Experiencias Docentes

Creatividad y aprendizaje cooperativo: un pequeño estudio

Creativity and Cooperative Learning: a little study

Susana Merchán Rubira y José Samuel Rodríguez García

Revista de Investigación

Volumen VI, Número 2, pp. 063–082, ISSN 2174-0410
Recepción: 19 May'16; Aceptación: 1 Jun'16

1 de octubre de 2016

Resumen

En el presente trabajo se pretende analizar la relación del aprendizaje cooperativo con una serie de factores de importancia en el estudio de las matemáticas; en particular con el ámbito de la creatividad. También se ha considerado la capacidad de razonamiento lógico-matemático, la habilidad de realizar juicios críticos y de comunicarlos. Se ha diseñado y conducido un pequeño estudio con dos pruebas, una individual y otra grupal. Dichas pruebas se han pasado a cinco grupos de distinta naturaleza: cuatro de ellos de 4º de ESO, uno de los cuales tiene el aprendizaje cooperativo como metodología base en el centro, los otros tres pertenecientes a dos centros públicos. El quinto es un grupo de 1º de Bachillerato y pertenece a un centro de excelencia.

A través de ambas pruebas se ha pretendido analizar la incidencia del aprendizaje cooperativo en las habilidades creativas y comunicativas de los alumnos de los últimos cursos de secundaria. Los resultados parecen indicar una mayor capacidad matemática, de resolución de problemas y de juicio crítico en los alumnos formados bajo el aprendizaje cooperativo que en aquellos pertenecientes al sistema individualista, pero sin superar los resultados de los alumnos del Bachillerato de excelencia, en lo que a competencias individuales se refiere. Sin embargo, los alumnos del aprendizaje cooperativo desbancan a todos los grupos en el desempeño grupal, y obtienen puntuaciones en relación a la creatividad superiores al resto de grupos, a excepción del grupo de excelencia de un curso superior.

Palabras Clave: Aprendizaje cooperativo, Enseñanza Secundaria, razonamiento matemático, motivación, creatividad, comunicación.

Abstract

This Study is aimed to analyze the links between Cooperative Learning and a set of relevant skills for the study of maths, and specifically Creativity. But it also analyzes the ability to think logically and mathematically, as well as to make critical judgments and communicate them. Two tests (one individual and another for a group) had been designed and conducted in five different groups, four of them from 4th year of secondary education, of which one is under cooperative learning, and the fifth from the first year of Baccalaureate, from the school of excellence.

The results points to a higher ability to mathematical thinking, problem solving and critical judgment in the cooperative students than the others, but the excellence ones, in individual skills. However the cooperative students perform significantly better than any other in the group test. Furthermore, in creativity they score above the other groups, expect the excellence one.

Keywords: Cooperative Learning, problem solving, Middle Education, mathematical thinking, motivation, creativity, communication.

1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas es una cuestión clave en la educación secundaria obligatoria. En el Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato se describe lo siguiente en relación a las matemáticas y a la creatividad (página 407):

> *"Las matemáticas constituyen una forma de mirar e interpretar el mundo que nos rodea, **reflejan la capacidad creativa**, expresan con precisión conceptos y argumentos, favorecen la capacidad para aprender a aprender y contienen elementos de gran belleza."*

Parece interesante ahondar más en el tema de la creatividad y las matemáticas impartidas en la educación secundaria en España. En este trabajo hemos querido relacionar dicho aspecto con la metodología del **aprendizaje cooperativo** (**AC** indistintamente). En las últimas décadas se ha estudiado en profundidad esta metodología y su influencia en los resultados académicos de los alumnos en secundaria. Thousand, Villa & Nevin en [15] analizan en conjunto más de 875 estudios conducidos durante los últimos 90 años, que evidencian estadísticamente las ventajas del AC frente a los enfoques competitivo e individualista. Hay que indicar que nos referimos a los logros académicos. Además, los estudios muestran un nivel más alto en la capacidad de razonamiento, una más frecuente producción de ideas y soluciones novedosas o distintas (concepto relacionado directamente con la creatividad) y una mayor capacidad de extrapolación en la metodología cooperativa que en las competitiva e individualista.

Es importante precisar lo que se va a entender en este trabajo por **creatividad**. En este aspecto, usaremos la definición de **Sir Ken Robinson** (educador y experto en creatividad) al respecto:

> *"The process of having original ideas that have value."*

Esto es, "el proceso de tener ideas originales que tengan valor". Ken Robinson responde también a la pregunta: ¿Por qué es importante la creatividad en la educación? A través de tres claves:

- La falsa asunción de que la vida es lineal y, por lo tanto, predecible. Ante un futuro impredecible, la **creatividad** se torna indispensable para dar respuestas a los problemas que están por venir.

- La importancia de la creatividad en los aspectos económicos y empresariales como muestra el estudio conducido por IBM: *Capitalizing on Complexity, Insights from the Global Chieff Executive Officer Study* ([4]) en el que se entrevista cara a cara a más de 1500 directores generales, los cuales identifican la **creatividad** como la competencia individual más importante para las empresas en su búsqueda de un camino a través de la creciente complejidad.

– A nivel personal, para que los individuos puedan realizarse a través de sus propios propósitos que deben descubrir por ellos mismos. Sir Robinson concluye que el desarrollo de la **creatividad** no es opcional sino necesario.

Es importante señalar que, en el campo de las matemáticas, las tres claves dadas por Ken Robinson se evidencian y, relacionando estas ideas con la educación en matemáticas, hay un hilo conductor ineludible que es la **resolución de problemas**. La importancia de este concepto está completamente aceptada en un aspecto teórico y así lo refleja el Boletín Oficial del Estado (página 408):

> *"La **resolución de problemas** y los proyectos de investigación constituyen ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que **resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad** y el pensamiento lógico. En este proceso de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias…Partiendo de los hechos concretos hasta lograr alcanzar otros más abstractos, la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas permite al alumnado adquirir los conocimientos matemáticos, familiarizarse con el contexto de aplicación de los mismos y **desarrollar procedimientos para la resolución de problemas**."*

Sin embargo, esto está mucho más presente en el papel que en el aula. Normalmente, el docente de secundaria se encuentra con una población que viene predispuesta negativamente hacia las matemáticas, entendiendo éstas como un conjunto de algoritmos y procedimientos que han aprendido a repetir tediosamente, sin una comprensión más profunda, y que parecen tener sentido únicamente dentro del bloque del curso en el que se explican y aplican.

Por todos estos motivos parece pertinente estudiar el estado de la creatividad (así como su relación con otros procesos de pensamiento matemático) en diferentes grupos con metodología estándar y compararlos con grupos en los que la metodología base es el AC, con el fin de encontrar soluciones a los problemas previamente presentados.

2. Antecedentes

2.1. Creatividad

Como se ha comentado anteriormente, la referencia fundamental tomada en este trabajo sobre el concepto de creatividad y su papel en la educación será Sir Ken Robinson, claramente expuesta en su famosa TED Talk *"How Schools Kill Creativity"* que se ha convertido en la charla más reproducida de la historia de las TED Talks.

