Juegos Matemáticos

# Entendiendo el Cuadrado Matemático de Benjamín Franklin

# Understanding the Mathematical Square of Benjamin Franklin

Marco Vinicio Vásquez Bernal

Revista de Investigación

Volumen IV, Número 2, pp. 125–156, ISSN 2174-0410
Recepción: 23 Abr'14; Aceptación: 1 Sep'14

1 de octubre de 2014

**Resumen**

Este trabajo se realiza con el objetivo de entender cómo Benjamín Franklin, construyó un arreglo de los números enteros, del 1 al 64, logrando que en dicha construcción se presenten muchas características curiosas que han hecho de este arreglo un objeto de estudio y de anécdota, ya que el mismo es un tributo a la especial naturaleza de los números.

En este artículo se desentraña cómo fue posible esta construcción, para luego utilizar lo descubierto y, con un proceso debidamente sistematizado, edificar estructuras mayores que, de igual forma, se sujetan a las características planteadas en el documento original, y en muchos casos las superan con otras igual de curiosas.

**Palabras Clave:** Cuadrado Matemático, orden, sumatoria, arreglos.

**Abstract**

This work is done in order to understand how Benjamin Franklin, built an array of integers from 1 to 64, obtaining in this structure many curious features that have made this document an object of study, since it is a tribute to the special nature of the numbers.

The paper has managed to uncover how it was possible this construction, then it used what has discovered under a process duly systematized to build larger structures that fit in a similar way the characteristics proposed in the original document, and in many cases achieve other interesting ones.

**Keywords:** Mathematical Square, order, sum, arrangements.

## 1. Introducción

El Cuadrado Mágico de Benjamin Franklin que, tal como se presenta en la figura 1, ha constituido un enigma matemático, es un ordenamiento matricial de 8 filas por 8 columnas, donde se ubican, los números naturales de 1 al 64, sin repetición, cumpliendo algunas condiciones especiales, que no han sido explicadas por algún tiempo. En este artículo se desvelará el intricado proceso de su construcción, que posibilita incluso construir unos de orden superior.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 61 | 4 | 13 | 20 | 29 | 36 | 45 |
| 14 | 3 | 62 | 51 | 46 | 35 | 30 | 19 |
| 53 | 60 | 5 | 12 | 21 | 28 | 37 | 44 |
| 11 | 6 | 59 | 54 | 43 | 38 | 27 | 22 |
| 55 | 58 | 7 | 10 | 23 | 26 | 39 | 42 |
| 9 | 8 | 57 | 56 | 41 | 40 | 25 | 24 |
| 50 | 63 | 2 | 15 | 18 | 31 | 34 | 47 |
| 16 | 1 | 64 | 49 | 48 | 33 | 32 | 17 |

*Figura 1. Copia del Cuadrado Matemático 8×8 de Benjamin Franklin.*

En la primera sección explicaremos las propiedades del Cuadrado Matemático de Benjamín Franklin, para en la sección 2 indicar el proceso de su construcción, en la siguiente sección se indica el proceso para construir un cuadrado de estas características de orden 16×16, para luego presentar unos resultados que prueban que el método funciona.

## 2. El Cuadrado Mágico de Benjamin Franklin

Se atribuye al pensador, padre de la Patria de los Estados Unidos de Norte América, la construcción del cuadrado mágico que ilustra esta publicación y que se reproduce a continuación. Se trata de una curiosidad matemática que deja vislumbrar en su contenido la capacidad del genio. A continuación explicaré algunas curiosidades que muestran la importancia de esta construcción.

PROPIEDADES

a. Es un cuadrado de 8 filas por 8 columnas, contiene por tanto 64 espacios.

b. Está llenado por naturales del 1 al 64 sin repetir, uno en cada espacio.

c. Los elementos de cada fila suma 260.

d. Los elementos de cada columna suman también 260.

e. Si de la construcción tomamos cualquier sub cuadrado de orden 2 por 2, como el de la figura 2 que se muestra, sus números suman siempre 130, la mitad del total por fila y por columna a sabiendas de que es posible obtener 49 sub cuadrados de este orden.

f. Si del cuadrado estudiado se toman sub cuadrados de orden 4 por 4 como el de la figura 3, sus elementos siempre sumarán 520, el doble de la suma de los elementos por fila o por columna, existen 25 sub cuadrados de ese tipo.

| | |
|---|---|
| 3 | 62 |
| 60 | 5 |

*Figura 2*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 62 | 51 | 46 |
| 60 | 5 | 12 | 21 |
| 6 | 59 | 54 | 43 |
| 58 | 7 | 10 | 23 |

*Figura 3*

g. Si del cuadrado de Franklin se extraen sub cuadrados de 6 por 6, como el que se muestra en la figura 4, sus elementos siempre sumarán 1170, 4.5 veces la suma de cada fila o columna, existen 9 sub cuadrados con de ese orden [1].

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 62 | 51 | 46 | 35 | 30 |
| 60 | 5 | 12 | 21 | 28 | 37 |
| 6 | 59 | 54 | 43 | 38 | 27 |
| 58 | 7 | 10 | 23 | 26 | 39 |
| 8 | 57 | 56 | 41 | 40 | 25 |
| 63 | 2 | 15 | 18 | 31 | 34 |

*Figura 4*

h. Si definimos como diagonal de dos sentidos a las que van hacia abajo e inician de izquierda a derecha las primeras cuatro columnas y de derecha a izquierda las otras cuatro, reubicando las celdas de las tres primeras columnas a la derecha del cuadrado para completar las 8 diagonales (como se muestra en las líneas trazadas en la figura 5), los elementos de cada una de las diagonales, siempre suman 260, valor igual a lo que suman los elementos de todas las filas y columnas.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 61 | 4 | 13 | 20 | 29 | 36 | 45 | | | |
| 14 | 3 | 62 | 51 | 46 | 35 | 30 | 19 | 14 | | |
| 53 | 60 | 5 | 12 | 21 | 28 | 37 | 44 | 53 | 60 | |
| 11 | 6 | 59 | 54 | 43 | 38 | 27 | 22 | 11 | 6 | 59 |
| 55 | 58 | 7 | 10 | 23 | 26 | 39 | 42 | 55 | 58 | 7 |
| 9 | 8 | 57 | 56 | 41 | 40 | 25 | 24 | 9 | 8 | |
| 50 | 63 | 2 | 15 | 18 | 31 | 34 | 47 | 50 | | |
| 16 | 1 | 64 | 49 | 48 | 33 | 32 | 17 | | | |

*Figura 5*

- Ejemplo: si sumamos los elementos de la primera diagonal sería:

$$52 + 3 + 5 + 54 + 10 + 57 + 63 + 16 = 260$$

[1] Cuando el orden de los sub cuadrados es impar, no se cumple la condición de que sus elementos sumen un valor constante.

Diagonales semejantes son perfectamente construibles en el otro sentido, ubicando algunos elementos a la izquierda, de forma que se completen las ocho, de igual forma cada una contiene ocho elementos que, al igual que en el caso anterior suman 260, esto se observa en la figura 6.

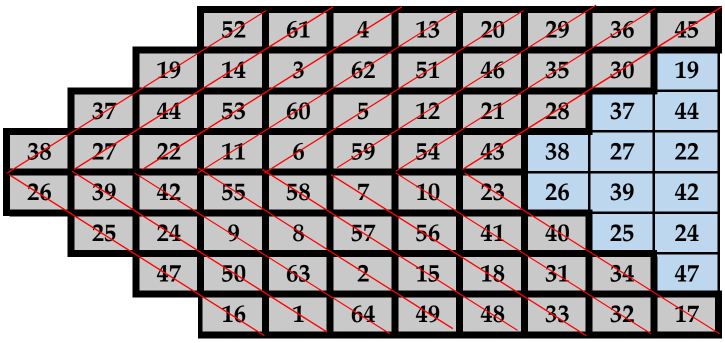


*Figura 6*

- Ejemplo: si sumamos los elementos de la primera diagonal desde la derecha:

$$52 + 19 + 37 + 38 + 26 + 25 + 47 + 16 = 260$$

i. Esta propiedad se cumple además en diagonales de doble sentido verticales, si extendemos el cuadrado en elementos en la parte superior, que permitan completar las ocho diagonales, como se observa en la figura 7. Los elementos de cada diagonal también suman 260.

- Ejemplo: si sumamos la primera diagonal se tiene:

$$52 + 3 + 5 + 54 + 43 + 28 + 30 + 45 = 260$$

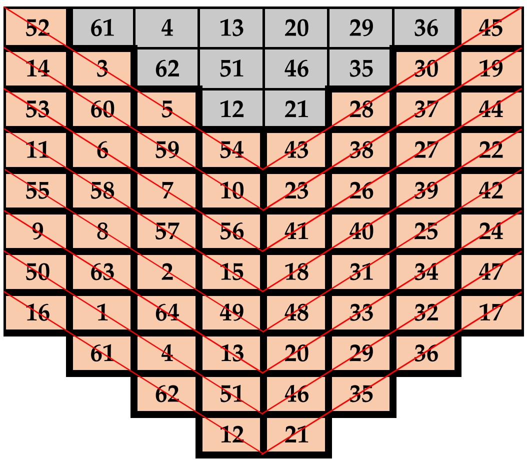


*Figura 7*

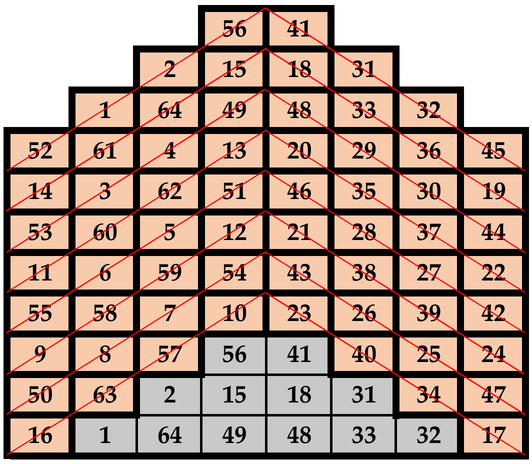


*Figura 8*

j. Si construimos las diagonales de doble sentido verticales de abajo hacia arriba, cono se observa en la figura 8, se tiene también que sus elementos suman el mismo valor, esto es 260.

- Así se puede observar que si sumamos la primera diagonal se tiene:

$$52 + 1 + 2 + 56 + 41 + 31 + 32 + 45 = 260$$

El cuadrado central contiene los elementos 54, 43, 10 y 23, (figura 9) que suman como ya se dijo 130. Si tomamos simétricamente cuatro elementos cualesquiera que equidisten de estos cuatro, la suma de esos elementos es también 130.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 61 | 4 | 13 | 20 | 29 | 36 | 45 |
| 14 | 3 | 62 | 51 | 46 | 35 | 30 | 19 |
| 53 | 60 | 5 | 12 | 21 | 28 | 37 | 44 |
| 11 | 6 | 59 | 54 | 43 | 38 | 27 | 22 |
| 55 | 58 | 7 | 10 | 23 | 26 | 39 | 42 |
| 9 | 8 | 57 | 56 | 41 | 40 | 25 | 24 |
| 50 | 63 | 2 | 15 | 18 | 31 | 34 | 47 |
| 16 | 1 | 64 | 49 | 48 | 33 | 32 | 17 |

*Figura 9*

- Así se tiene que:

$$62 + 35 + 2 + 31 = 130$$

$$52 + 45 + 16 + 17 = 130$$

$$53 + 44 + 9 + 24 = 130$$

k. Los cuatro primeros elementos de cada fila al igual que los cuatro últimos suman también 130.

l. Los cuatro primeros elementos de cada columna al igual que los cuatro últimos suman también 130.

## 2.1. Construcción

Este cuadrado, en su construcción responde a algunas normas que posibilitan sus resultados:

a. Sus elementos son consecutivos del 1 al 64, por tanto la sumatoria total será igual a (64*65)/2 = 2080, si se desea que cada fila sume un valor igual, esté debe ser 2080/8=260, esto también debe cumplirse en las columnas.

b. En cada fila, tendremos 8 elementos y por lo indicado anteriormente cada uno de ellos suman 260 y están conformados por cuatro pares de números, por tanto cada par debe sumar 65, (260/4=65), por tanto deberemos distribuir los sesenta y cuatro elementos en treinta y dos grupos de pares que sumen 65, iniciando con la combinación (1,64), luego (2,63) y así hasta llegar a la combinación (32,33), esto permite una correcta distribución en sentido horizontal.

c. En las columna ya no podemos utilizar aquello de la división exacta en cuatro pares, lo que utilizaremos más bien es dividir cada columna en dos pares que sumen 64 y dos que sumen 66, para que la suma de los cuatro sea los mismos 260 requeridos. Siguiendo la siguiente norma, combinaremos pares con pares de forma que sumen 66, además sumaremos impares con impares de forma que sumen 64.

