación del procedimiento usando la escala S de senos (ángulos) estándar en 4.3.1.

Para facilitar la evaluación expresaremos la incertidumbre de la escala C [10] en función de X_S, recordando que $X_c = 10 \cdot \operatorname{sen} X_S$

$$\mathbf{I_C = \frac{\ln 10}{L} \cdot 10 \cdot sen\, X_S} \qquad [\ 17\ ]$$

5.2 Senos con escala pitagórica adicional (S y P)

La escala pitagórica expresa la función $\sqrt{1 - X^2}$. Por lo tanto, si colocamos en la escala C el valor correspondiente al coseno de un ángulo, obtendremos en P el valor del seno del mismo ángulo en virtud de la relación pitagórica. Esto es muy útil porque permite hallar con mayor precisión senos de ángulos grandes, para los cuales la precisión de la escala C decae mucho. Para hallar el seno de 70º por ejemplo, indicamos 30º en la escala de senos (ángulos), y luego leemos $\cos(30º) = \sin(70º)$ en la escala P.

Para la escala pitagórica, seguimos el mismo proceso que con las escalas anteriores, comenzando con la expresión de la escala P respecto de la escala C/D:

$$X_P = \sqrt{1 - \left(\frac{X_C}{10}\right)^2} \qquad \rightarrow \qquad X_C = 10\sqrt{1 - X_P^2}$$

La posición sobre la regla según [1] : $p = L \cdot \log X_C$

$$p = L \cdot \left(1 + \frac{\log\left(1 - X_P^2\right)}{2}\right)$$

$$X_P = \sqrt{1 - 10^{2 \cdot \left(\frac{p}{L} - 1\right)}}$$

$$I_P = \frac{\partial X_P}{\partial p} = \frac{-\ln 10}{L} \cdot \frac{10^{2 \cdot \left(\frac{p}{L} - 1\right)}}{\sqrt{1 - 10^{2 \cdot \left(\frac{p}{L} - 1\right)}}} \qquad [\ 18\ ]$$

Mejor expresarlo en función de X_C, que es según [2]: $X_C = 10^{\frac{P}{L}}$; y también podemos descartar el signo que no nos interesa.

$$I_P = \frac{\ln 10}{L} \cdot \frac{\left(\frac{X_C}{10}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{X_C}{10}\right)^2}} \qquad [\,19\,]$$

Todavía sería mejor, dado que comparamos la performance para la obtención de senos de ángulos, expresar $\mathbf{I_P}$ en función del ángulo complementario.

Siendo: $\frac{X_C}{10} = \operatorname{sen} X_S = \cos X_{comp}$

$$\mathbf{I_P = \frac{\ln 10}{L} \cdot \frac{\cos^2 X_{comp}}{\sin X_{comp}}} \qquad [\,20\,]$$

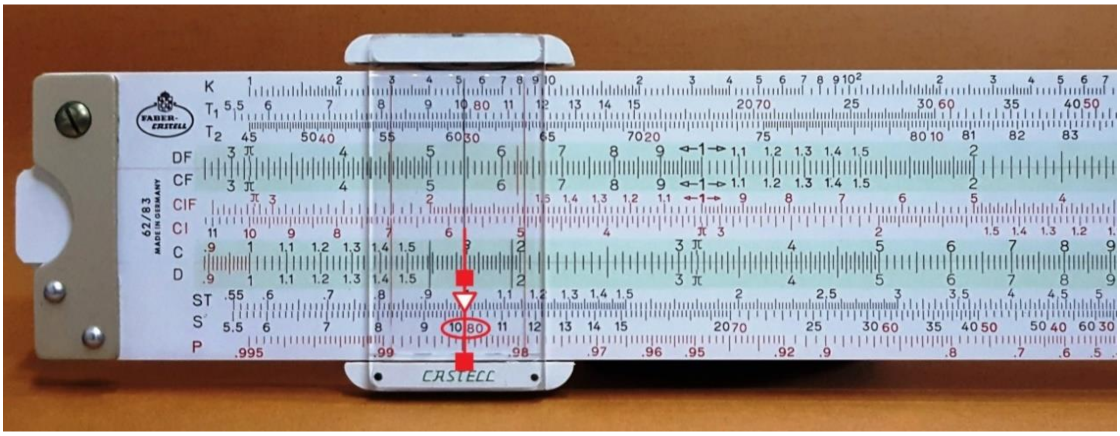

Figura 10. Escala Pitagórica: Seno(80º) = P(10º) = 0.9848

5.3 Senos con escalas trigonométricas diferenciales (Sd y C)

La escala diferencial de senos, se construye según la expresión:

$$Sd = \frac{X}{\operatorname{sen} X}$$

Luego, para obtener el seno de un ángulo, se despeja:

$$\mathbf{\operatorname{sen} x = \frac{X}{Sd}}$$

Siendo expresado **X** en grados sexagesimales.