Adentrándonos en el concepto de creatividad, ésta ha tendido a entenderse como algo propio de genios, y fuera del alcance de la mayoría. Si bien la mayoría de los profesores creen que la creatividad se puede desarrollar, aproximadamente tres cuartas partes lo consideran un don inusual ([1]).

Este enfoque ha sido el dominante en cuanto a la interpretación de la creatividad también en matemáticas. Un ejemplo claro de esto es la teoría de las cuatro etapas de Hadamard ([3]), donde se describen las cuatro etapas del *Insight:* preparación, incubación, iluminación y verificación. Es importante diferenciar entre este proceso de construcción de nuevas teorías a través del Insight de lo que se entiende en este trabajo por *creatividad*; un proceso mucho más común, propio de todos los individuos y no solo de los genios. Para entender bien esta diferencia hay que indicar que no nos circunscribiremos tan solo al proceso de producir ideas que sean novedosas a escala global, sino que nos centraremos en el proceso de construcción del conocimiento de los individuos involucrados en el proceso educativo.

De esta manera, la creatividad está mucho más presente en el día a día del docente y es la piedra angular del *aprendizaje por descubrimiento.* En concreto, las matemáticas son la rama del conocimiento que mejor se presta a este modelo, dada su propia naturaleza.

Por otra parte, y como indica Edward A. Silver ([14]), la creatividad se puede enseñar y aprender en la educación generalista. Las técnicas discutidas en su artículo han sido usadas con éxito por estudiantes a lo largo de todo el mundo, lo que sustenta la idea de que la instrucción matemática enriquecida por la creatividad puede ser usada para incrementar la fluidez y flexibilidad representativa y estratégica, así como la apreciación de los problemas, métodos de resolución y soluciones novedosas.

Tanto este autor norteamericano como el finés Erkki Pehkonen ([8]) indican que el camino principal para desarrollar la creatividad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es el de la resolución de problemas.

Es importante señalar lo que concluye la encuesta *"Teacher's view about creativity" (Marilyn Fryer & John A. Collings,* [1]) en relación a la principal característica de los profesores fuertemente orientados a la creatividad, esto es, su preferencia por el aprendizaje centrado en el alumno. Pero, ¿cómo centrar el aprendizaje en el alumno cuando éste es un objeto pasivo en el común método de enseñanza basado en las clases magistrales? Esta última idea motiva el siguiente apartado en el que nos centramos en la metodología del aprendizaje cooperativo.

2.2. Aprendizaje cooperativo

2.2.1. 9 Claves del aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo no es únicamente una metodología de trabajo sino un compendio de principios o bases que se centran en la *igualdad, creatividad, autoestima* y *cooperación*. Más concretamente, en [6] se afirma que:

> *"El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás."*

Pere Pujolàs en [9] resume las 9 ideas clave del Aprendizaje cooperativo:

1. <u>Escuelas inclusivas.</u> Pujolàs defiende una escuela en la que cabe todo tipo de alumnado,

argumentando que el grupo-clase se enriquece con cada alumno. Además, propone que sea la escuela la que se adapte a cada alumno y no al contrario.

2. Heterogeneidad del grupo. Homogeneizar los grupos en las escuelas (dividiéndolos en los que tienen mejor o peor rendimiento académico, los que *merecen* una educación bilingüe y los que no, etc.) puede abrir más la brecha de la diferencia en la sociedad y, al contrario de lo que se puede pensar, puede limitar también el aprendizaje, no sólo porque el profesorado puede tender a la desmotivación ante ciertos grupos, sino porque la clave para aprender es poder enseñar y comunicar a otros los conocimientos adquiridos.

3. Aprendizaje cooperativo. Pujolàs plantea el aprendizaje cooperativo no sólo como una metodología de trabajo sino como una filosofía que requiere modificar la estructura de enseñanza-aprendizaje.

4. Importancia de la cohesión en grupo. Una de las claves para el aprendizaje cooperativo es la estructuración de los llamados *equipos base.* Resulta complicado formar los grupos que van a trabajar juntos en el aula y ello requiere un conocimiento previo del alumnado, a través de sociogramas y estudios de grupo.

5. Estructuras cooperativas. Pere Pujolàs profundiza en la importancia de que el alumnado comprenda que esta estructuración es en su beneficio, y que la heterogeneidad en los grupos resulta imprescindible.

6. El aprendizaje cooperativo como contenido. Adoptar una nueva metodología en la enseñanza no es un proceso rápido y requiere una profundización teórica en él y un conocimiento previo.

7. Aprendizaje cooperativo y competencias básicas. Pujolàs recalca que el aprendizaje cooperativo es una herramienta para potenciar algunas habilidades sociales y de comunicación en los alumnos. Además, esta metodología desarrolla estas competencias de manera integral y práctica a través del cooperativismo.

8. El grado de cooperación. En comparación con la organización competitiva o individualista, el aprendizaje cooperativo y su resultado depende de la cooperación entre la clase y el tiempo dedicado a ello. Trabajar correctamente en grupo requiere tiempo y dedicación por eso es importante que la metodología se suceda de manera continuada y desde etapas tempranas en la educación del alumnado.

9. El aprendizaje cooperativo y las finalidades en educación. Esta metodología de trabajo no solo pretende cumplir objetivos académicos, sino también proveer a los alumnos de capacidades y habilidades. El diálogo es la base de la comunicación, del consenso y de la convivencia, y debería ser un objetivo claro en la educación.

2.2.2. Puesta en práctica

Algunas de las claves para la puesta en práctica en clase de esta metodología las dieron los hermanos Johnson junto con E.J. Holubec en [6]. Además, en el *Colegio Ártica*, colegio concertado de la Comunidad de Madrid y referente nacional del aprendizaje cooperativo en el que se ha llevado a cabo parte de este estudio, tienen un *Programa para la implantación de estructuras de cooperación en el centro,* en el que explican paso a paso las bases de la puesta en práctica de esta metodología.

La conformación de los grupos

Los grupos suelen estar formados por 4 componentes, ya que el grado de diversidad que ofrecen es suficiente para beneficiarse de las ventajas que esto conlleva, y, además, los grupos no son así demasiado grandes y es factible controlarlos y organizarlos. Esta conformación permite incluir roles de trabajo para cada componente y, además, es posible subdividir los grupos en parejas.

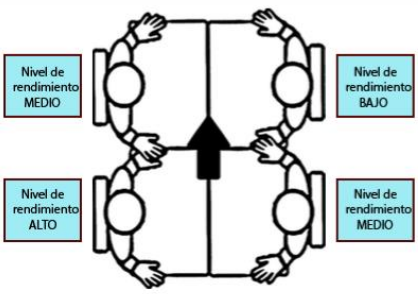
La organización de dichos equipos suele ser heterogénea ya que los grupos con componentes de distintos rendimientos y capacidades dan a los alumnos otras perspectivas y métodos de resolución de problemas. La manera de formar los grupos es la siguiente:

Se identifica en clase a una cuarta parte de los alumnos que sean capaces de *prestar ayuda*, esta identificación no se basa únicamente en las notas de los alumnos, también en su capacidad de liderazgo y de comunicación. Se identifica también a otra cuarta parte de alumnos que *necesiten ser ayudados* (con rendimiento menor).