   Es decir las combinaciones que suman 66 serán: (2,64), (4,62), (6,60), (8,58), (10,56), (12,54), (14,52), (16,50), (18,48), (20,46), (22,44), (24,42), (26,40), (28,38), (30,36), (32,34).

   Y las que suman 64 serán: (1,63), (3,61), (5,59), (7,57), (9,55), (11,54), (13,51), (15,49), (17,47), (19,45), (21,43), (23,41), (25,39), (27,37), (29,35), (31,33).

d. Luego se ubican de tal forma que las dos distribuciones en las que cada número está presente sean posibles, así si deseamos ubicar el 2, deberemos recordar que en las combinaciones de las filas este elemento forma parte de la combinación (2,63) y para las columnas la suma es par, por tanto forma parte de la combinación (2,64). Entonces este elemento se ubicará conforme se muestra en la figura 10.

   Además se debe tener en cuenta que los otros elementos (1, 63 y 64) presentes en el cuadro también deben cumplir lo de sus combinaciones para filas y columnas.

e. El siguiente cuadro que se construya debería tener en cuenta el número 3, que respetando las combinaciones de las filas y las columnas construye la figura 11, donde se involucra además otros tres elementos (4, 62 y 61), que también deben cumplir sus combinaciones.

   Así también construiremos los cuadros para el número 5, que toma los elementos (6, 60 y 59), que se observa en la figura 12. La figura 13 contiene los elementos relacionados con el número 7, que son los elementos (8, 57 y 58).

| | |
|---|---|
| 63 | 2 |
| 1 | 64 |

*Figura 10*

| | |
|---|---|
| 61 | 4 |
| 3 | 62 |

*Figura 11*

| | |
|---|---|
| 59 | 6 |
| 5 | 60 |

*Figura 12*

| | |
|---|---|
| 57 | 8 |
| 7 | 58 |

*Figura 13*

f. Buscamos una distribución simétrica, por lo que el cuadrado se divide en dos partes, una mitad izquierda, de ocho filas por cuatro columnas, donde ubicamos estos cuadros alternando, comenzando con el primero en las dos filas inferiores, el de la figura 11 en las filas superiores, primera y segunda, el de la figura 11, invirtiendo las filas y columnas, en la tercera y cuarta desde arriba, y el de la figura 13, invirtiendo sus filas y columnas, en la parte inferior, en las filas 5 y 6 desde arriba, como se ve en la figura 14.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 61 | 4 | | | | | |
| | 3 | 62 | | | | | |
| | 60 | 5 | | | | | |
| | 6 | 59 | | | | | |
| | 58 | 7 | | | | | |
| | 8 | 57 | | | | | |
| | 63 | 2 | | | | | |
| | 1 | 64 | | | | | |

*Figura 14*

g. Teniendo en consideración las reglas expuestas, construimos los cuadrados para los elementos del 9 al 16, y los ubicamos en sentido inverso, es decir el del 9 que contiene además los elementos (10, 56 y 55), lo ubicamos en las filas quinta y sexta desde arriba, el del 11, que además contiene los elementos (54, 12 y 53) lo ubicamos directamente en las filas tercera y cuarta, el relacionado con el 13 que contiene además a los números (14, 51 y 52), se ubicará en las dos primeras filas, invirtiéndolas, de igual forma, invirtiendo el cuadrado relacionado con el numero 15 que además contiene los elementos (16, 49 y 50), se ubicará en la séptima y octava fila invirtiéndolas.

   Se observa que las únicas columnas ocupadas son la segunda y tercera, por lo que para ubicar cada cuadro, separaremos las columnas, ubicando las primeras en la primera y las segundas en la cuarta, tal como se observa en la figura 15.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 61 | 4 | 13 | | | | |
| 14 | 3 | 62 | 51 | | | | |
| 53 | 60 | 5 | 12 | | | | |
| 11 | 6 | 59 | 54 | | | | |
| 55 | 58 | 7 | 10 | | | | |
| 9 | 8 | 57 | 56 | | | | |
| 50 | 63 | 2 | 15 | | | | |
| 16 | 1 | 64 | 49 | | | | |

*Figura 15*

h. Para rellenar las columnas de la quinta a la octava, lo haremos en función de las cuatro primeras columnas, calculando cada elemento con la siguiente norma: si el elemento de la columna uno de una fila cualquiera es mayor que 32, a ese valor restaremos 32 y su resultado se ubicará en la respectiva fila, para la columna sexta se calculará tomando en cuenta los valores de la segunda columna, las séptima y octava se construirán en función de la tercera y cuarta respectivamente, el resultado se observa en la figura 16, que justamente es el cuadrado Mágico de Benjamín Franklin.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 61 | 4 | 13 | 20 | 29 | 36 | 45 |
| 14 | 3 | 62 | 51 | 46 | 35 | 30 | 19 |
| 53 | 60 | 5 | 12 | 21 | 28 | 37 | 44 |
| 11 | 6 | 59 | 54 | 43 | 38 | 27 | 22 |
| 55 | 58 | 7 | 10 | 23 | 26 | 39 | 42 |
| 9 | 8 | 57 | 56 | 41 | 40 | 25 | 24 |
| 50 | 63 | 2 | 15 | 18 | 31 | 34 | 47 |
| 16 | 1 | 64 | 49 | 48 | 33 | 32 | 17 |

*Figura 16*

## 2.2. Análisis

Intentando entender esté cuadrado mágico explicare algunas ideas.

Las propiedades surgen justamente de la forma como se construye el cuadrado, así cada cuatro elementos consecutivos, en fila en columna o en cuadrado sumaran 130, la distribución simétrica de los elementos hace que todas las diagonales de doble sentido contengan elementos que produzcan un resultado idéntico y como también contienen ocho elementos, deben sumar 260, haciendo además que los cuatro elementos equidistantes de los elementos del centro sumen un valor igual, y como también son cuatro, estos deberán sumar 130.

Para entender mejor, construiremos un cuadro de cuatro columnas por ocho filas, donde cada elemento contendrá la suma de dos originales consecutivos, por cada fila (figura 17).

Está claro que si realizamos nuevamente esa operación se tendrá dos columnas donde todas contendrán el 130.

Si se realiza una operación similar, pero ahora sumando los números consecutivos en cada columna tendremos un cuadro de cuatro filas por ocho columnas, como se observa en la figura 18. También se tiene que si sumamos los elementos consecutivos, tendremos 130 como resultado.

| F1 | F2 | F3 | F4 |
|---|---|---|---|
| 113 | 17 | 49 | 81 |
| 17 | 113 | 81 | 49 |
| 113 | 17 | 49 | 81 |
| 17 | 113 | 81 | 49 |
| 113 | 17 | 49 | 81 |
| 17 | 113 | 81 | 49 |
| 113 | 17 | 49 | 81 |
| 17 | 113 | 81 | 49 |

*Figura 17*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G1 | 66 | 64 | 66 | 64 | 66 | 64 | 66 | 64 |
| G2 | 64 | 66 | 64 | 66 | 64 | 66 | 64 | 66 |
| G3 | 66 | 64 | 66 | 64 | 66 | 64 | 66 | 64 |
| G4 | 64 | 66 | 64 | 66 | 64 | 66 | 64 | 66 |

*Figura 18*

## 2.3. Variaciones

| Combinación | |
|---|---|
| F1-F2-F3-F4 | SI |
| F1-F2-F4-F3 | SI |
| F1-F3-F2-F4 | NO |
| F1-F3-F4-F2 | NO |
| F1-F4-F2-F3 | NO |
| F1-F4-F3-F2 | NO |
| F2-F1-F3-F4 | SI |
| F2-F1-F4-F3 | SI |
| F2-F3-F1-F4 | NO |
| F2-F3-F4-F1 | NO |
| F2-F4-F1-F3 | NO |
| F2-F4-F3-F1 | NO |
| F3-F1-F2-F4 | NO |
| F3-F1-F4-F2 | NO |
| F3-F2-F1-F4 | NO |
| F3-F2-F4-F1 | NO |
| F3-F4-F1-F2 | SI |
| F3-F4-F2-F1 | SI |
| F4-F1-F2-F3 | NO |
| F4-F1-F3-F2 | NO |
| F4-F2-F1-F3 | NO |
| F4-F2-F3-F1 | NO |
| F4-F3-F1-F2 | SI |
| F4-F3-F2-F1 | SI |

*Figura 19*

| Combinación | |
|---|---|
| G1-G2-G3-G4 | SI |
| G1-G2-G4-G3 | SI |
| G1-G3-G2-G4 | NO |
| G1-G3-G4-G2 | NO |
| G1-G4-G2-G3 | NO |
| G1-G4-G3-G2 | NO |
| G2-G1-G3-G4 | SI |
| G2-G1-G4-G3 | SI |
| G2-G3-G1-G4 | NO |
| G2-G3-G4-G1 | NO |
| G2-G4-G1-G3 | NO |
| G2-G4-G3-G1 | NO |
| G3-G1-G2-G4 | NO |
| G3-G1-G4-G2 | NO |
| G3-G2-G1-G4 | NO |
| G3-G2-G4-G1 | NO |
| G3-G4-G1-G2 | SI |
| G3-G4-G2-G1 | SI |
| G4-G1-G2-G3 | NO |
| G4-G1-G3-G2 | NO |
| G4-G2-G1-G3 | NO |
| G4-G2-G3-G1 | NO |
| G4-G3-G1-G2 | SI |
| G4-G3-G2-G1 | SI |

*Figura 20*

Teniendo en cuenta lo expuesto en el análisis anterior, se debe tener en cuenta que si deseamos modificar el cuadrado mágico de Benjamín Franklin, deberemos intercambiar columnas o filas manteniendo la estructura de cuadros $2 \times 2$ que permitieron su construcción.

Del ordenamiento presente en la figura 15 existen 24 posibles permutaciones de filas y columnas, más como vemos en la figura 19, únicamente 8 cumplen aquello de que la mitad derecha sume lo mismo que la mitad izquierda. De igual forma existen 24 posibles permutaciones de columnas de lo presentado en la figura 16, más tan solo 8 de ellas cumplen aquello de que la mitad inferior sume igual que la mitad superior, tal como se ilustra en la figura 20.

En la figura 17 se tienen todos las posibles combinaciones de los cuatro grupos presentados en la figura 16, vemos que de las 24 posibles, 8 mantienen las características, y 16 no, por tanto existen 8 posibilidades de nuevos cuadrados mágicos con las propiedades del cuadrado mágico horizontal.

Las combinaciones para columnas en cambio se entenderán si partimos de la figura 15, en este caso es posible intercambiar F1 con F2, manteniendo el total de la mitad izquierda, se puede cambiar F3 con F4, haciendo que el total en la mitad derecha se mantenga y simultáneamente deben cambiarse la F1 y F2 con la F3 y F4, para que no se altere el total por mitades, en total tendremos $2 \times 2 \times 2 = 8$.

Es posible demostrar lo indicado generando las 24 combinaciones y viendo cuántas de ellas mantienen las propiedades indicadas, en la figura 18 se observa que estas son ocho.

Para concluir podemos decir que si el deseo es calcular cuántas variaciones puedan construirse intercambiando simultáneamente filas y columnas, lo que se deberá hacer es multiplicar 8 por 8 y se puede afirmar que, con base en este estudio, el cuadrado mágico de Benjamín Franklin, genera otros 63, es decir existen 64 cuadrados $8 \times 8$, que se sujetan a las propiedades propuestas por el famoso científico. No he podido encontrar en la literatura científica explicación de cómo se construye el curioso cuadrado ni de cómo encontrar variaciones del mismo, por lo que estimo importante este descubrimiento.

Para reforzar lo indicado a continuación presento tres cuadrados de orden $8 \times 8$, que se sujetan a las propiedades propuestas.