Lo interesante del método es que la misma escala D se aprovecha de 1 a 9 con factor 10 para representar ángulos de 10º a 90º y simultáneamente de 1 a 10 para representar los senos de 0.1 a 1 (para la década base).

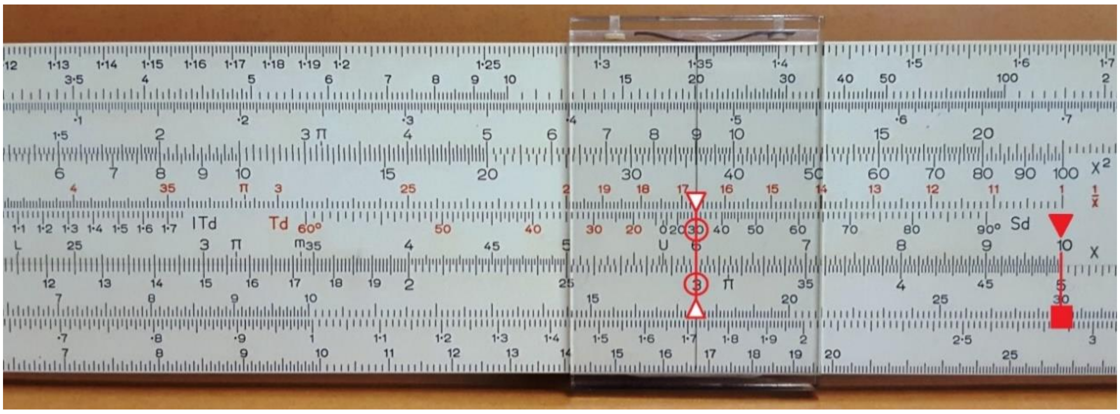

Figura 11. Escala de Senos Diferenciales: Seno(30º) = 0,5

Para operar, se coloca el ángulo en grados sobre D, luego se divide (resta de segmentos) por el valor en la escala Sd muy convenientemente colocada en la reglilla para facilidad operativa. Y finalmente se lee el sen X en la misma escala D sobre el índice de la reglilla.

Y ahora es dónde viene lo más práctico de nuestras conclusiones: Como hemos deducido en **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** , la incertidumbre intrínseca de una operación sin lecturas intermedias, sólo depende de la escala de lectura final, y no de la de colocación del ángulo. De esta forma **no necesitamos** preocuparnos de la incómoda función **Sd** para nada, sólo nos interesa la escala D ya estudiada. Usaremos pues la expresió*n* [17].

Sin embargo vemos que hay de por medio otra operación de colocación de valor en la escala Sd por lo que aquí **n** será igual a **3** en lugar de 2, empeorando potencialmente la precisión del valor obtenido.

5.4 Comparación de los tres métodos de obtención de Senos de ángulos

En el siguiente gráfico comparamos la Incertidumbre de los tres métodos: según [17] con $n = 2$ para S y con $n = 3$ para Sd, y según [20] con $n = 2$ para P.

En la Figura 12 vemos claramente que el método con escalas S y P se comporta mucho mejor para ángulos grandes que el método usual con las escalas S y C. Incluso globalmente logramos algo más de precisión para estos ángulos que para los ángulos pequeños…

La posición de equilibrio se alcanza exactamente para los 45º, ángulo a partir del cual es conveniente usar la escala P con el ángulo complementario

En relación con el método de trigonométricas diferenciales, vemos que la precisión alcanzable es menor que con las escalas tradicionales debido a la introducción de la operación de división (salvo el pequeño entorno entre 5.7º y 10º que se obtiene en la década anterior a la normal, resultando más preciso).

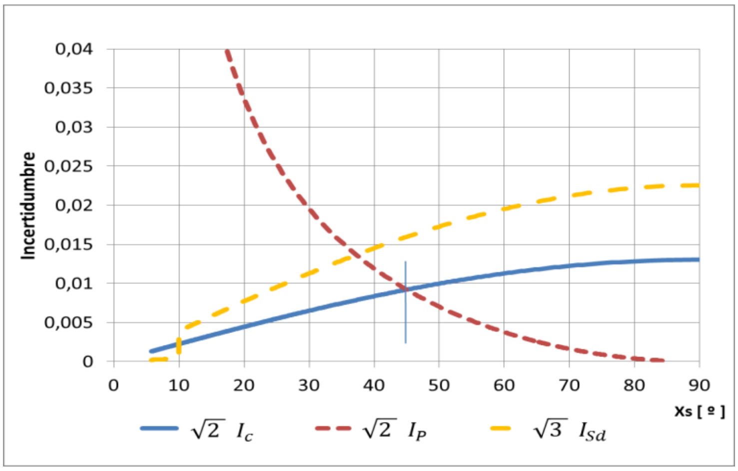

Figura 12. Incertidumbre estadística para hallar sen(x) por distintos métodos usuales.