En cada grupo habrá un alumno capaz de prestar ayuda y otro necesitado de la misma. Los grupos se completarán con los alumnos ”medios”. Los grupos pueden ajustarse por distintas necesidades del aula: alumnos conflictivos junto con alumnos responsables que son capaces de controlarlos, separar “amigos” que pueden tender a desconcentrarse trabajando juntos, etc.

El lugar que ocupa cada componente dentro del grupo

Para que cada alumno tenga una tarea dentro del grupo es importante que el componente más “capaz” de prestar ayuda y el que más lo “necesita” no se sienten al lado ni tampoco enfrente. De esa manera, la estructura es la siguiente: uno de los alumnos medios se sentará enfrente del alumno con alto rendimiento, al lado de éste se sentará el otro alumno medio y enfrente de él estará el alumno de menor rendimiento.



3. Estudio

3.1. Participantes

Para este pequeño estudio se han seleccionado tres centros en la Comunidad de Madrid.

El **I.E.S Clara Campoamor**, instituto público situado en Móstoles, al sur de Madrid. Se trata de un centro ubicado en una región con un nivel socio - económico medio-bajo, con una gran diversidad en el alumnado. Existe una clara diferenciación entre los dos grupos de este centro.

Por un lado se tiene un grupo estándar de 4º de la ESO de 27 alumnos (al que nos referiremos como *grupo básico*), donde el perfil del alumnado viene determinado por los criterios usuales geográficos. Este es el único grupo que no incluye ningún sesgo más allá de la naturaleza del propio centro y sus condiciones, por lo que podemos considerarlo como un grupo común.

El otro grupo de este centro en el que se ha llevado a cabo la prueba es un grupo de la asignatura de Ampliación de Matemáticas, lo que implica que los alumnos participantes en este grupo (al que denominaremos grupo de *ampliación*) han elegido voluntariamente ampliar su horario de matemáticas y por lo tanto es de esperar que cuenten con una predisposición positiva de cara a la materia. Se trata de un grupo reducido (16 alumnos) de 4º de la ESO, que, como se indica contiene un sesgo positivo respecto a las capacidades matemáticas, o al menos su actitud hacia ellas. http://ies.claracampoamor.mostoles.educa.madrid.org/

El **I.E.S. Gerardo Diego**, instituto público ubicado en Pozuelo de Alarcón, al oeste de Madrid. Por su ubicación, este centro cuenta con un nivel socio-económico medio-alto. Este grupo se puede considerar análogo al grupo básico del I.E.S. Clara Campoamor, con la clara diferencia de su ubicación geográfica y las implicaciones económicas que esto conlleva. A parte de este factor (en absoluto despreciable), no existe otra diferenciación concreta con el grupo denominado *básico.* http://ies.gerardodiego.pozuelodealarcon.educa.madrid.org/

El colegio concertado **Ártica**, ubicado en el PAU de Carabanchel, de la cooperativa de enseñanza José Ramón Otero. Se trata de un centro referente en lo que se refiere al aprendizaje cooperativo, ya que es uno de los pocos que llevan aplicando esta metodología a todos los alumnos desde primaria hasta 4º de la ESO desde hace suficiente tiempo como para que la mayoría de los alumnos de este último curso de la educación obligatoria hayan desarrollado la mayor parte de su formación (o toda) bajo el modelo del AC. Cabe destacar que dados los principios del centro respecto a la educación inclusiva, así como su localización, el alumnado del centro es heterogéneo y no seleccionado. http://www.jrotero.org/index.php/artica

El **I.E.S. San Mateo**. Un centro público que solo cuenta con Bachillerato. Es un centro de excelencia (el único en la Comunidad de Madrid), lo que supone una diferencia clara con los grupos anteriores. Los alumnos que han participado en el estudio son de 1º de Bachillerato, y han sido aceptados en el centro de excelencia, lo que implica que contaban con los requisitos para presentarse a las pruebas de los Premios Extraordinarios de la Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad de Madrid, esto es, habían obtenido una nota igual o superior a 8 en la convocatoria de Junio de 4º de ESO en las asignaturas de Lengua y Literatura, Primera Lengua Extranjera, Ciencias Sociales y Matemáticas, así como una nota superior o igual a 7 en las pruebas CDI de 3º de ESO. http://www.educa2.madrid.org/web/centro.ies.sanmateo.madrid

3.2. Estructura y diseño de las pruebas

Para este estudio se ha diseñado un conjunto de ejercicios orientados a evaluar no solo la creatividad, sino también la capacidades de: razonamiento lógico-matemático, resolución de problemas, comunicación y toma de decisiones a nivel grupal y el análisis crítico.

Estos ejercicios están estructurados en dos pruebas; una individual y otra grupal: En la individual se pretende analizar la creatividad a través de un ejercicio consistente en la creación de un enunciado alternativo y original para un problema dado.

La prueba grupal consta de tres problemas diseñados para estimar la capacidad de usar el razonamiento lógico para sobreponerse a la intuición, así como la habilidad para investigar críticamente y tomar decisiones con consenso.

3.2.1. Prueba individual

Ejercicio individual:

***Problema**- Se tiene la siguiente resolución de un problema:*

$$\begin{cases} 3x+5y=18 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 *y la segunda por* (−3) *se tiene:*

$$\begin{cases} 6x+10y=36 \\ -6x-9y=-33 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$y=36-33$$

$$y=3$$

Y

$$2x+3(3)=11$$

$$2x=2$$

$$x=1$$

Solución: $x=1$ *e* $y=3$

Un posible enunciado de la anterior resolución sería:

Ayer compré 3 *kilos de naranjas y* 5 *kilos de nueces en el mercado, pagué por ambas cosas* 18 *euros. Hoy he comprado* 2 *kilos de naranjas y* 3 *de nueces por* 11*. ¿A cuánto está el kilo de naranjas y a cuánto el de nueces?*

Otro ejemplo de enunciado podría ser:

Homer, Carl, Mou, Lenny y Barnie llevaron a Bart, Lisa y Millhouse al Monte Rushmore, pagaron de entrada un total de dieciocho dólares. Nelson y Ralph fueron otro día a hacer la misma visita con la madre de Nelson y los padres de Ralph y pagaron once dólares. Sabiendo que las entradas de adulto y de niño no cuestan lo mismo, ¿Cuánto cuesta cada entrada?

Escribe otro posible enunciado, trata de ser lo más original y creativo que puedas:

Este ejercicio está especialmente diseñado para evaluar la creatividad, por tanto su medición no ha sido sencilla. Para la misma se han catalogado una serie de elementos que se pasan a detallar a continuación:

Diferente estructura: En los dos enunciados hay dos estructuras a la hora de exponerlo; kilos en los coeficientes, precio en las variables y cómputo de dos productos y dos compras en el primero, e individuos por edad como "coeficientes", tarifas por edad como variables y de nuevo dos situaciones análogas. Se considera que hay una estructura distinta cuando no se puede enmarcar en ninguna de estas dos.

Diferente temática: Se han considerado las temáticas de "compra" y "entradas" (bien sea para cine, evento, espectáculo, parque de atracciones, etc...). El valor 1 se asigna cuando la temática es otra.