La figura 21 resulta de cambiar G4 con G1, G3 con G2 y además F2 con F1, y cumple las propiedades expuestas.

| | G4 | | G3 | | G1 | | G2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F2 | 37 | 44 | 21 | 28 | 53 | 60 | 5 | 12 |
| | 27 | 22 | 43 | 38 | 11 | 6 | 59 | 54 |
| F1 | 36 | 45 | 20 | 29 | 52 | 61 | 4 | 13 |
| | 30 | 19 | 46 | 35 | 14 | 3 | 62 | 51 |
| F3 | 39 | 42 | 23 | 26 | 55 | 58 | 7 | 10 |
| | 25 | 24 | 41 | 40 | 9 | 8 | 57 | 56 |
| F4 | 34 | 47 | 18 | 31 | 50 | 63 | 2 | 15 |
| | 32 | 17 | 48 | 33 | 16 | 1 | 64 | 49 |

*Figura 21*

La figura 22 resulta de cambiar G2 con G1, G3 con G4 y además F3 con F4, y cumple las propiedades expuestas.

| | G2 | | G1 | | G4 | | G3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F1 | 4 | 13 | 52 | 61 | 36 | 45 | 20 | 29 |
| | 62 | 51 | 14 | 3 | 30 | 19 | 46 | 35 |
| F2 | 5 | 12 | 53 | 60 | 37 | 44 | 21 | 28 |
| | 59 | 54 | 11 | 6 | 27 | 22 | 43 | 38 |
| F4 | 2 | 15 | 50 | 63 | 34 | 47 | 18 | 31 |
| | 64 | 49 | 16 | 1 | 32 | 17 | 48 | 33 |
| F3 | 7 | 10 | 55 | 58 | 39 | 42 | 23 | 26 |
| | 57 | 56 | 9 | 8 | 25 | 24 | 41 | 40 |

*Figura 22*

La figura 23 resulta de cambiar G2 con G1, G3 con G4 y además F3 con F1, F4 con F2, F2 con F3 y F4 con F1, se cumplen las propiedades expuestas.

Así podemos exponer los sesenta y cuatro cuadrados mágicos, tipo Benjamin Franklin.

Se puede concluir entonces que existen 64 formas de ubicar el conjunto de números ente-

| | G2 | | G1 | | G4 | | G3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F3 | 7 | 10 | 55 | 58 | 39 | 42 | 23 | 26 |
| | 57 | 56 | 9 | 8 | 25 | 24 | 41 | 40 |
| F4 | 2 | 15 | 50 | 63 | 34 | 47 | 18 | 31 |
| | 64 | 49 | 16 | 1 | 32 | 17 | 48 | 33 |
| F2 | 5 | 12 | 53 | 60 | 37 | 44 | 21 | 28 |
| | 59 | 54 | 11 | 6 | 27 | 22 | 43 | 38 |
| F1 | 4 | 13 | 52 | 61 | 36 | 45 | 20 | 29 |
| | 62 | 51 | 14 | 3 | 30 | 19 | 46 | 35 |

*Figura 23*

ros, del 1 al 64, de tal forma que se construya un cuadrado mágico, con las características del presentado por el famoso inventor.

Basándome en las propiedades de los números naturales, podemos construir cuadrados mágicos tomando cada elemento distinto, afectándolo por una transformación lineal cualquiera para generar otro conjunto de sesenta y cuatro elementos, donde estos, colocándolos en los respectivos lugares donde se ubicaban los elementos originales construyen otro cuadrado mágico que cumple las condiciones, obviamente el nuevo cuadrado ya no será con los sesenta y cuatro elementos consecutivos, será con elementos distintos que respondan a la transformación lineal, estando claro que sus constantes de sumatoria responderán a su vez a la nueva estructura.

Así si tomo el cuadrado inicial y a cada elemento le afecto por la transformación lineal $3k-2$, donde $k$ es la variable a la cual se deberán asignar los valores del 1 al 64, generando la serie de números $(1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 184, 187, 190)$, cuya sumatoria puede calcularse de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{64} A_i = \sum_{k=1}^{64} 3k - 2 = 3\sum_{k=1}^{64} k - 2\sum_{k=1}^{64} 1$$

Que aplicando la formula de sumatoria de números consecutivos:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se tiene:

$$\sum_{k=1}^{64} A_i = 3 \cdot \frac{65 \cdot 64}{2} - 2 \cdot 64 = 3 \cdot 65 \cdot 32 - 128 = 6112$$

Por tanto los elementos de cada columna, fila ó diagonal doble sentido deberán sumar $6112/8 = 764$, cada semifila o semicolumna deberá sumar la mitad de eso, es decir 382, al igual que los elementos de los cuadrados $2 \times 2$, los cuadrados $4 \times 4$, deben sumar 4 veces el ultimo valor, esto es 1528, al igual que la suma de las esquinas, los cuadrados $6 \times 6$ deben sumar 3438.

Se puede observar dicho cuadrado en la figura 24.

Es posible corroborar que se cumplen todas las condiciones propuestas, reiterando que en este caso los elementos no son consecutivos, responden a la transformación lineal propuesta.

Se tiene también que los totales de las sumas guardan entre si una relación, que también obedece a la transformación lineal, así:

$$3 \cdot 280 - 8 \cdot 2 = 780 - 16 = 764$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 154 | 181 | 10 | 37 | 58 | 85 | 106 | 133 |
| 40 | 7 | 184 | 151 | 136 | 103 | 88 | 55 |
| 157 | 178 | 13 | 34 | 61 | 82 | 109 | 130 |
| 31 | 16 | 175 | 160 | 127 | 112 | 79 | 64 |
| 163 | 172 | 19 | 28 | 67 | 76 | 115 | 124 |
| 25 | 22 | 169 | 166 | 121 | 118 | 73 | 70 |
| 148 | 187 | 4 | 43 | 52 | 91 | 100 | 139 |
| 46 | 1 | 190 | 145 | 142 | 97 | 94 | 49 |

*Figura 24*

260 Es el total por columna fila o diagonal doble sentido del cuadrado original y 764 el resultado de la suma de los elementos respectivos generados por la transformación lineal, de igual forma, el total de la suma de las esquinas que equidistan del centro es 130 en el cuadrado inicial y 382 de los generados por la transformación lineal, y se cumple que:

$$3 \cdot 130 - 4 \cdot 2 = 390 - 8 = 382$$

El cuatro que multiplica al dos se interpreta como que en este caso se tienen cuatro elementos, cada uno de los cuales afecta con una cantidad constante de 2.

Por ultimo veremos que sucede cuando sumamos dos cuadrados mágicos del tipo de B.F. si adicionamos elemento a elemento se construye un nuevo cuadro, que mantiene las propiedades del cuadrado de B.F.

Esto lo podemos corroborar con un ejemplo, las figuras 25 y 26 son dos cuadrados mágicos del tipo B.F., la suma elemento a elemento de estos dos, se tiene en la figura 27.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 201 | 237 | 9 | 45 | 73 | 109 | 137 | 173 |
| 49 | 5 | 241 | 197 | 177 | 133 | 113 | 69 |
| 205 | 233 | 13 | 41 | 77 | 105 | 141 | 169 |
| 37 | 17 | 229 | 209 | 165 | 145 | 101 | 81 |
| 213 | 225 | 21 | 33 | 85 | 97 | 149 | 161 |
| 29 | 25 | 221 | 217 | 157 | 153 | 93 | 89 |
| 193 | 245 | 1 | 53 | 65 | 117 | 129 | 181 |
| 57 | -3 | 249 | 189 | 185 | 125 | 121 | 61 |

*Figura 25*

Que a su vez cumple con las propiedades expuestas, así por fila columna o diagonal invertida suma 1244 $(260 + 984)$, los cuadrados de $2 \times 2$, semifila, semicolumna o esquinas de cuadrados 622 $(130 + 492)$, y así cada resultado cumpliendo también con ser la sumatoria de los respectivos resultados de los cuadrados de las figuras 25 y 26.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 29 | 36 | 45 | 52 | 61 | 4 | 13 |
| 46 | 35 | 30 | 19 | 14 | 3 | 62 | 51 |
| 21 | 28 | 37 | 44 | 53 | 60 | 5 | 12 |
| 43 | 38 | 27 | 22 | 11 | 6 | 59 | 54 |
| 23 | 26 | 39 | 42 | 55 | 58 | 7 | 10 |
| 41 | 40 | 25 | 24 | 9 | 8 | 57 | 56 |
| 18 | 31 | 34 | 47 | 50 | 63 | 2 | 15 |
| 48 | 33 | 32 | 17 | 16 | 1 | 64 | 49 |

*Figura 26*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 221 | 266 | 45 | 90 | 125 | 170 | 141 | 186 |
| 95 | 40 | 271 | 216 | 191 | 136 | 175 | 120 |
| 226 | 261 | 50 | 85 | 130 | 165 | 146 | 181 |
| 80 | 55 | 256 | 231 | 176 | 151 | 160 | 135 |
| 236 | 251 | 60 | 75 | 140 | 155 | 156 | 171 |
| 70 | 65 | 246 | 241 | 166 | 161 | 150 | 145 |
| 211 | 276 | 35 | 100 | 115 | 180 | 131 | 196 |
| 105 | 30 | 281 | 206 | 201 | 126 | 185 | 110 |

*Figura 27*

# 3. Construcción de Cuadrado Mágico 16 $\times$ 16, Tipo Benjamin Franklin (B.F.)

## 3.1. Objetivo

Con lo anteriormente expuesto, me propongo a continuación construir un cuadrado mágico de 16 $\times$ 16, que cumpla las propiedades del propuesto por Benjamín Franklin.

## 3.2. Análisis

El cuadrado deseado es de 16 columnas y 16 filas, por tanto contiene 256 números, enteros del 1 al 256, lo que permite concluir que el total de la sumatoria de todos sus elementos será de $256 \times 257/2 = 32896$, se desea que cada fila contenga 16 elementos que sumen un mismo valor, este valor será $32896/16 = 2056$. Consecuentemente cada semifila tendrá 8 elementos que deben sumar $2056/2 = 1028$, para este caso se tendrá además que cada cuarto de fila deberá sumar $1028/2 = 514$.

Igual razonamiento se podrá hacer para las columnas, por tanto los elementos de cada columna deberán sumar 2056, de cada semicolumna 1028 y de cada cuarta parte de columna 514.

Por otra parte el cuadrado de 16 $\times$ 16 contiene 64 cuadrados 2 $\times$ 2 independientes que por tanto deberán sumar $32896/64 = 514$, valor equivalente a la suma de los elementos de cada cuarto de fila o de cada cuarto de columna.

Con la intención de construir los mismos, se establecerán dos normas básicas que posibiliten la construcción de cada cuadrado de orden $2 \times 2$.

Para las filas cada par deberá sumar $514/2 = 257$, esto da duplas de la forma (1,256), (2,255), (3,254), . . ., (128,129), es decir se tendrán 128 duplas.

Para las columnas, la primera de ellas deberá sumar 256, con elementos impares, esto da 64 duplas de la forma (1,255), (3,253), (5,251), . . ., (127,129), y la segunda columna deberá sumar 258 con elementos pares, así se generarán también 64 duplas de la forma (2,256), (4,254), (6,252), . . ., (128,130).

Con lo cual podremos construir cuadrados de la forma:

| | |
|---|---|
| 255 | 2 |
| 1 | 256 |

| | |
|---|---|
| 253 | 4 |
| 3 | 254 |

| | |
|---|---|
| 251 | 6 |
| 5 | 252 |

| | |
|---|---|
| 249 | 8 |
| 7 | 250 |

| | |
|---|---|
| 247 | 10 |
| 9 | 248 |

| | |
|---|---|
| 245 | 12 |
| 11 | 246 |

En total deberán construirse 64, respetando el esquema planteado. Luego ubicaremos estos cuadrados de forma simétrica, es decir alternando, siguiendo el siguiente proceso[2].

1. Iniciando en la fila inferior, la doceava, ubicaremos el cuadrado del 1 en las columnas cuarta y quinta, desde la izquierda. El cuadrado del tres lo ubicaremos, invirtiendo filas y columnas en las dos primeras filas y en las mismas columnas, el cuadrado del 5 en las filas tercera y cuarta, el del siete invirtiendo sus filas, lo ubicamos en las filas decimotercera y decimocuarta, y así hasta llenar las columnas cuarta y quinta, alternando columnas directas o columnas invertidas, iniciando desde la inferior, luego la superior hasta concluir por el centro en las filas cuarta y quinta, como se observa en la figura 28.