5.5 Comparando métodos de obtención de ángulos dado su seno

Para el caso estándar, tenemos simplemente la función de incertidumbre de la escala S [13] con $n = 2$.

Para el cálculo con escala P, la ecuación y n serán los mismos, aplicada sobre los ángulos complementarios.

Para el cálculo con escala inversa Sd (ISd) , los ángulos se leen también sobre la escala C , por lo que corresponde evaluar la incertidumbre de la escala C transformada en escala de ángulos, y con $n = 3$.

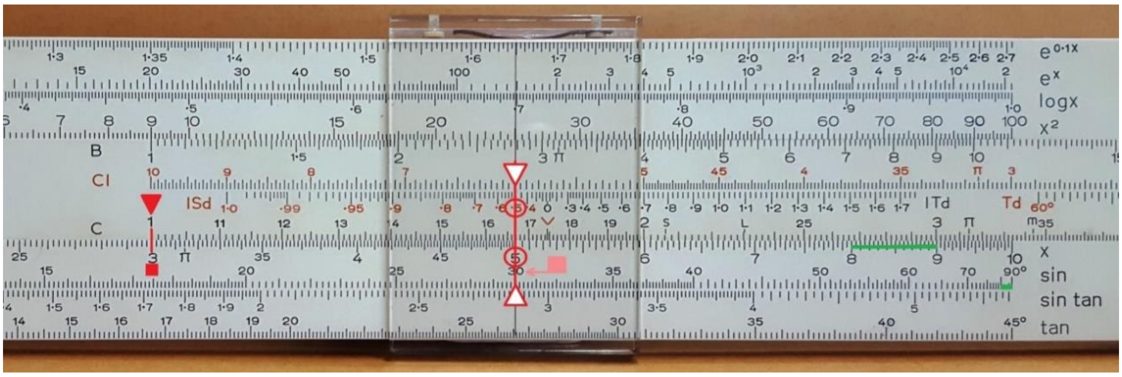

Figura 13. Escala Inversa de Senos Diferenciales: arcseno(0,5) = 30º

Operación: Con ayuda del cursor se alinea el valor del seno en la escala D y el mismo valor del seno en la escala ISd como en una división (resta de segmentos), el índice de la escala C apunta al ángulo sobre la escala D (multiplicar por 10 en esta década).

En la Figura 13. Escala ***Inversa de Senos Diferenciales: arcseno(0,5) = 30º***también observamos el ángulo 30º alineado con 0,5 en la escala S standard. La mayor incertidumbre de la escala S se ve muy claramente para el intervalo 80º - 90º en ambas escalas (marcados en verde).

Graficando la incertidumbre para los tres métodos, obtenemos la Figura 14

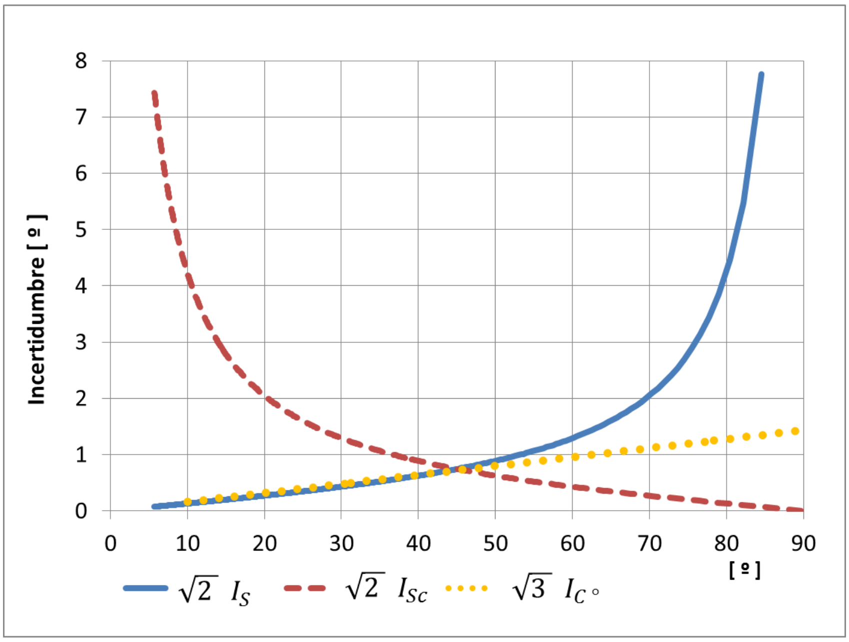

Figura 14. Incertidumbre estadística para hallar el arcoseno() por distintos métodos.