Diferente Uds (X, Y): Si las unidades determinadas para las variables son distintas de las de los enunciados dados (€/kg o tarifa adulto/niño) se concede un punto en esta categoría.

Diferente Uds (b): Si las unidades del término independiente no son euros se ha valorado con un punto, pudiendo ser otra moneda.

Inventa algo nuevo: Cuando el estudiante ha añadido algo inventado se obtiene este punto.

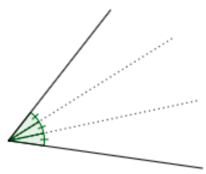
Extras: En el caso de que el alumno haya añadido algo más, como otra ecuación escondida dando un término independiente en función del otro, o hace 2 enunciados, o contextualiza más extensamente o utiliza otros elementos claramente diferenciadores no reflejados previamente también se le asigna un punto.

Correcto: En el caso de que el enunciado contuviese errores se ha asignado un cero a esta categoría y 1 en caso contrario. Esta variable se ha usado como multiplicador de la puntuación total, obtenida como suma de las cinco categorías anteriores, de manera que un ejercicio muy creativo pero incorrecto tiene una valoración de cero.

3.2.2. Prueba grupal

El primer ejercicio grupal alude a un resultado conocido como Teorema de Morley:

Ejercicio 1*- Dado un triángulo cualquiera con la ayuda de dos rectas se divide cada ángulo en tres partes iguales como se indica en el dibujo:*



Cada recta se intersecará con otra recta proveniente de un ángulo adyacente. Dichas intersecciones serán los tres vértices de un nuevo triángulo. Este triángulo será:

A. Semejante al original *B. Rectángulo*

C. Equilátero *D. Otro*

En este ejercicio no se espera de los alumnos que obtengan una solución rigurosa matemática en el tiempo establecido, si no que pongan en juego su capacidad de investigación y de toma de decisiones en grupo.

Segundo ejercicio grupal:

Ejercicio 2- *En un concurso televisivo el concursante debe elegir una caja de entre 5 posibles. Dos de ellas contienen premio y las otras 3 están vacías. El concursante elige una de las cajas pero antes de abrirla el presentador descubre una de las cajas que están vacías. Se le da la opción al concursante de cambiar la caja que había elegido inicialmente* *por alguna de las tres que quedan. ¿Qué es mejor?*

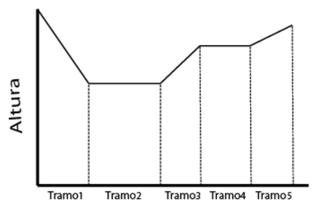
A. Cambiar de caja *B. Da igual*

C. Quedarse con la caja inicial *D. Ninguna de las anteriores*

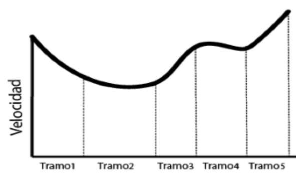
Este ejercicio es una variación análoga del famoso problema de *Monty-Hall*. Conociendo las dificultades de aceptación de la solución de este problema, el objetivo es evaluar la capacidad de los alumnos que entiendan la solución correcta de convencer al resto, a través de la comunicación de razonamientos matemáticos.

Tercer ejercicio grupal:

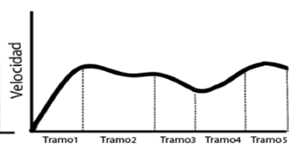
Ejercicio 3- *La siguiente gráfica representa el perfil de la ruta de un ciclista (las subidas y bajadas del terreno que recorre):*



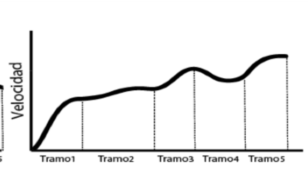
Teniendo en cuenta la gráfica anterior, ¿cuál de las siguientes puede representar la velocidad del ciclista?



A



B



C

D) Ninguna de las anteriores

De las opciones que se dan en esta actividad, la primera es claramente errónea, y está diseñada como un filtro para detectar deficiencias importantes de razonamiento. La siguiente peor opción, la C no es buena pues sus tres tramos finales se comportan de manera poco o nada coherente con la situación.

La opción B estaba diseñada como la correcta, sin embargo contiene errores "menores" que varios alumnos advirtieron, como que en el quinto tramo, pese a haber una pendiente positiva, la velocidad alcanzada es igual o mayor a la que se obtiene en el prolongado descenso.

4. Resultados

4.1. Ejercicio individual

A continuación se muestra la figura 1 con el porcentaje por categoría y grupo de los alumnos que han obtenido cada punto (de entre los correctos):

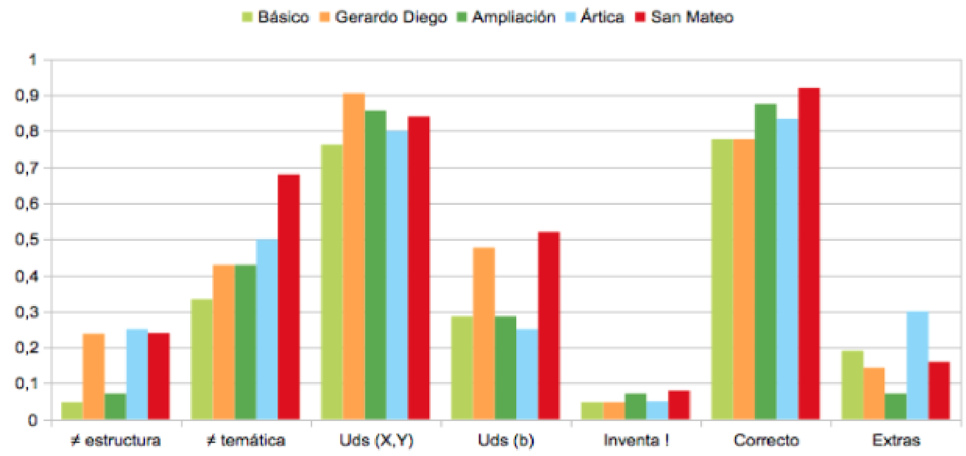


Figura 1

Es interesante destacar que no hay diferencias significativas entre grupos en cuanto al porcentaje de alumnos que cambia las unidades de las variables (entorno al 80% con diferencias que no superan el 15%) ni en la sección de "Inventa algo nuevo" donde ningún grupo alcanza el 10% (5-8%). Donde sí se aprecian diferencias claras es en aquellos que modifican las estructura (menos del 10% en los grupos del I.E.S. Clara Campoamor, más de 20% en el resto). Es reseñable también que mientras que, aproximadamente, la mitad de los alumnos del **San Mateo** y **Gerardo Diego** modifican la unidad del término independiente ninguno de los otros grupos alcanza el 30%, no existiendo apenas diferencias entre ellos.

Es importante también indicar que ha habido un caso especial en el que un alumno creaba un enunciado distinto, pero cambiaba también el sistema de ecuaciones generando uno propio. Se podría entender este caso como incorrecto, pues no responde exactamente a lo que se pedía (dar otro enunciado para el mismo problema), sin embargo ha hecho un ejercicio de creatividad extra al crear un problema totalmente nuevo. No se le ha concedido el punto "extra" pero sí se ha considerado correcto, pues lo que se evalúa en el apartado "Correcto" es que el problema se pueda resolver coherentemente (el alumno ha incluido también una resolución de su problema perfectamente válida).