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 | C10 | C11 | C12 | C13 | C14 | C15 | C16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F1 | | | | 254 | 3 | | | | | | | | | | | |
| F2 | | | | 4 | 253 | | | | | | | | | | | |
| F3 | | | | 251 | 6 | | | | | | | | | | | |
| F4 | | | | 5 | 252 | | | | | | | | | | | |
| F5 | | | | 245 | 12 | | | | | | | | | | | |
| F6 | | | | 11 | 246 | | | | | | | | | | | |
| F7 | | | | 244 | 13 | | | | | | | | | | | |
| F8 | | | | 14 | 243 | | | | | | | | | | | |
| F9 | | | | 242 | 15 | | | | | | | | | | | |
| F10 | | | | 16 | 241 | | | | | | | | | | | |
| F11 | | | | 247 | 10 | | | | | | | | | | | |
| F12 | | | | 9 | 248 | | | | | | | | | | | |
| F13 | | | | 250 | 7 | | | | | | | | | | | |
| F14 | | | | 8 | 249 | | | | | | | | | | | |
| F15 | | | | 255 | 2 | | | | | | | | | | | |
| F16 | | | | 1 | 256 | | | | | | | | | | | |

*Figura 28*

[2] Numeraremos a las filas de la primera a la decimosexta, de arriba hacia abajo, y las columnas de igual forma de la primera a la decimosexta de izquierda a derecha. Además, a cada cuadrado de orden $2 \times 2$, lo designaremos en función del menor valor que esté presente en el mismo, así los expuestos anteriormente, de izquierda a derecha se designarán, cuadrados del 1, del 3, del 5, del 7, del 9 y del 11.

2. Luego tomamos los cuadrados desde el del 17 hasta aquél del 31. Empezamos ubicándolas en orden inverso a la del grupo anterior, esto es iniciando en las filas novena y décima, manteniendo la alternabilidad ya expuesta anteriormente, y ubicando las partes correspondientes a cada cuadrado en las columnas tercera y séptima, cambiando las columnas de cada cuadro pequeño, se puede observar esto en la figura 29.

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 | C10 | C11 | C12 | C13 | C14 | C15 | C16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F1 | | 30 | | 254 | 3 | | 227 | | | | | | | | | |
| F2 | | 228 | | 4 | 253 | | 29 | | | | | | | | | |
| F3 | | 27 | | 251 | 6 | | 230 | | | | | | | | | |
| F4 | | 229 | | 5 | 252 | | 28 | | | | | | | | | |
| F5 | | 21 | | 245 | 12 | | 236 | | | | | | | | | |
| F6 | | 235 | | 11 | 246 | | 22 | | | | | | | | | |
| F7 | | 20 | | 244 | 13 | | 237 | | | | | | | | | |
| F8 | | 238 | | 14 | 243 | | 19 | | | | | | | | | |
| F9 | | 18 | | 242 | 15 | | 239 | | | | | | | | | |
| F10 | | 240 | | 16 | 241 | | 17 | | | | | | | | | |
| F11 | | 23 | | 247 | 10 | | 234 | | | | | | | | | |
| F12 | | 233 | | 9 | 248 | | 24 | | | | | | | | | |
| F13 | | 26 | | 250 | 7 | | 231 | | | | | | | | | |
| F14 | | 232 | | 8 | 249 | | 25 | | | | | | | | | |
| F15 | | 31 | | 255 | 2 | | 226 | | | | | | | | | |
| F16 | | 225 | | 1 | 256 | | 32 | | | | | | | | | |

*Figura 29*

3. Ahora ubicaremos los cuadrados, desde aquél que correponde al 33 hasta el que se relaciona con 47, cambiando las columnas e iniciando desde la última fila, luego las primeras, con las alternabilidades ya expuestas, ubicando las partes en la columna octava y la primera como se observa en la figura 30.

4. A continuación, e iniciando por las filas centrales, ubicaremos, respetando el orden de las columnas, los cuadrados, desde el que corresponde al 49, hasta el que se construyó en función del 63, estos los ubicamos en las columna tercera y sexta, como se puede ver en la figura 31, donde además vemos que se ha llenado ya toda la parte izquierda del cuadrado, esto es de la primera columna hasta la octava. Los elementos que se encuentran son los números del 1 al 64 y del 193 al 256.

5. Por último ubicaremos los elementos de las columnas novena a la decimosexta, así para cada elemento de la columna novena, tomamos el valor correspondiente a esa fila de la columna primera y si éste es menor que 128, sumamos 128, en cambio si es mayor le restaremos 128, ubicando su resultado en la respectiva celda, para la décima columna aplicamos lo mismo pero a los elementos de la segunda columna, y así hasta construir la decimosexta columna en base a los de la octava, el resultado de este procedimiento se observa en la figura 32, donde el cuadrado se ha concluido y además se tiene que se cumplen todas las condiciones del cuadrado de B.F.

Se tiene que todos los elementos de cada fila, columna y diagonales dobladas suman 2056, en cada semifila y cada semicolumna sus elementos suman 1028, cada cuarta parte de fila o columna contiene elementos cuya sumatoria es 514, al igual de los elementos que constituyen esquinas de cualquier rectángulo interior ó los elementos de cualquier cuadrado $2 \times 2$, que en este caso existen 225. Tenemos también que los elementos de los cuadrados $4 \times 4$, que en

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 | C10 | C11 | C12 | C13 | C14 | C15 | C16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F1 | 35 | 30 | | 254 | 3 | | 227 | 222 | | | | | | | | |
| F2 | 221 | 228 | | 4 | 253 | | 29 | 36 | | | | | | | | |
| F3 | 38 | 27 | | 251 | 6 | | 230 | 219 | | | | | | | | |
| F4 | 220 | 229 | | 5 | 252 | | 28 | 37 | | | | | | | | |
| F5 | 44 | 21 | | 245 | 12 | | 236 | 213 | | | | | | | | |
| F6 | 214 | 235 | | 11 | 246 | | 22 | 43 | | | | | | | | |
| F7 | 45 | 20 | | 244 | 13 | | 237 | 212 | | | | | | | | |
| F8 | 211 | 238 | | 14 | 243 | | 19 | 46 | | | | | | | | |
| F9 | 47 | 18 | | 242 | 15 | | 239 | 210 | | | | | | | | |
| F10 | 209 | 240 | | 16 | 241 | | 17 | 48 | | | | | | | | |
| F11 | 42 | 23 | | 247 | 10 | | 234 | 215 | | | | | | | | |
| F12 | 216 | 233 | | 9 | 248 | | 24 | 41 | | | | | | | | |
| F13 | 39 | 26 | | 250 | 7 | | 231 | 218 | | | | | | | | |
| F14 | 217 | 232 | | 8 | 249 | | 25 | 40 | | | | | | | | |
| F15 | 34 | 31 | | 255 | 2 | | 226 | 223 | | | | | | | | |
| F16 | 224 | 225 | | 1 | 256 | | 32 | 33 | | | | | | | | |

*Figura 30*

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 | C10 | C11 | C12 | C13 | C14 | C15 | C16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F1 | 35 | 30 | 195 | 254 | 3 | 62 | 227 | 222 | | | | | | | | |
| F2 | 221 | 228 | 61 | 4 | 253 | 196 | 29 | 36 | | | | | | | | |
| F3 | 38 | 27 | 198 | 251 | 6 | 59 | 230 | 219 | | | | | | | | |
| F4 | 220 | 229 | 60 | 5 | 252 | 197 | 28 | 37 | | | | | | | | |
| F5 | 44 | 21 | 204 | 245 | 12 | 53 | 236 | 213 | | | | | | | | |
| F6 | 214 | 235 | 54 | 11 | 246 | 203 | 22 | 43 | | | | | | | | |
| F7 | 45 | 20 | 205 | 244 | 13 | 52 | 237 | 212 | | | | | | | | |
| F8 | 211 | 238 | 51 | 14 | 243 | 206 | 19 | 46 | | | | | | | | |
| F9 | 47 | 18 | 207 | 242 | 15 | 50 | 239 | 210 | | | | | | | | |
| F10 | 209 | 240 | 49 | 16 | 241 | 208 | 17 | 48 | | | | | | | | |
| F11 | 42 | 23 | 202 | 247 | 10 | 55 | 234 | 215 | | | | | | | | |
| F12 | 216 | 233 | 56 | 9 | 248 | 201 | 24 | 41 | | | | | | | | |
| F13 | 39 | 26 | 199 | 250 | 7 | 58 | 231 | 218 | | | | | | | | |
| F14 | 217 | 232 | 57 | 8 | 249 | 200 | 25 | 40 | | | | | | | | |
| F15 | 34 | 31 | 194 | 255 | 2 | 63 | 226 | 223 | | | | | | | | |
| F16 | 224 | 225 | 64 | 1 | 256 | 193 | 32 | 33 | | | | | | | | |

*Figura 31*

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 | C10 | C11 | C12 | C13 | C14 | C15 | C16 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F1 | 35 | 30 | 195 | 254 | 3 | 62 | 227 | 222 | 163 | 158 | 67 | 126 | 131 | 190 | 99 | 94 | 2056 |
| F2 | 221 | 228 | 61 | 4 | 253 | 196 | 29 | 36 | 93 | 100 | 189 | 132 | 125 | 68 | 157 | 164 | 2056 |
| F3 | 38 | 27 | 198 | 251 | 6 | 59 | 230 | 219 | 166 | 155 | 70 | 123 | 134 | 187 | 102 | 91 | 2056 |
| F4 | 220 | 229 | 60 | 5 | 252 | 197 | 28 | 37 | 92 | 101 | 188 | 133 | 124 | 69 | 156 | 165 | 2056 |
| F5 | 44 | 21 | 204 | 245 | 12 | 53 | 236 | 213 | 172 | 149 | 76 | 117 | 140 | 181 | 108 | 85 | 2056 |
| F6 | 214 | 235 | 54 | 11 | 246 | 203 | 22 | 43 | 86 | 107 | 182 | 139 | 118 | 75 | 150 | 171 | 2056 |
| F7 | 45 | 20 | 205 | 244 | 13 | 52 | 237 | 212 | 173 | 148 | 77 | 116 | 141 | 180 | 109 | 84 | 2056 |
| F8 | 211 | 238 | 51 | 14 | 243 | 206 | 19 | 46 | 83 | 110 | 179 | 142 | 115 | 78 | 147 | 174 | 2056 |
| F9 | 47 | 18 | 207 | 242 | 15 | 50 | 239 | 210 | 175 | 146 | 79 | 114 | 143 | 178 | 111 | 82 | 2056 |
| F10 | 209 | 240 | 49 | 16 | 241 | 208 | 17 | 48 | 81 | 112 | 177 | 144 | 113 | 80 | 145 | 176 | 2056 |
| F11 | 42 | 23 | 202 | 247 | 10 | 55 | 234 | 215 | 170 | 151 | 74 | 119 | 138 | 183 | 106 | 87 | 2056 |
| F12 | 216 | 233 | 56 | 9 | 248 | 201 | 24 | 41 | 88 | 105 | 184 | 137 | 120 | 73 | 152 | 169 | 2056 |
| F13 | 39 | 26 | 199 | 250 | 7 | 58 | 231 | 218 | 167 | 154 | 71 | 122 | 135 | 186 | 103 | 90 | 2056 |
| F14 | 217 | 232 | 57 | 8 | 249 | 200 | 25 | 40 | 89 | 104 | 185 | 136 | 121 | 72 | 153 | 168 | 2056 |
| F15 | 34 | 31 | 194 | 255 | 2 | 63 | 226 | 223 | 162 | 159 | 66 | 127 | 130 | 191 | 98 | 95 | 2056 |
| F16 | 224 | 225 | 64 | 1 | 256 | 193 | 32 | 33 | 96 | 97 | 192 | 129 | 128 | 65 | 160 | 161 | 2056 |
| | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | 2056 | |

*Figura 32*

este caso existen 169, suman 2056, los cuadrados $6 \times 6$, que son 121, contienen elementos que suman todos 4626, los 81 cuadrados $8 \times 8$ tienen elementos que suman 8224, los 49 cuadrados $10 \times 10$ contienen elementos que suman 12850, los 25 cuadrados $12 \times 12$ contienen elementos que suman 18504 y los 9 cuadrados $14 \times 14$ tienen elementos que suman 25186[3].