Vemos claramente que la menor alinealidad de la escala C por sí sola, permite al método de escala inversa de senos diferenciales, tener resultados mejores que una regla estándar al momento de hallar ángulos por sus senos. Especialmente para ángulos grandes, y a pesar de la penalización de un $n = 3$.

Sin embargo, siempre una regla con escalas S y P produce mejores resultados que las demás.

6. Conclusiones

El método de análisis de las escalas y operaciones a través de la incertidumbre intrínseca resulta muy útil para evaluar objetivamente la conveniencia de unas escalas y métodos sobre otros alternativos para mejorar la precisión. A su vez el método nos permitió demostrar algunos supuestos muy difundidos sobre las RC y rebatir otros con facilidad. Entre las conclusiones notables se destacan:

- La incertidumbre intrínseca es una función que varía a lo largo de la escala, y puede escribirse en función de la posición geométrica, de los valores de la escala, o de los valores de otra escala conveniente.
- La incertidumbre de una escala es inversamente proporcional a su longitud física.
- La incertidumbre relativa de una escala logarítmica es constante.
- La función incertidumbre máxima absoluta de una operación con RC sin lectura intermedia de valores está dada solamente por la **incertidumbre de la escala de lectura final**, multiplicada por la cantidad de ***estimaciones n***. Esta conclusión es vital

porque nos permite prescindir del análisis de incertidumbre de las escalas que no son las que usamos para leer el resultado.

- Esta función incertidumbre se evalúa simplemente en el punto de lectura del resultado final (teniendo en cuenta los cambios de década pertinentes).
- La incertidumbre estadística en cálculos complejos será menor a la máxima, y varía según el factor $\sqrt{\boldsymbol{n}}$.
- El número $\boldsymbol{n}$ de ***estimaciones*** suele ser un factor de gran influencia sobre la incertidumbre producida en cálculos complejos, por lo que es muy importante su reducción.
- Si la operación contiene lecturas intermedias, el cálculo de la incertidumbre total no es directo, y debe realizarse agregando la propagación clásica de incertidumbre a través de fórmulas, para los valores intermedios leídos y recolocados.
- La incidencia de las lecturas y colocaciones de valores intermedios en la incertidumbre de un cálculo complejo puede ser muy importante, y en general conviene que estas operaciones sean evitadas cuando sea posible.
- Queda suficientemente claro que las dificultades del problema de la precisión superan ampliamente la típica definición popular de **"tres dígitos significativos"**... Aunque por supuesto no queda invalidada como una rápida aproximación al promedio de precisión para una regla estándar.
- Conclusiones Operativas expuestas como ejemplo:
    - Las reglas con escala P son las más precisas para las funciones trigonométrisas directas e inversas.
    - Las reglas con escalas trigonométricas diferenciales mejoran la precisión de una regla típica con escala S para las funciones inversas, pero son prácticamente idénticas para las funciones directas.
    - Para operaciones como $z = \sqrt{a \cdot b}$ es algo más preciso multiplicar sobre las escalas cuadráticas A / B y leer la raiz en D.

7. Agradecimientos

Deseo agradecer al Ing. Santiago Higuera de Frutos por su estímulo y apoyo para la realización del presente artículo y su ayuda para la revisión y presentación del mismo. También quiero agradecer a los miembros de la agrupación ARC "Amigos de las reglas de cálculo", y especialmente a su fundador Jorge Fábregas Zazza por su inmensa y desinteresada tarea.

8. Lectura Introductoria

- HIGUERA DE FRUTOS, Santiago. *Reglas de Cálculo*, Revista "Pensamiento Matemático", Vol. VI, Núm. 2, Octubre, 2016.

- http://www.reglasdecalculo.com : Web de Jorge Fábregas Zazza donde se expone su vasta colección de reglas de cálculo y manuales en español, y cantidad de recursos útiles y links para interesados y coleccionistas, particularmente un cursillo introductorio sobre su uso en: http://www.reglasdecalculo.com/teoriaypractica.htm.

Referencias

[1] TAYLOR, John Robert. *An introduction to error analysis 2nd. edition,* caps. 3 y 5, University Science Books, California, 1997.

[2] LINDBERG, Vern. *Uncertainties and error propagation*, https://goo.gl/zz0QuJ

Sobre el autor:
Nombre: Jorge Luis Victoria
Correo Electrónico: jorge.luis.victoria.rico@gmail.com
Profesión: Profesional Autónomo.