4.2. Ejercicios grupales

Primer ejercicio:

Puede tratarse del ejercicio más difícil si se intenta resolver analíticamente o más en general, de manera rigurosa. El alumno más capacitado para este tipo de ejercicios (habitual de concursos de primavera y otros concursos de talento matemático) del instituto **San Mateo**, trató de demostrar el resultado, no siendo capaz en el tiempo dado. Sin embargo, ningún grupo del **San Mateo** hizo una exploración a través de varios dibujos con triángulos notablemente distintos, lo que podría haber sido de ayuda. Los resultados en este ejercicio quizás sean los más sorprendentes de todo el estudio, se muestran en la figura 2. Estos datos se muestran en porcentaje sobre el total de cada grupo y no están filtrados en base a la justificación, pues no se espera que los alumnos den un razonamiento riguroso para defender su elección, tan solo que logren consenso en la opción que consideren más plausible.

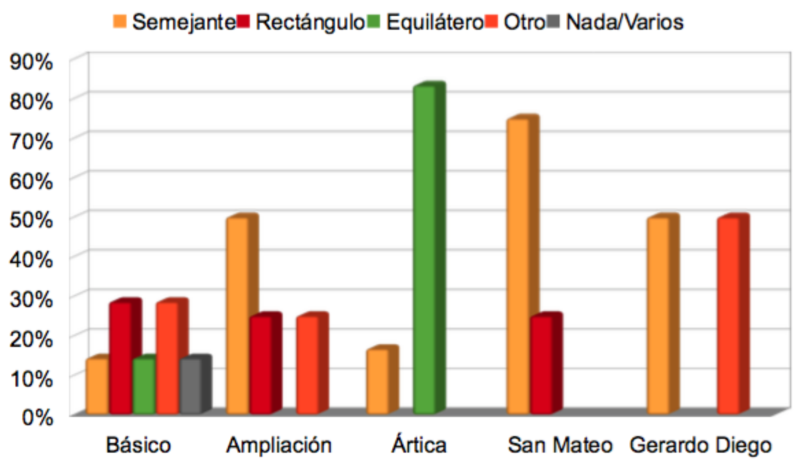


Figura 2

Dentro del grupo **Básico** aquellos que eligieron las opciones A, C y "ninguna" no dieron ninguna razón. De los dos que apuntaban a la opción B uno afirmaba haberlo medido y otro tampoco daba explicación. Entre los que optaron por la opción D, un subgrupo afirma que el triángulo debe ser isósceles mientras el otro subgrupo lo hace por descarte.

Del grupo de **Ampliación** hay dos que eligen la opción A; en un caso reconocen hacerlo al azar y en el otro no dan una explicación lógica. El caso en que se elige B se afirma una supuesta perpendicularidad, y aquellos que eligen D reconocen haber dudado con la opción correcta.

Las razones que esgrimieron los alumnos de **Ártica** para sus elecciones fueron: un dibujo en 4 de los 5 que eligieron la opción correcta, y una justificación basada en la simetría en el único subgrupo que eligió la opción A.

De los cuatro subgrupos de **San Mateo,** aquél que eligió la respuesta B indica que es lo que "parece", mientras de los otros tres subgrupos, dos usan un dibujo y uno de ellos trata de justificarlo a través de ángulos (este grupo buscaba una demostración rigurosa).

En relación al grupo de **Gerardo Diego,** dos de los tres subgrupos que eligen "semejante" justifican, a través de un dibujo, y el tercero lo hace con un argumento erróneo basado en la "igualdad". De los otros tres subgrupos que se decantan por la opción D, dos afirman que es por desconocimiento, mientras el restante descarta las demás opciones (sin justificación).

Cabe destacar que la opción "Rectángulo" es la más fácil de descartar, haciendo un solo dibujo que sea suficientemente aproximado, y por eso ésta se muestra en rojo como la peor opción, 4 de los 27 (14.81%) eligieron "rectángulo". Ningún grupo de **Ártica** ni del **Gerardo Diego** eligió esta opción.

La opción "semejante" puede ser la más intuitiva y fue la más elegida en global (10 de 27, 37.04%). Es fácil caer en ella si se realiza un solo dibujo partiendo de un triángulo que sea aproximadamente equilátero. Esto es bastante habitual cuando uno dibuja un triángulo con el objetivo de trisecar los tres ángulos, pues si alguno de ellos es de poca amplitud, el error producido al "trisecar" a mano alzada puede ser muy grande, lo que produce una tendencia a dibujar un triángulo aproximadamente equilátero, favoreciendo la confusión entre las opciones "semejante" y "equilátero".

La opción "otro" también puede ser razonable si se decide en base a la intuición, sin hacer dibujos o siendo escéptico, sin embargo, varios subgrupos que eligen esta opción lo hacen reconociendo su desconocimiento al respecto (6 de 27, 22.22%).

Para obtener indicios suficientes de la opción correcta bastaría que cada miembro del grupo dibujase un triángulo grande bien distinto (por ejemplo, uno rectángulo, otro aproximadamente equilátero, uno obtusángulo y otro diferente de los anteriores), e hiciera un dibujo aproximado. Entre las opciones y pese a los errores, se podría descartar el semejante o construir la intuición de equilátero. Un total de 6 de los 27 subgrupos eligieron esta opción (22.22 %) de los cuales 5 fueron grupos de AC (de los 6 participantes, 83.33%) y solo 1 de los 21 subgrupos restantes (4.76%).

Sin duda se trata de la diferencia más significativa entre **Ártica** (AC) y los demás grupos (con metodologías estándar).

Segundo ejercicio grupal:

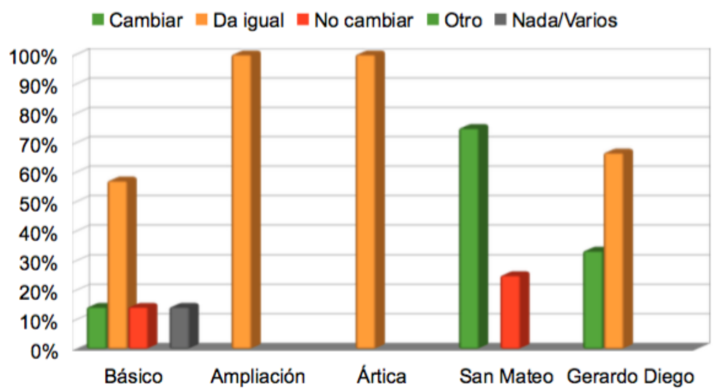


Figura 3

Es pertinente indicar que dentro del grupo de **San Mateo** varios alumnos conocían previamente el problema, sin embargo uno de estos alumnos pensó que la situación era diferente al tratarse de 5 cajas con 2 premios en lugar de 3 puertas con un premio. Se trata de un problema famoso por ser muy engañoso, basta ver que 18 de los 27 equipos (66.67%) eligieron la opción que se presenta como más razonable de forma intuitiva, pese a ser incorrecta (con todas las discusiones que puede suscitar). En este caso la opción "D. Ninguna de las anteriores" carecía de todo sentido pues se trata de un conjunto vacío al ser las tres anteriores una partición de las posibles opciones. Razonablemente nadie escogió esta absurda opción.