## 3.3. Variaciones al Cuadrado $16 \times 16$

Si queremos construir cuadrados mágicos intercambiando filas debemos cambiar pares de filas que estén en la misma mitad superior o inferior de la tabla, teniendo en cuenta que la suma de sus columnas coincidan, siendo así se mantendrán todas las propiedades. Si cambiamos dos pares de filas donde los valores sumados por columna coincidan, el resultado será un cuadrado que no cumpla la propiedad del cuarto de columna.

Los conjuntos de filas que se ubican de la fila primera a la octava, pueden dividirse en cuatro grupos, ademas, por la propiedad de las cuartos de filas, por cada una que se fije se tendrán cuatro que cumplan todas las condiciones y dos adicionales que no cumplen las de la cuarta parte de la columna. Como hay cuatro, se tendrán dieciséis que cumplen todas las propiedades expuestas y ocho más que cumplen todas excepto la de los cuartos de cada columna.

Un análisis similar se puede realizar también con las ultimas filas, de la novena a la decimosexta, en total tendremos entonces doscientas cincuenta y seis ($16 \times 16 = 256$), posibilidades de arreglos que cumplen todas las condiciones y sesenta y cuatro más ($8 \times 8 = 64$) cumplirán todas las reglas excepto la última de los cuartos de columna.

También se puede cambiar todas las ocho filas superiores con las inferiores, lo que duplica las posibilidades, esto da 512 cuadrados que cumplen todas las propiedades y 128 más que no cumplen únicamente la última.

Para las columnas, los resultados serán idénticos, ya que responden a un similar razona-

[3] Aquí se ha introducido una nueva condición, que la cuarta parte de las filas o de las columnas coincidan en suma.

miento. Entonces tendremos 512 combinaciones que cumplen todas las reglas y 640 que cumplen todas excepto la del cuarto de fila.

Entonces hay 262144 posibilidades de construir cuadrados mágicos de orden 16 que cumplan todas las leyes y 409600 que cumplen todas excepto la de cuartos de filas o columnas. Estas cantidades son grandes, sin embargo, con referencia a la cantidad total de combinaciones 256! (el factorial de 256), la cantidad es mínima.

Vemos un ejemplo con la figura 33.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | 30 | 195 | 254 | 3 | 62 | 227 | 222 | 163 | 158 | 67 | 126 | 131 | 190 | 99 | 94 |
| 221 | 228 | 61 | 4 | 253 | 196 | 29 | 36 | 93 | 100 | 189 | 132 | 125 | 68 | 157 | 164 |
| 46 | 19 | 206 | 243 | 14 | 51 | 238 | 211 | 174 | 147 | 78 | 115 | 142 | 179 | 110 | 83 |
| 212 | 237 | 52 | 13 | 244 | 205 | 20 | 45 | 84 | 109 | 180 | 141 | 116 | 77 | 148 | 173 |
| 38 | 27 | 198 | 251 | 6 | 59 | 230 | 219 | 166 | 155 | 70 | 123 | 134 | 187 | 102 | 91 |
| 220 | 229 | 60 | 5 | 252 | 197 | 28 | 37 | 92 | 101 | 188 | 133 | 124 | 69 | 156 | 165 |
| 43 | 22 | 203 | 246 | 11 | 54 | 235 | 214 | 171 | 150 | 75 | 118 | 139 | 182 | 107 | 86 |
| 213 | 236 | 53 | 12 | 245 | 204 | 21 | 44 | 85 | 108 | 181 | 140 | 117 | 76 | 149 | 172 |
| 34 | 31 | 194 | 255 | 2 | 63 | 226 | 223 | 162 | 159 | 66 | 127 | 130 | 191 | 98 | 95 |
| 224 | 225 | 64 | 1 | 256 | 193 | 32 | 33 | 96 | 97 | 192 | 129 | 128 | 65 | 160 | 161 |
| 39 | 26 | 199 | 250 | 7 | 58 | 231 | 218 | 167 | 154 | 71 | 122 | 135 | 186 | 103 | 90 |
| 217 | 232 | 57 | 8 | 249 | 200 | 25 | 40 | 89 | 104 | 185 | 136 | 121 | 72 | 153 | 168 |
| 42 | 23 | 202 | 247 | 10 | 55 | 234 | 215 | 170 | 151 | 74 | 119 | 138 | 183 | 106 | 87 |
| 216 | 233 | 56 | 9 | 248 | 201 | 24 | 41 | 88 | 105 | 184 | 137 | 120 | 73 | 152 | 169 |
| 47 | 18 | 207 | 242 | 15 | 50 | 239 | 210 | 175 | 146 | 79 | 114 | 143 | 178 | 111 | 82 |
| 209 | 240 | 49 | 16 | 241 | 208 | 17 | 48 | 81 | 112 | 177 | 144 | 113 | 80 | 145 | 176 |

*Figura 33*

Al igual que ocurre en órdenes inferiores, cualquier cuadrado de orden 16 responderá a cualquier combinación lineal manteniendo las propiedades, aunque con sucesiones de números ya no consecutivas, donde las constantes de cada propiedad se obtendrán también aplicando la combinación lineal a cada uno de los resultados iniciales.

Y por último, se tendrá también que la suma de cuadrados mágicos B.F. $16 \times 16$, da como resultado otro cuadrado mágico de iguales propiedades, para calcular las constantes de cada propiedad se deberán sumar las respectivas constantes de cada cuadro original.

## 4. Método General de Construcción de un Cuadrado Mágico B.F.

EXPLICACIÓN: Según lo analizado, la construcción de los cuadrados mágicos B.F. se basa en construir cuadrados $2 \times 2$, que contengan sin repetición todos los elementos del cuadrado, los elementos de cada tabla son números consecutivos que inician en 1 y van hasta el orden del cuadrado elevado al cuadrado.

Esos cuadrados tienen la estructura que muestra la figura 34. En dicho cuadro se cumplen varias condiciones a tener en cuenta.

$a + b = c + d$, es decir horizontalmente deben sumar un valor constante, que debe ser igual a 1 más el máximo valor presente, que es el orden al cuadrado. Por ejemplo, si deseamos construir

| | |
|---|---|
| c | d |
| a | b |

*Figura 34*

cuadrados mágicos B.F. $8 \times 8$, el máximo será 64 y la suma será 65, si deseamos cuadrados B.F. $16 \times 16$, el máximo será 256, dando una suma de 257, si el orden del cuadrado es $24 \times 24$, el máximo será 576, que da un resultado de 577, como suma constante horizontal y así sucesivamente, sumando los totales de las dos filas tendremos entonces el doble. En el caso de $24 \times 24$, sumarán 1144.

Verticalmente, en cambio tendremos la sumatoria $a + c$ y $b + d$, que por construcción serán iguales a la suma vertical menos uno, con elementos impares, e igual a la sumatoria vertical más uno, cuando los elementos son pares, así la primera columna, en el caso de la $24 \times 24$, sumará 576 y la segunda 578, de forma que los totales por columnas coincidan con el total por filas, para nuestro caso 1144.

| | |
|---|---|
| c1 | d1 |
| a1 | b1 |

| | |
|---|---|
| c2 | d2 |
| a2 | b2 |

| | |
|---|---|
| c3 | d3 |
| a3 | b3 |

| | |
|---|---|
| c4 | d4 |
| a4 | b4 |

*Figura 35*

Para el análisis recordemos entonces que las filas $2 \times 2$ suman un valor constante, y las columnas tienen dos posibles valores que se diferencian con la suma horizontal en más 1 o menos uno, por lo que sus totales coinciden. Entonces, teniendo en cuenta que un cuadrado $4 \times 4$, contiene 16 elementos, que los podemos separar en cuatro cuadrados $2 \times 2$ (figura 35), para luego ubicarlos de la siguiente manera para construir nuevos cuadrados $4 \times 4$: el primer cuadrado en la parte inferior, en la superior el segundo cuadrado, éste invirtiendo filas y columnas, el tercer cuadrado lo ubicamos una columna a cada lado, en la parte superior y el cuarto lo ubicamos en la parte inferior, invirtiendo filas y columnas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| c3 | b2 | a2 | d3 |
| a3 | d2 | c2 | b3 |
| b4 | c1 | d1 | a4 |
| d4 | a1 | b1 | c4 |

*Figura 36*

Cuadrado $4 \times 4$, (figura 36), donde la suma de cada par horizontal que coincidan en los cuadrados pequeños es constante que la designaremos K.

$$a1 + b1 = c1 + d1 = a2 + b2 = c2 + d2 = a3 + b3 = c3 + d3 = a4 + b4 = c4 + d4 = K$$

Verticalmente tendremos dos resultados posibles que se repetirán en los cuatro subcuadrados, así $a1 + c1 = a2 + c2 = a3 + c3 = a4 + c4 = K - 1$, con elementos impares, y $b1 + d1 = b2 + d2 = b3 + d3 = b4 + d4 = K + 1$, con elementos pares.

Aclarando que en los cuadrados inferiores invertimos las columnas con la finalidad de que la suma total coincida, ya que de esa manera las sumas por filas o por columnas es siempre constante e igual a 2K.

Para las filas se tiene que:

c3 + d3 + b2 + a2 = K + K = 2K

a3 + b3 + d2 + c2 = K + K = 2K

b4 + a4 + c1 + d1 = K + K = 2K

d4 + c4 + a1 + b1 = K + K = 2K

Para las columnas se tiene que:

c3 + a3 + b4 + d4 = K − 1 + K + 1 = 2K

b2 + d2 + c1 + a1 = K + 1 + K − 1 = 2K

a2 + c2 + d1 + b1 = K − 1 + K + 1 = 2K

b3 + d3 + a4 + c4 = K + 1 + K − 1 = 2K

Además para las esquinas rectangulares tendremos que:

c3 + d3 + d4 + c4 = K + K = 2K

a3 + b3 + a4 + d4 = K + K = 2K

a1 + b1 + a2 + b2 = K + K = 2K

c1 + d1 + c2 + d2 = K + K = 2K

Se puede observar también en este caso que las diagonales doble sentido, se comportan de distinta manera, las derecha-izquierda son: (c3,d2,c1,d4), (b2,c2,d1,a1), (a2,b3,a4,b1) y (d3,a3,b4, c4); las izquierda-derecha son: (d3,c2,d1,c4), (a2,d2,c1,b1), (b2,a3,b4,a1) y (c3,b3,a4,d4), que si sumamos sus elementos, los resultados son diversos, se debe anotar en cambio que si vemos las otras diagonales en dos direcciones tenemos, las de abajo-arriba son (c3,d2,c2,d3), (a3,c1,d1,b3), (b4,a1,b1,a4) y (d4,b2,a2,c4) y las de arriba-abajo son (d4,c1,d1,c4), (b4,d2,c2,a4), (a3,b2,a2,a3) y (c3,a1,b1,d3), estas ocho en cambio tienen elementos de dos cuadrados que sabemos en cada caso suman K, en consecuencia todas estas diagonales doble dirección suman 2K.

Se debe anotar también que las medias filas suman una constante K, no así las medias columnas que suman K + 1 ó K − 1.

Por lo indicado no existen cuadrados B.F. de orden cuatro por cuatro.

Es también obvio que como nos basamos en construcciones de orden $2 \times 2$, y lo que hacemos es ir uniéndolas una a continuación de otra, siempre aumentara 2 en su orden, por lo que no pueden existir cuadrados B.F. de orden impar.

Si intentamos construir un cuadrado mágico B.F. de orden $6 \times 6$, como sabemos que cada columna de orden $2 \times 2$, puede sumar K + 1 ó K − 1, y cada columna del cuadrado $6 \times 6$, estará compuesta por 3 de orden $2 \times 2$ alternando la suma, es decir $(K - 1) + (K + 1) + (K - 1) = 3K - 1$ en unos casos y $(K + 1) + (K - 1) + (K + 1) = 3K + 1$ en otros, que no son iguales, no se cumplirá que la suma de las columnas se mantiene constante. Lo mismo sucederá con los cuadrados cuyo orden es el doble de un numero impar, es decir de orden $6 \times 6$, $10 \times 10$, $14 \times 14$, $18 \times 18$, $22 \times 22$ y en general de orden $(2(2n - 1)) \times (2(2n - 1))$, donde n es elemento de los números naturales.