En este ejercicio se observa cierta aleatoriedad en el grupo **Básico** donde de los subgrupos solo 3 (42.86%) justifican su opción que en todos los casos es la B "Da igual". El subgrupo que seleccionó la opción correcta no da una justificación coherente.

Todos y cada uno de los subgrupos de **Ampliación** y **Ártica** han justificado de la misma manera su elección: "si quedan dos premios entre cuatro opciones entonces hay un 50%-50%", obviando en todo caso la dependencia con la elección previa.

Solo los subgrupos de **San Mateo** y **Gerardo Diego** han sido capaces de justificar la opción correcta (y lo han hecho los 5 que la han elegido en ambos grupos).

Tercer ejercicio grupal:

Todos aquellos que eligieron la opción D (de los grupos que no son el **Gerardo Diego**) justificaron con argumentos indicando que la opción B podría ser correcta de no ser por el quinto tramo, y descartándola por este motivo. Se podría decir que varios alumnos transcendieron a los errores de diseño. Del grupo **Gerardo Diego** (donde todos eligieron la opción D), tres subgrupos indican que la velocidad sólo depende del pedaleo y no de la pendiente.

En la figura 4 se muestran los resultados de este ejercicio:

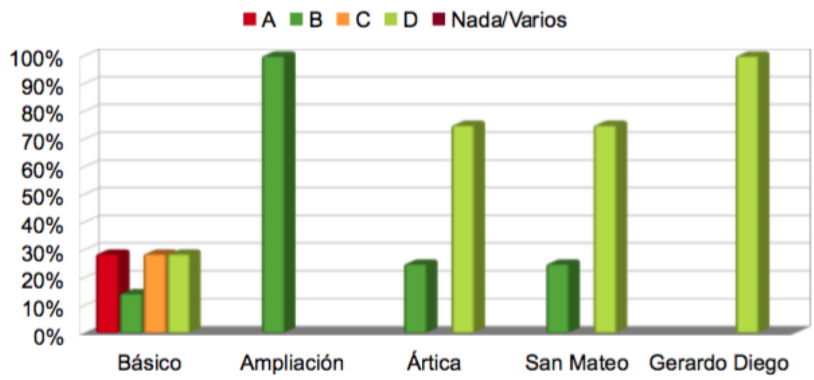


Figura 4

En cuanto a cómo argumentaron su elección, dentro del grupo **Básico** los dos equipos que eligieron la opción A indicaron "que se parecen", el subgrupo que eligió la B dio el argumento elemental de que al descender la altura se espera que la velocidad aumente y viceversa, mismo argumento que dio uno de los dos que eligieron la opción C. El otro se conformó con indicar que debía empezar a velocidad 0, desatendiendo a que también la gráfica de la opción B cumplía ese criterio. De los dos que optaron por la opción "ninguna de las anteriores" (D) ninguno da un razonamiento correcto.

Los cuatro subgrupos del grupo de **Ampliación** argumentan que si la altura decrece la velocidad debe crecer y viceversa. Esta es el mismo motivo que esgrime el subgrupo de **Ártica** que se decanta por la opción B, así como el de **San Mateo** (aunque este lo explica con más detalle).

Hay que indicar que uno de los equipos de **Ártica** justifica correctamente que tanto la opción B como la D pueden ser correctas. Los otros 4 subgrupos de este centro justifican correctamente por qué no les satisface suficientemente la opción B y descartan correctamente las otras dos.

Dentro de los subgrupos de **San Mateo**, de los 3 que optan por la opción D uno no lo justifica correctamente, mientras que los otros dos sí justifican completamente el porqué de su elección.

En el grupo **Gerardo Diego** dos argumentan que el pedaleo y el freno importan más que la pendiente, mientras uno mejora esta argumentación relacionando ambas ideas. Los otros tres subgrupos se centran en la pendiente y desarrollan críticas a las opciones ofrecidas, en particular al quinto tramo.

5. Discusión de los resultados

Ejercicio individual:

A continuación se muestra el promedio de puntuación de los alumnos de cada grupo (figura 5), considerando solo aquellos que son correctos, sin tener en cuenta la plausibilidad, que no indica diferencias significativas, como se comentó previamente:

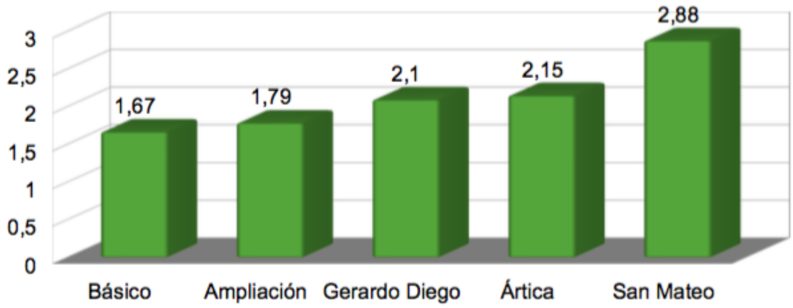


Figura 5

Esta gráfica representa la puntuación promedio de los diferentes grupos, resumiendo el conjunto de los datos y tratando de cuantificar la creatividad promedio de los estudiantes. La puntuación más alta corresponde a los alumnos del **San Mateo**, lo que puede entenderse como un indicador de la relación entre creatividad y competencia matemática (dentro de las limitaciones naturales del estudio). Dentro de los grupos del mismo curso se observa una diferencia entre los dos grupos del **IES Clara Campoamor** (1,67 y 1,79) y los grupos de **Gerardo Diego** y **Ártica**. Es interesante señalar que de estos cuatro grupos, el **Gerardo Diego** se diferencia de los otros tres en el nivel socio-económico correspondiente a su ubicación, así cómo **Ártica** se desmarca del grupo de cuatro en cuanto a la metodología cooperativa. Esto puede ser un indicio de la utilidad del aprendizaje cooperativo para enfrentar las desigualdades sociales en el aspecto que se está estudiando.

Si atendemos a la distribución de los alumnos con diferente puntuación se obtiene la figura 6:

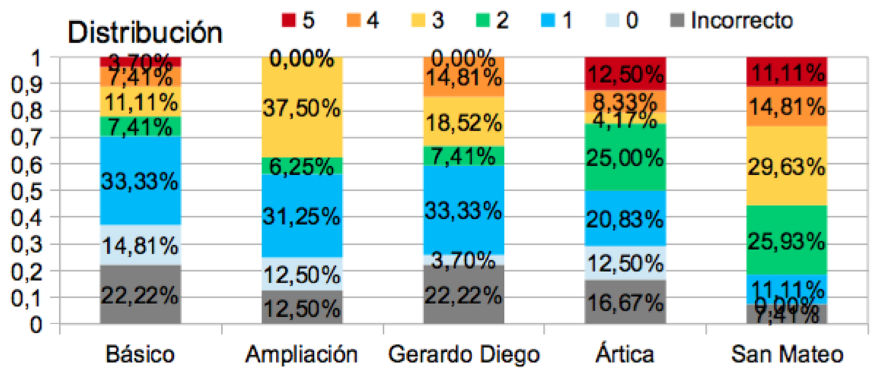


Figura 6

Comparando el grupo **Básico** y **Ártica**; en el primero sobre un 70% obtienen menos de 2 puntos, mientras en **Ártica** es solo el 50% (un 59,25% en **Gerardo Diego**, 56,25% en **Ampliación** y menos de un 20% en **San Mateo**). Por otro lado, el grupo de **Ampliación** de matemáticas es el más homogéneo y carece de sujetos "altamente creativos" (puntuación 4 ó 5), mientras en el grupo **Básico** estos son un 11,11%, un 14,81% en **Gerardo Diego** (ninguno con 5 puntos), en **Ártica** un 20,83% y en **San Mateo** un 25,92%.

La mayor homogeneidad del grupo de **Ampliación** se puede explicar suponiendo una relación entre la afinidad por las matemáticas y la habilidad creativa. Si comparamos este grupo con el **Básico,** ambos del mismo centro, se aprecia que los estudiantes con una valoración media-alta (2-3) son porcentualmente bastantes más en el grupo de **Ampliación** que en el grupo **Básico** (43,75% frente a un 18,52%) mientras que en cuanto a los sujetos con creatividad alta o muy alta (4-5) representan un 11,11% en el grupo básico y no existen en el grupo de **Ampliación.** Esto abre la puerta a interesantes reflexiones. Sin embargo, como se ha indicado previamente, el grupo de **San Mateo** se diferencia claramente en la proporción de alumnos con baja creatividad (11,11%) y sobresale también en los de alta o muy alta, eso sí, sin aventajar demasiado al grupo de **Ártica.**

Es interesante indicar la desviación típica de cada grupo, que se muestra a continuación (Tabla 1):

Tabla 1

Básico	Ampliación	Gerardo Diego	Ártica	San Mateo
1,425	1,145	1,269	1,621	1,177

En esta tabla se puede observar que los grupos que incluyen un criterio de filtro (Ampliación y San Mateo) son los únicos por debajo de 1,2; mientras que solamente Ártica sube de 1,5 indicando la mayor heterogeneidad a este respecto.

Ejercicio grupal 1:

Este es el ejercicio grupal que más relación tiene con la idea de creatividad que se está estudiando, más en concreto con el aspecto de esta que tiene que ver con la resolución de problemas. El motivo es que se trata de un problema al que los alumnos no están acostumbrados, y por lo tanto las estrategias usuales son ineficaces en este caso, por mucha habilidad que se tenga con ellas. Es decir, los alumnos deben ser capaces de salir de sus contextos matemáticos habituales y trabajar como un grupo de investigación para concluir la opción correcta. Esto parece que sólo ha sido logrado por los subgrupos que componen el grupo **Ártica**, obteniendo además un alto índice de éxito (5 de 6 subgrupos dieron la respuesta correcta). Cuando tratamos de encontrar explicaciones al resultado de este ejercicio dos conceptos aparecen como posibles respuestas.

Por un lado el hecho de que los estudiantes de **Ártica** están en su terreno cuando se trabaja en grupo; están acostumbrados a escucharse, respetarse y tomar decisiones en equipo, atendiendo a todas las opiniones. El porqué esto se muestra claramente en este ejercicio y no en el resto de la prueba grupal parece tener relación clara con la naturaleza del propio problema. Como se ha indicado previamente, no es difícil obtener la respuesta correcta con un proceso de investigación adecuado, aunque sí realmente complicado por los métodos clásicos, y esto nos lleva a la segunda clave.

Ésta sería el **Aprendizaje Basado en Problemas** (ABP), que tal y como nos comentó el profesor de matemáticas del grupo estudiado de AC se usa de manera transversal a lo largo del curso. El ABP se define en el *Laboratorio de innovación educativa* de Ártica de la siguiente manera:

> *"Se trata de un modelo enseñanza-aprendizaje en el que los alumnos se enfrentan a un problema o situación que les va a permitir mejorar su capacidad para la resolución de problemas, identificar principios que sustentan el conocimiento y alcanzar objetivos de aprendizaje especialmente relacionados con el razonamiento y el juicio crítico."*

Ejercicio grupal 2:

Se observa que todos los equipos de los grupos de **Ampliación** y **Ártica** han justificado correctamente su opción (50%-50%), mientras que únicamente 3 de los 7 del grupo **Básico** lo han justificado con rigor, lo que indica una mayor semejanza entre **Ampliación** y **Ártica** que entre el **Básico** y cualquiera de ellos dos. Por otro lado, solo han alcanzado la solución correcta en los grupos de **Gerardo Diego** y **San Mateo**, con la diferencia de que en el primero solo lo hicieron un tercio, mientras que en el grupo de excelencia fueron tres cuartas partes (33,33% contra 75%). Este ejercicio, pese a ser bastante simple, puede ser muy confuso pero asimismo es bastante conocido (al menos en el contexto de los problemas probabilísticos) lo cual puede indicar una relación con el nivel cultural del alumnado, lo que ayudaría a explicar la diferencia entre estos dos grupos y el resto.

Ejercicio Grupal 3:

En este ejercicio se puede apreciar que los alumnos de **Ártica, Gerardo Diego** y **San Mateo** muestran un mayor juicio crítico que los de **Ampliación,** los cuales se satisfacen fácilmente con la opción más verosímil de las tres propuestas. Cabe destacar que aunque todos los equipos de **Gerardo Diego** eligen la opción "crítica" solo 4 de 6 dan una justificación consistente, mientras los otros dos dan argumentos insuficientes. De nuevo, el grupo **Básico** se separa de los otros cuatro ofreciendo unos resultados de una calidad ostensiblemente menor. Esta capacidad crítica, que requiere confiar más en los razonamientos propios que en lo que viene dado por el enunciado es un claro indicador de autonomía y confianza en uno mismo.

Análisis grupal global:

Procedemos a evaluar la prueba grupal en conjunto. Para ello se ha tomado el porcentaje de resultados correctos de cada ejercicio, con los siguientes criterios:

– En el primer ejercicio se ha tomado simplemente el porcentaje de los subgrupos que seleccionaban la opción correcta (Equilátero).

– Del segundo ejercicio se ha considerado el porcentaje de los que daban la opción correcta (Cambiar) y lo han justificado (podían y debían hacerlo).

– En cuanto al tercer ejercicio se consideran correctas tanto la opción B como la D (depende) siempre que esta última venga acompañada de una explicación. Se han tomado ambos porcentajes y se ha realizado una media ponderada (pesos 0,4 para la opción B y 0,6 para la opción D), ya que se considera algo mejor la opción D. En todo caso, se ha exigido una correcta justificación.

Se han promediado estos tres porcentajes obteniendo los resultados que se detallan en la figura 7.