Para el caso del cuadrado mágico B.F. de $8 \times 8$, iniciaremos indicando que este contiene 64 elementos distintos, distribuidos en 16 cuadrados $2 \times 2$, que designaremos de la manera que se observa en la figura 37.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c1 | d1 | c2 | d2 | c3 | d3 | c4 | d4 | c5 | d5 | c6 | d6 |
| a1 | b1 | a2 | b2 | a3 | b3 | a4 | b4 | a5 | b5 | a6 | b6 |
| c7 | d7 | c8 | d8 | c9 | d9 | c10 | d10 | c11 | d11 | c12 | d12 |
| a7 | b7 | a8 | b8 | a9 | b9 | a10 | b10 | a11 | b11 | a12 | b12 |
| c13 | d13 | c14 | d14 | c15 | d15 | c16 | d16 | | | | |
| a13 | b13 | a14 | b14 | a15 | b15 | a16 | b16 | | | | |

*Figura 37*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 63 | 2 | 61 | 4 | 59 | 6 | 57 | 8 | 55 | 10 | 53 | 12 |
| 1 | 64 | 3 | 62 | 5 | 60 | 7 | 58 | 9 | 56 | 11 | 54 |
| 51 | 14 | 49 | 16 | 47 | 18 | 45 | 20 | 43 | 22 | 41 | 24 |
| 13 | 52 | 15 | 50 | 17 | 48 | 19 | 46 | 21 | 44 | 23 | 42 |
| 39 | 26 | 37 | 28 | 35 | 30 | 33 | 32 | | | | |
| 25 | 40 | 27 | 38 | 29 | 36 | 31 | 34 | | | | |

*Figura 38*

Para claridad en la explicación respetaremos este orden y llamaremos cuadrado n-ésimo al que esté estructurado de la siguiente manera:

Así los dieciséis cuadrados $2 \times 2$, llenados con elementos se observan en la figura 38.

Se deben indicar las relaciones que deben existir entre los elementos.

Entre los elementos del primer cuadrado se tiene la siguiente relación: $a1 + b1 = 65$, $c1 + d1 = 65$, $d1 = a1 + 1$ y $c1 = b1 - 1$, que puede generalizarse para cualquier cuadrado y se tendrá que entre los elementos de un cuadrado n se cumple que:

$$an + bn = 65,\ cn + dn = 65,\ dn = an + 1 \text{ y } cn = bn - 1.\ (K = 65)$$

Además se tiene relaciones entre los elementos de distintos cuadrados así:

$$an = a1 + 2 \times (n - 1)$$

$$bn = b1 + 2 \times (n - 1)$$

$$cn = c1 + 2 \times (n - 1)$$

$$dn = d1 + 2 \times (n - 1)$$

donde n es un entero entre 1 y 16, que caracteriza el cuadrado $2 \times 2$, al que cada elemento pertenece.

Entonces si sumamos los elementos del primer cuadrado $2 \times 2$, tendremos que:

$$a1 + b1 + c1 + d1 = a1 + 65 - a1 + (65 - a1) + (65 - d1) + d1 = 130 = 2K$$

Si realizamos el cálculo para el n-ésimo cuadrado:

$$an + bn + cn + dn =$$

$$= a1 + 2 \times (n - 1) + b1 - 2 \times (n \times 1) + c1 - 2 \times (n \times 1) + d1 + 2\times (n - 1) =$$
$$= a1 + b1 + c1 + d1 = 130 = 2K$$

Por tanto se tiene que todas las filas suman K (65) y las columnas, la primera $K - 1$ (64) y la segunda $K + 1$ (66), como vimos anteriormente.

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F1 | b7 | c2 | d2 | a7 | d10 | a15 | b15 | c10 |
| F2 | d7 | a2 | b2 | c7 | b10 | c15 | d15 | a10 |
| F3 | c6 | b3 | a3 | d6 | a11 | d14 | c14 | b11 |
| F4 | a6 | d3 | c3 | b6 | c11 | b14 | a14 | d11 |
| F5 | c5 | b4 | b4 | d5 | a12 | d13 | c13 | b12 |
| F6 | a5 | d4 | c4 | b5 | c12 | b13 | a13 | d12 |
| F7 | b8 | c1 | d1 | a8 | d9 | a16 | b16 | c9 |
| F8 | d8 | a1 | b1 | c8 | b9 | c16 | d16 | a9 |

*Figura 39*

A continuación ubicamos los cuadrados de orden $2 \times 2$ en un cuadrado de orden $8 \times 8$, como se observa en la figura 39.

Dividimos la tabla horizontalmente en dos partes iguales, es decir de cuatro columnas cada una.

Ubicamos en la segunda y tercera columna los cuatro primeros cuadrados $2 \times 2$, el primero en la parte inferior, séptima y octava fila, el segundo, en la parte superior, primera y segunda fila, el tercero, invirtiendo filas y columnas, en la parte superior, tercera y cuarta fila, y el cuarto, también invirtiendo sus filas y columnas en la parte inferior, quinta y sexta fila. Una columna del cuadrado $2 \times 2$ se ubicará en la primera columna del cuadrado actual y la otra en la cuarta, allí ubicaremos los siguientes cuatro cuadrados: invirtiendo el orden, el quinto ira en la parte inferior, filas quinta y sexta, el sexto en la parte superior filas tercera y cuarta, el séptimo, invirtiendo sus filas y columnas en la parte superior, primera y segunda fila y el octavo, invirtiendo sus filas y columnas en la parte inferior, séptima y octava fila.

Los siguientes cuatro cuadrados $2 \times 2$, del noveno al decimosegundo, los ubicaremos separando sus columnas: la primera en la columna quinta y la otra en la octava. Iniciamos invirtiendo columnas del noveno cuadrado y ubicándolo en la parte inferior, filas séptima y octava, el décimo, también invirtiendo columnas, lo ubicaremos en la parte superior, primera y segunda fila, el decimoprimer cuadrado, invirtiendo filas, se ubicará también en la parte superior, primera y segunda fila, y el decimosegundo, también invirtiendo filas, se ubicará en la parte inferior, en las filas quinta y sexta.

Para ubicar los últimos cuatro cuadrados $2 \times 2$, usaremos las columnas sexta y séptima, y procedemos tomando el cuadrado decimotercero, invirtiendo sus columnas y lo ubicamos en la parte inferior, quinta y sexta fila, el decimocuarto cuadrado, invirtiendo columnas, lo ubicamos en la parte superior, tercera y cuarta fila, el decimoquinto cuadrado, invirtiendo sus filas, lo ubicaremos en la parte superior, primera y segunda fila y, el último cuadrante, invirtiendo sus filas, lo ubicaremos en la parte inferior, filas séptima y octava.

En la práctica, existe una forma de llenar la segunda mitad, una vez construida la primera, que ya se utilizó y que sustituiría a los pasos cuarto y quinto.

Con esta construcción veremos cómo se cumplen algunas propiedades.

Si sumamos los elementos de las esquinas se tendrá que:

$$b7 + c10 + d8 + a9 = b1 - 2 \times 6 + c1 - 2 \times 9 + d1 + 2 \times 7 + a1 + 2 \times 8 =$$

$$= a1 + b1 + c1 + d1 - 12 - 18 + 14 + 16 = a1 + b1 + c1 + d1 = 130$$

También se pueden hacer los cálculos respectivos para el cuadrado $2 \times 2$ que se ubica en el centro mismo, esto es el cuadrado que muestra la figura 40.

| | |
|---|---|
| b6 | c11 |
| d5 | a12 |

*Figura 40*

Tenemos que

$$b6 + c11 + d5 + a11 = b1 - 2 \times 5 + c1 - 2 \times 9 + d1 + 2 \times 4 + a1 + 2 \times 10 =$$

$$b1 + c1 + d1 + a1 - 10 - 18 + 8 + 20 = b1 + c1 + d1 + a1 = 130$$

Esto se cumple para los elementos de las esquinas de cualquier rectángulo que tenga como centro el cuadrado anterior.

Tomemos algunos ejemplos: escogeremos esquinas de tres rectángulos distintos que cumplen la condición dada, que se observan en la figura 41.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b7 | **c2** | d2 | a7 | d10 | a15 | **b15** | c10 |
| d7 | a2 | b2 | c7 | b10 | c15 | d15 | a10 |
| c6 | **b3** | a3 | d6 | a11 | d14 | **c14** | b11 |
| **a6** | d3 | c3 | b6 | c11 | b14 | a14 | **d11** |
| **c5** | b4 | b4 | d5 | a12 | d13 | c13 | **b12** |
| a5 | **d4** | c4 | b5 | c12 | b13 | **a13** | d12 |
| b8 | c1 | d1 | a8 | d9 | a16 | b16 | c9 |
| d8 | **a1** | b1 | c8 | b9 | c16 | **d16** | a9 |

*Figura 41*

b3 + c14 + d4 + a13 = b1 − 2 × 2 + c1 − 2 x 13 + d1 + 3 x 2 + a1 + 2 x 12 = b1 + c1 + d1 + a1 − 4 − 26 + 6 + 24 = b1 + c1 + d1 + a1 = 130

c2 + b15 + a1 + d16 = c1 − 2 × 1 + b1 − 2 × 14 + a1 + d1 + 2 × 15 = c1 + b1 + a1 + d1 − 2 − 28 + 30 = c1 + b1 + a1 + d1 = 130

a6 + d11 + c5 + b12 = a1 + 2 × 5 + d1 + 2 ×10 + c1 − 2 × 4 + b1 − 2 × 11 = a1 + d1 + c1 + b1 + 10 + 20 − 8 − 22 = a1 + d1 + c1 + b1 = 130

Y así podríamos ver que para cualquier conjunto de elementos que sean esquina de un rectángulo que tenga como centro el cuadrado dado, la suma es 130.

Otra propiedad importante es aquella de las diagonales doble sentido, en este caso existen 16 diagonales izquierda-derecha, 16 derecha-izquierda, 16 abajo-arriba y 16 arriba-abajo, calculemos la suma de los elementos de algunas de ellas.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **b7** | c2 | d2 | a7 | d10 | a15 | b15 | c10 |
| d7 | **a2** | b2 | c7 | b10 | c15 | d15 | a10 |
| c6 | b3 | **a3** | d6 | a11 | d14 | c14 | b11 |
| a6 | d3 | c3 | **b6** | c11 | b14 | a14 | d11 |
| c5 | b4 | b4 | **d5** | a12 | d13 | c13 | b12 |
| a5 | d4 | **c4** | b5 | c12 | b13 | a13 | d12 |
| b8 | **c1** | d1 | a8 | d9 | a16 | b16 | c9 |
| **d8** | a1 | b1 | c8 | b9 | c16 | d16 | a9 |

*Figura 42*

En la figura 42 se tiene una diagonal doble sentido derecha-izquierda, si sumamos sus elementos tendremos:

$$b7 + a2 + a3 + b6 + d5 + c4 + c1 + d8 =$$

$$= b1 - 2 \times 6 + a1 + 2 \times 1 + a1 + 2 \times 2 + b1 - 2 \times 5 + d1 + 2 \times 4 + c1 - 2 \times 3 + c1 + d1 + 2 \times 7 =$$

$$= 2b1 + 2a1 + 2c1 + 2d1 - 12 + 2 + 4 - 10 + 8 - 6 + 14 = 2b1 + 2a1 + 2c1 + 2d1 =$$

$$= 2(b1 + a1 + c1 + d1) = 260$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b7 | c2 | d2 | a7 | d10 | a15 | **b15** | c10 |
| d7 | a2 | b2 | c7 | b10 | c15 | d15 | **a10** |
| **c6** | b3 | a3 | d6 | a11 | d14 | c14 | b11 |
| a6 | **d3** | c3 | b6 | c11 | b14 | a14 | d11 |
| c5 | **b4** | b4 | d5 | a12 | d13 | c13 | b12 |
| **a5** | d4 | c4 | b5 | c12 | b13 | a13 | d12 |
| b8 | c1 | d1 | a8 | d9 | a16 | b16 | **c9** |
| d8 | a1 | b1 | c8 | b9 | c16 | **d16** | a9 |

*Figura 43*

También podemos construir una de igual forma como se observa en la figura 43, si sumamos sus elementos tendremos:

$$b15 + a10 + c6 + d3 + b4 + a5 + c9 + d16 =$$
$$= b1 - 2 \times 14 + a1 + 2 \times 9 + c1 - 2 \times 5 + d1 + 2 \times 2 +$$
$$+ b1 - 2 \times 3 + a1 + 2 \times 4 + c1 - 2 \times 8 + d1 + 2 \times 15 =$$
$$= 2b1 + 2a1 + 2c1 + 2d1 - 28 + 18 - 10 + 4 - 6 + 8 - 16 + 30 = 2(b1 + a1 + c1 + d1) = 260$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b7 | c2 | **d2** | a7 | d10 | a15 | b15 | c10 |
| d7 | **a2** | b2 | c7 | b10 | c15 | d15 | a10 |
| **c6** | b3 | a3 | d6 | a11 | d14 | c14 | b11 |
| a6 | d3 | c3 | b6 | c11 | b14 | a14 | **d11** |
| c5 | b4 | b4 | d5 | a12 | d13 | c13 | **b12** |
| **a5** | d4 | c4 | b5 | c12 | b13 | a13 | d12 |
| b8 | **c1** | d1 | a8 | d9 | a16 | b16 | c9 |
| d8 | a1 | **b1** | c8 | b9 | c16 | d16 | a9 |

*Figura 44*

Veamos ahora la diagonal doble sentido izquierda-derecha, que se observa en la figura 44, la suma de sus elementos es:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d2+a2+c6+d11+b12+a5+c1+b1=}\\&=\mathrm{d1}+2\times 1+\mathrm{a1}+2\mathrm{z1}+\mathrm{c1}-2\times 5+\mathrm{b1}-2\times 11+\mathrm{d1}+2\times 10+\mathrm{a1}+2\times 4+\mathrm{c1}+\mathrm{b1}=\\&=2\mathrm{d1}+2\mathrm{a1}+2\mathrm{c1}+2\mathrm{b1}+2+2-10+20-22+8=2(\mathrm{d1}+\mathrm{a1}+\mathrm{c1}+\mathrm{b1})=260\end{aligned}$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b7 | c2 | d2 | a7 | d10 | a15 | b15 | c10 |
| d7 | a2 | b2 | c7 | b10 | c15 | d15 | a10 |
| **c6** | b3 | a3 | d6 | a11 | d14 | c14 | **b11** |
| a6 | **d3** | c3 | b6 | c11 | b14 | **a14** | d11 |
| c5 | b4 | **b4** | d5 | a12 | **d13** | c13 | b12 |
| a5 | d4 | c4 | **b5** | **c12** | b13 | a13 | d12 |
| b8 | c1 | d1 | a8 | d9 | a16 | b16 | c9 |
| d8 | a1 | b1 | c8 | b9 | c16 | d16 | a9 |

*Figura 45*

También hagamos un cálculo en los elementos de la diagonal abajo-arriba que se observa en la figura 45, su sumatoria es:

$$\begin{aligned}&\mathrm{c6+d3+a4+b5+c12+d13+a14+b11=}\\&=\mathrm{c1}-2\times 5+\mathrm{d1}+2\times 2+\mathrm{a1}+2\times 3+\mathrm{b1}-2\times 4+\mathrm{c1}-2\times 11+\\&+\mathrm{d1}+2\times 12+\mathrm{a1}+2\times 13+\mathrm{b1}+2\times 10=\\&=2\mathrm{c1}+2\mathrm{d1}+2\mathrm{a1}+2\mathrm{b1}-10+4+6-8-22+24+26-20=2(\mathrm{c1}+\mathrm{d1}+\mathrm{a1}+\mathrm{b1})=260\end{aligned}$$

Por último calcularemos la sumatoria de la diagonal arriba-abajo que se observa en la figura 46, los cálculos son:

$$\begin{aligned}&\mathrm{b7+a1+d1+b5+c12+a16+d16+c10=}\\&=\mathrm{b1}-2\times 6+\mathrm{a1}+\mathrm{d1}+\mathrm{b1}-2\times 4+\mathrm{c1}-2\times 11+\mathrm{a1}+2\times 15+\mathrm{d1}+2\times 15+\mathrm{c1}-2\times 9=\\&=2\mathrm{b1}+2\mathrm{a1}+2\mathrm{d1}+2\mathrm{c1}-12-8-22+30+30-18=2(\mathrm{b1}+\mathrm{a1}+\mathrm{d1}+\mathrm{c1})=260\end{aligned}$$

Se han realizado los cálculos y los elementos de las 64 diagonales doble sentido cumplen la propiedad (suma igual a 260).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **b7** | c2 | d2 | a7 | d10 | a15 | b15 | **c10** |
| d7 | a2 | b2 | c7 | b10 | c15 | d15 | a10 |
| c6 | b3 | a3 | d6 | a11 | d14 | c14 | b11 |
| a6 | d3 | c3 | b6 | c11 | b14 | a14 | d11 |
| c5 | b4 | b4 | d5 | a12 | d13 | c13 | b12 |
| a5 | d4 | c4 | **b5** | **c12** | b13 | a13 | d12 |
| b8 | c1 | **d1** | a8 | d9 | **a16** | b16 | c9 |
| d8 | **a1** | b1 | c8 | b9 | c16 | **d16** | a9 |

*Figura 46*

Como consecuencia directa de la construcción, sabemos que cada par de elementos ubicados a continuación de forma vertical suman 65 y si se ubican de forma horizontal suman 64 o 66, entendiendo que al ubicarlas se tuvo la precaución de que siempre estén dentro de la misma mitad, ya sea izquierda o derecha o superior o inferior. Esto hace que cualquier subcuadrado de orden $2 \times 2$, de los 49 que existen dentro del cuadrado B.F. cumple que sus elementos sumarán siempre 130.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b7 | c2 | d2 | a7 | d10 | a15 | b15 | c10 |
| d7 | a2 | b2 | c7 | b10 | c15 | d15 | a10 |
| c6 | b3 | a3 | d6 | a11 | d14 | c14 | b11 |
| a6 | d3 | c3 | b6 | c11 | b14 | a14 | d11 |
| c5 | b4 | b4 | d5 | a12 | d13 | c13 | b12 |
| a5 | d4 | c4 | b5 | c12 | b13 | a13 | d12 |
| b8 | c1 | d1 | a8 | d9 | a16 | b16 | c9 |
| d8 | a1 | b1 | c8 | b9 | c16 | d16 | a9 |

*Figura 47*

Como consecuencia de lo anterior si tomamos subcuadrados de orden $4 \times 4$, existen 9, estos contienen 4 cuadrados $2 \times 2$ disjuntos, como los presentados en la figura 47, por lo que su sumatoria sera $4 \times 130 = 520$, esto se puede observar en la figura 39. Asimismo un cuadrado $6 \times 6$ contiene 9 subcuadrados $2 \times 2$ disjuntos, por lo que sus elementos sumaran $9 \times 130 = 1170$.

Por esta razón, afirmaremos que dentro de un cuadrado mágico la sumatoria de los elementos de cualquier subcuadrado $m \times m$, siempre que m sea par será una constante, igual a:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 \times K$$

Es obvio que los subcuadrados de orden impar, no contienen cuadrados completos de orden $2 \times 2$, por lo que la suma de sus elementos no cumple la propiedad de ser constante.

La construcción del cuadrado B.F. hace que se cumplan estas propiedades y es más se pueden generar otras, combinando las anteriores o simplemente utilizando las propiedades de sus elementos, igual o más interesantes que las indicadas, veremos una que demuestra lo estipulado.

En la figura 48 tomamos 8 elementos que si los sumamos se tiene un valor de 260, es decir

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **b7** | c2 | d2 | **a7** | d10 | a15 | b15 | c10 |
| d7 | **a2** | **b2** | c7 | b10 | c15 | d15 | a10 |
| **c6** | b3 | a3 | **d6** | a11 | d14 | c14 | b11 |
| a6 | **d3** | c3 | b6 | c11 | b14 | a14 | d11 |
| **c5** | b4 | b4 | d5 | a12 | **d13** | c13 | b12 |
| a5 | d4 | c4 | b5 | c12 | b13 | **a13** | **d12** |
| **b8** | c1 | d1 | a8 | d9 | **a16** | b16 | c9 |
| d8 | a1 | b1 | c8 | b9 | c16 | **d16** | **a9** |

*Figura 48*

2K, si trasladamos esta construcción a cualquier otra ubicación del cuadrado el resultado será idéntico.

Por un lado se tiene:

$$\begin{aligned} &b7 + a2 + c6 + d3 + a7 + b2 + d6 + c3 = \\ &\quad = b1 - 2 \times 6 + a1 + 2 \times 1 + c1 - 2 \times 5 + d1 + 2 \times 2 + \\ &\quad + a1 + 2 \times 6 + b1 - 2 \times 1 + d1 + 2x5 + c1 - 2 \times 2 = \\ &= 2b1 + 2a1 + 2c1 + 2d1 - 12 + 2 - 10 + 4 + 12 - 2 + 10 - 4 = 2(b1 + a1 + c1 + d1) = 260 \end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned} &d13 + a16 + a13 + d16 + d12 + a9 + c5 + b8 = \\ &\quad = d1 + 2 \times 12 + a1 + 2 \times 15 + a1 + 2 \times 12 + d1 + 2 \times 15 + d1 + 2 \times 11 + a1 + 2 \times 8 \\ &\quad + c1 - 2 \times 4 + b1 - 2 \times 7 = 3d1 + 3a1 + b1 + c1 + 24 + 30 + 24 + 30 + 22 + 16 - 8 - 14 \\ &\quad = d1 + a1 + b1 + c1 + 124 + 2d1 + 2a1 = 130 + 124 + 4 + 2 = 260 \end{aligned}$$

Vemos que el resultado es idéntico.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **b7** | c2 | **d2** | a7 | d10 | **a15** | b15 | **c10** |
| d7 | **a2** | b2 | c7 | b10 | c15 | **d15** | a10 |
| **c6** | b3 | a3 | d6 | a11 | d14 | c14 | **b11** |
| a6 | d3 | c3 | b6 | c11 | b14 | a14 | d11 |
| c5 | **b4** | **b4** | d5 | **a12** | d13 | c13 | **b12** |
| **a5** | d4 | c4 | **b5** | c12 | b13 | a13 | d12 |
| b8 | **c1** | **d1** | a8 | d9 | a16 | b16 | c9 |
| d8 | a1 | b1 | c8 | b9 | c16 | d16 | a9 |

*Figura 49*

Ahora veremos los resultados de la suma de los elementos de las estructuras de la figura 49.

Para la primera sumatoria tenemos:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{b7} + \mathrm{c6} + \mathrm{a2} + \mathrm{d2} + \mathrm{a15} + \mathrm{d15} + \mathrm{b11} + \mathrm{c10} = \\
&\quad = \mathrm{b1} - 2 \times 6 + \mathrm{c1} - 2 \times 5 + \mathrm{a1} + 2 \times 1 + \mathrm{d1} + 2 \times 1 + \\
&\quad + \mathrm{a1} + 2 \times 14 + \mathrm{d1} + 2 \times 14 + \mathrm{b1} - 2 \times 10 + \mathrm{c1} - 2 \times 9 = \\
&= 2\mathrm{b1} + 2\mathrm{c1} + 2\mathrm{a1} + 2\mathrm{d1} - 12 - 10 + 2 + 2 + 28 + 28 - 20 - 18 = 2(\mathrm{b1} + \mathrm{c1} + \mathrm{a1} + \mathrm{d1}) = 260
\end{aligned}$$

Y para el otro grupo se tiene:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{a5} + \mathrm{b4} + \mathrm{c1} + \mathrm{a4} + \mathrm{d1} + \mathrm{b5} + \mathrm{a12} + \mathrm{b12} = \\
&\quad = \mathrm{a1} + 2 \times 4 + \mathrm{b1} - 2 \times 3 + \mathrm{c1} + \mathrm{a1} + 2 \times 3 + \mathrm{d1} + \mathrm{b1} - 2 \times 4 + \\
&\quad + \mathrm{a1} + 2 \times 11 + \mathrm{b1} - 2 \times 11 = 3\mathrm{a1} + 3\mathrm{b1} + \mathrm{c1} + \mathrm{d1} + 8 - 6 + 6 - 8 + 22 - 22 \\
&\quad = \mathrm{a1} + \mathrm{b1} + \mathrm{c1} + \mathrm{d1} + 2(\mathrm{a1} + \mathrm{b1}) = 130 + 2\mathrm{x}65 = 130 + 130 = 260
\end{aligned}$$

Resultados también iguales.