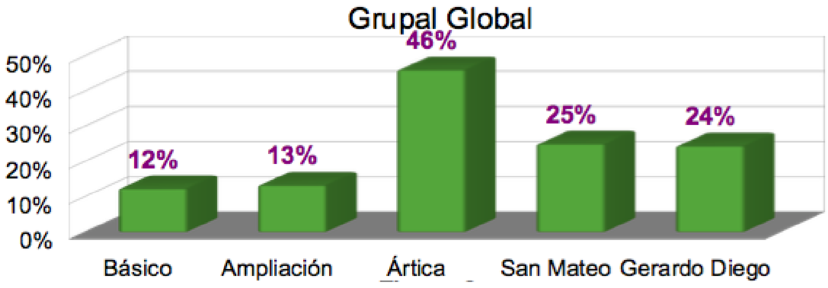


Figura 7

Estos datos pretenden representar el éxito en el conjunto de la prueba grupal, más allá de los ejercicios concretos. Se aprecia una gran superioridad del grupo **Ártica** sobre los dos grupos del **IES Clara Campoamor** con porcentaje que supera al triple del de estos. Por otra parte, muestra unos resultados claramente superiores a los de **San Mateo** y **Gerardo Diego** (casi el doble), que se explican principalmente por el ejercicio 1 donde las diferencias son realmente grandes. Se puede interpretar como un indicador de la mejor capacidad de los alumnos de **Ártica** para trabajar eficientemente en equipo, lo cual es lógico ya que la dinámica de trabajo habitual en este centro es cooperativa y en equipo, mientras que en cualquiera de los otros grupos si esto se lleva a cabo es de manera anecdótica.

6. Limitaciones del estudio

Las limitaciones del estudio son múltiples y profundas. En primer lugar los autores de este estudio no contábamos con experiencia previa en la investigación en educación y pese a ello hemos tratado de diseñar un experimento propio relativamente ambicioso. Esta inexperiencia, junto con la dificultad del proyecto, se ha mostrado en factores como el diseño de los ejercicios, que adolecen de varios errores. Estos se han asumido e incluso se han intentado aprovechar para observar otros elementos no planificados a priori. También en lo respectivo al análisis de datos. El tratamiento de los mismos ha sido exploratorio más que conclusivo, contando con un análisis donde no se ha hecho hincapié en si las diferencias eran significativas (no hay análisis de varianza y covarianza), sino más bien en qué se podía estudiar y las reflexiones que estos resultados sugerían.

Por otra parte, pese a que se ha podido contar con cinco grupos a comparar, el tamaño de las muestras es realmente pequeño para que los datos se puedan considerar relevantes, lo que de nuevo es coherente con el planteamiento exploratorio.

Por último, el hecho de que las pruebas hayan sido puntuales y carezcan de la posibilidad de una continuidad ha sido una limitación inicial conocida que ha impedido un estudio más ambicioso y profundo.

Este estudio tiene por objeto investigar y reflexionar de cara a otros estudios más amplios y precisos sobre los temas fundamentales de creatividad y aprendizaje cooperativo. Puede servir como punto de partida para el diseño y ejecución de otros estudios de mayor calado.

7. Conclusiones

Una de las claves de los resultados de este estudio está en el problema del triángulo de Morley y la relación con la resolución de problemas. Los resultados indican una notable diferencia en los alumnos de aprendizaje cooperativo y el resto. Esto nos lleva a pensar que si realmente queremos desarrollar estas capacidades en el aula, el AC puede ser un vehículo de gran utilidad.

Esto se puede observar claramente en la figura 7, pero no solamente queda de manifiesto en dicha figura. Si comparamos los otros cuatro grupos en el resultado global grupal aparecen dos bloques claros; los dos grupos del **IES Clara Campoamor** y por otro lado el **IES Gerardo Diego** y el **IES San Mateo**. Pensando en las diferencias entre ambos bloques (nivel socio-económico promedio, principalmente) y las diferencias internas en cada bloque (mayor afinidad y motivación matemática en **Ampliación** que en el grupo **Básico**, así como el potente sesgo del **San Mateo** frente al **Gerardo Diego**), los resultados parecen indicar que, de cara al trabajo en equipo, la primera (el nivel socio-económico promedio) tiene más relevancia que los otros sesgos.

Sin embargo, los resultados expuestos en la figura 5 (el análisis sobre creatividad) dividen a los cinco grupos a estudio en tres bloques distintos: los dos grupos del **Clara Campoamor** por un lado, **Gerardo Diego y Ártica** en un segundo bloque, y en el tercer bloque el centro de excelencia **San Mateo** con una amplia diferencia. Las dos conclusiones que esto sugiere podrían ser: que existe una relación entre la capacidad creativa y la capacidad académica exhibida por el grupo de **San Mateo** y, asimismo, el potencial del aprendizaje cooperativo de cara a paliar las diferencias socio-económicas no basándose en la segregación sino apoyándose, precisamente, en la diversidad.

Referencias

[1] FRYER, M. and COLLINGS, J. A. *Teachers' views about creativity.* British Journal of Educational Psychology, 61: 207–219. doi: 10.1111/j.2044- 8279.1991.tb00976.x , 1991.

[2] GARDNER, H. *Multiple intelligences*. NY: Basic Books, New York, 1993.

[3] HADAMARD, J. *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press, Princeton, 1945.

[4] IBM. *Capitalizing on Complexity, Insights from the 2010 IBM Global Chief Executive Officer Study*: http://www.935.ibm.com/services/us/ceo/ceostudy2010/

[5] JOHNSON, D., JOHNSON, R., y WALD, M. *Aprender juntos y solos*. Buenos Aires: Aique, 1999.

[6] JOHNSON, D. W., JOHNSON, R., y HOLUBEC, E.J. *El aprendizaje cooperativo en el aula.* Editorial Paidós, Buenos Aires, 1999.

[7] MERCHÁN, S. *Los bloqueos en Matemáticas a través del Aprendizaje Cooperativo*, enviado a publicar, 2015.

[8] PEHKONEN, E. *The state-of-art in mathematical creativity*. ZDM, 29(3), 63-67. doi:10.1007/s11858-997-0001-z, 1997.

[9] PUJOLÀS, P. *9 ideas clave. El aprendizaje cooperativo*. Graó, Barcelona, 2008.

[10] ROBINSON, K. *How Do You Define Creativity?*. Video Series from Adobe Education: https://www.youtube.com/watchv=BfjqIJiOlHI

[11] ROBINSON, K. *Why is Creativity Important in Education?*. Video Series from Adobe Education: https://www.youtube.com/watchv=ywIhJ2goiGE

[12] ROBINSON, K. and ARONICA, L. *Creative schools*, 2015.

[13] ROBINSON, K. *How Schools Kill Creativity*. TED, Monterey, California, 2006.

[14] SILVER, E. *Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing*. ZDM, 29(3), 75-80. doi:10.1007/s11858-997-0003-x, 1997.

[15] THOUSAND, J., VILLA, R. and NEVIN, A. *Creativity and collaborative learning*. P.H. Brookes Pub. Co., Baltimore, 1994.

[16] Página web del Colegio Ártica: http://www.jrotero.org/index.php/artica

[17] Laboratorio de innovación educativa Ártica: http://www.jrotero.org/files/file/LAB-IACEP-PP.pdf

Sobre los autores:

Nombre: Susana Merchán Rubira
Correo Electrónico: susana.merchan.rubira@gmail.com
Institución: Universidad Pontificia Comillas, España.

Nombre: José Samuel Rodríguez García
Correo Electrónico: jsamuelrg@gmail.com
Institución: Oxford University Press, España.