Como ya se ha dicho, respetando la estructura original por tanto se pueden construir muchísimas estructuras y sus elementos mantendrán la propiedad de la constante en su sumatoria.

# 5. Cuadrados Mágicos B.F. de mayor orden

Se explicó anteriormente el por qué no es posible construir cuadrados mágicos de este tipo de orden impar, ni dobles de impares, por lo que no es posible construirlos de orden $9 \times 9$, $10x10$ $(2 \times 5 = 10)$, $11 \times 11$.

En el orden $12 \times 12$, es completamente factible construir los cuadrados $2 \times 2$ disjuntos para rellenarlo, sin embargo recordando que las columnas de esos cuadrados $2 \times 2$ suman valores distintos, y que la semicolumna del cuadrado $12 \times 12$ deberá contener tres de esas columnas, en consecuencia la sumatoria de los elementos de estas no serían constantes ni iguales a la mitad de la suma de los elementos de las columnas, por lo que no cumplirían esta propiedad y sus derivadas, en consecuencia no es posible construir un cuadrado mágico B.F. de orden $12 \times 12$. De este análisis, se puede desprender entonces que para que las semicolumnas sumen resultados iguales, estas deben tener cuatro elementos o una cantidad múltipla de ese valor. Por las razones expuestas no será posible construir cuadrados mágicos de orden $13 \times 13$, $14 \times 14$ y $15 \times 15$ con los métodos desarrollados.

El de orden $16 \times 16$, es perfectamente construible y ya lo hemos presentado con su proceso de construcción, sus derivadas y sus propiedades adicionales.

Para concluir con el análisis diremos que:

> "SON CONSTRUIBLES CUADRADOS MÁGICOS B.F. DE ORDEN P $\times$ P, SIEMPRE QUE P SEA UN ENTERO MÚLTIPLO DE 8."

## 5.1. Construcción de un Cuadrado Mágico B.F. $24 \times 24$

### 5.1.1. Análisis

A sabiendas de que es posible construir un cuadrado mágico B.F. de orden $24 \times 24$, ya que 24 es múltiplo de 8, deberemos anotar ciertas cuestiones:

a. Un cuadrado mágico B.F. contendrá 24 filas y 24 columnas.

b. Por tanto contendrá 576 celdas ($24 \times 24 = 576$).

c. El cuadrado mágico en cuestión contendrá los números enteros del 1 al 576.

d. La suma de todos sus elementos por tanto será $(576 \times 577)/2 = 166176$.

e. Cada columna contendrá 24 elementos que deberán sumar 6924 $(166176/24 = 6924)$.

f. De igual forma cada fila estará compuesta por 24 elementos que sumen 6924.

g. Los elementos de cada semifila o semicolumna deberán sumar 3462 $(6924/2 = 3462)$.

h. En este caso se podrá dividir cada fila o cada columna en cuatro partes, cada una de ella contendrá cuatro elementos que deberán sumar 1731 $(3462/2 = 1731)$.

i. Los cuadrados básicos $2 \times 2$ necesarios para su construcción, deberán sumar 1731, $K = 1731$, al igual que los elementos esquina de cualquier rectángulo que se forme en su interior en base de un cuadrado $2 \times 2$ centro.

j. Existirán 24 diagonales arriba-abajo, 24 abajo-arriba, 24 izquierda-derecha y 24 derecha-izquierda, compuestas cada una por 24 elementos cuya sumatoria será igual a la sumatoria de los elementos de una fila o una columna (6924).

### 5.1.2. Construcción

Primero deberemos construir los cuadrados $2 \times 2$ utilizando todos los elementos del 1 al 576, y cumpliendo con las siguientes normas:

a. Las filas estarán conformadas por pares de números cuya suma sea 577, siguiendo la siguiente estructura (1,576), (2,575), (3,574), ... así hasta (288,289), obteniendo 288 pares.

b. Las primeras columnas estarán conformadas por duplas de números impares cuya suma sera 576, constituidas de la forma (1,575), (3,573), (5,571), ... así hasta (287,289), obteniéndose 144 combinaciones.

c. Las segundas columnas estarán conformadas por duplas de números pares cuya suma sea 578, estructuradas de la forma (2,576), (4,574), (6,572), ... así hasta (288,290), obteniéndose de igual manera 144 combinaciones.

d. Se construirán 144 cuadrados $2 \times 2$, donde los elementos de sus filas sumen 576, los elementos de la primera columna suman 576 y de la segunda 578.

e. Estos 144 cuadrados $2 \times 2$, serán ubicados, mediante un proceso que mantendrá la alternabilidad y que dividiendo el cuadrado en mitades superior, inferior e izquierda y derecha, permita mantener las propiedades, esto es que los cuadrados $2 \times 2$ adjuntos coloquen el valor 576 sobre y debajo del 578, de forma que cada cuatro columnas la suma sea siempre 1152.

En la página 154 se puede observar dicho cuadrado mágico, que cumple todas las propiedades solicitadas, y además tiene una adicional.

Si tomamos doce elementos seguidos de una columna, iniciando en una fila impar, su sumatoria es igual a la de la semifila o semicolumna, 3462.

- Los 529 subcuadrados $2 \times 2$ contienen elementos que suman 1154.

- Los 441 subcuadrados $4 \times 4$ contienen elementos que suman 4616 $((4/2)2 \times 1154 = 4616)$.
- Los 361 subcuadrados $6 \times 6$ contienen elementos cuya suma es 10386 $((6/2)2 \times 1154 = 10386)$.
- Los 289 subcuadrados $8 \times 8$ contienen elementos cuya suma es 18464 $((8/2)2 \times 1154 = 18464)$.
- Los 225 subcuadrados $10 \times 10$ contienen elementos cuya suma es 28850 $((10/2)2 \times 1154 = 28850)$.
- Los 169 subcuadrados $12 \times 12$ contienen elementos cuya suma es 41544 $((12/2)2 \times 1154 = 41544)$.
- Los 121 subcuadrados $14 \times 14$ contienen elementos cuya suma es 56546 $((14/2)2 \times 1154 = 56546)$.
- Los 81 subcuadrados $16 \times 16$ contienen elementos cuya suma es 73856 $((16/2)2 \times 1154 = 73856)$.
- Los 49 subcuadrados $18 \times 18$ contienen elementos cuya suma es 93474 $((18/2)2 \times 1154 = 93474)$.
- Los 25 subcuadrados $20 \times 20$ contienen elementos cuya suma es 115400 $((20/2)2 \times 1154 = 115400)$.
- Los 9 subcuadrados $22 \times 22$ contienen elementos cuya suma es 139634 $((22/2)2 \times 1154 = 139634)$.
- Los 12 elementos de las 48 semifilas y de las 48 semicolumnas suman todos 3462.
- Los cuatro elementos que forman cualquiera de las 288 sextas partes de cada fila o cada columna suman 1154.
- Las 96 diagonales doble sentido, contienen todas 24 elementos que suman 6924, al igual que suman todas las filas y todas las columnas.
- El cuadrado centro es el que se presenta en la figura 50, cuyos elementos suman 1154, y si formamos cualquier rectángulo dentro del cuadrado mágico B.F. $24 \times 24$, los elementos de sus esquinas sumarán también 1154.

| | |
|---|---|
| 508 | 309 |
| 71 | 266 |

*Figura 50*

- Aquí también es posible formar muchas estructuras que al moverlas dentro del cuadrado mágico, la sumatoria de sus elementos sea constante.

## 6. Conclusiones

Este trabajo ha utilizado un metodología deductiva, desmenuzando las propiedades del cuadrado B. F. y estudiando pormenorizadamente los asombrosos resultados de este cuadrado matemático, para llegar a entender su esencia y permitir su generalización: se han construido otros cuadrados, de orden mayor que el primero, generando reglas claras para su aplicación y comprobando que los cuadrados obtenidos verifican todas las condiciones. Finalmente podemos concluir que:

- El Cuadrado Matemático de Benjamin Franklin se basa en arreglos $2 \times 2$.
- Para la construcción de estos cuadrados matemáticos, es preciso construir esos arreglos $2 \times 2$ y luego ubicarlos convenientemente.
- El orden de un cuadrado matemático que cumpla las condiciones establecidas en el cuadrado Benjamin Franklin, será siempre un múltiplo de 8.
- Conforme aumentamos el orden de estos cuadrados, se verifican más condiciones adicionales.
- Benjamin Franklin fue un genio de los números.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 574 | 435 | 142 | 3 | 478 | 531 | 46 | 99 | 526 | 483 | 94 | 51 | 286 | 147 | 430 | 291 | 190 | 243 | 334 | 387 | 238 | 195 | 382 | 339 |
| 2 | 4 | 141 | 436 | 573 | 100 | 45 | 532 | 477 | 52 | 93 | 484 | 525 | 292 | 429 | 148 | 285 | 388 | 333 | 244 | 189 | 340 | 381 | 196 | 237 |
| 3 | 571 | 438 | 139 | 6 | 475 | 534 | 43 | 102 | 523 | 486 | 91 | 54 | 283 | 150 | 427 | 294 | 187 | 246 | 331 | 390 | 235 | 198 | 379 | 342 |
| 4 | 5 | 140 | 437 | 572 | 101 | 44 | 533 | 476 | 53 | 92 | 485 | 524 | 293 | 428 | 149 | 284 | 389 | 332 | 245 | 188 | 341 | 380 | 197 | 236 |
| 5 | 566 | 443 | 134 | 11 | 470 | 539 | 38 | 107 | 518 | 491 | 86 | 59 | 278 | 155 | 422 | 299 | 182 | 251 | 326 | 395 | 230 | 203 | 374 | 347 |
| 6 | 12 | 133 | 444 | 565 | 108 | 37 | 540 | 469 | 60 | 85 | 492 | 517 | 300 | 421 | 156 | 277 | 396 | 325 | 252 | 181 | 348 | 373 | 204 | 229 |
| 7 | 563 | 446 | 131 | 14 | 467 | 542 | 35 | 110 | 515 | 494 | 83 | 62 | 275 | 158 | 419 | 302 | 179 | 254 | 323 | 398 | 227 | 206 | 371 | 350 |
| 8 | 13 | 132 | 445 | 564 | 109 | 36 | 541 | 468 | 61 | 84 | 493 | 516 | 301 | 420 | 157 | 276 | 397 | 324 | 253 | 180 | 349 | 372 | 205 | 228 |
| 9 | 558 | 451 | 126 | 19 | 462 | 547 | 30 | 115 | 510 | 499 | 78 | 67 | 270 | 163 | 414 | 307 | 174 | 259 | 318 | 403 | 222 | 211 | 366 | 355 |
| 10 | 20 | 125 | 452 | 557 | 116 | 29 | 548 | 461 | 68 | 77 | 500 | 509 | 308 | 413 | 164 | 269 | 404 | 317 | 260 | 173 | 356 | 365 | 212 | 221 |
| 11 | 555 | 454 | 123 | 22 | 459 | 550 | 27 | 118 | 507 | 502 | 75 | 70 | 267 | 166 | 411 | 310 | 171 | 262 | 315 | 406 | 219 | 214 | 363 | 358 |
| 12 | 21 | 124 | 453 | 556 | 117 | 28 | 549 | 460 | 69 | 76 | 501 | 508 | 309 | 412 | 165 | 268 | 405 | 316 | 261 | 172 | 357 | 364 | 213 | 220 |
| 13 | 554 | 455 | 122 | 23 | 458 | 551 | 26 | 119 | 506 | 503 | 74 | 71 | 266 | 167 | 410 | 311 | 170 | 263 | 314 | 407 | 218 | 215 | 362 | 359 |
| 14 | 24 | 121 | 456 | 553 | 120 | 25 | 552 | 457 | 72 | 73 | 504 | 505 | 312 | 409 | 168 | 265 | 408 | 313 | 264 | 169 | 360 | 361 | 216 | 217 |
| 15 | 559 | 450 | 127 | 18 | 463 | 546 | 31 | 114 | 511 | 498 | 79 | 66 | 271 | 162 | 415 | 306 | 175 | 258 | 319 | 402 | 223 | 210 | 367 | 354 |
| 16 | 17 | 128 | 449 | 560 | 113 | 32 | 545 | 464 | 65 | 80 | 497 | 512 | 305 | 416 | 161 | 272 | 401 | 320 | 257 | 176 | 353 | 368 | 209 | 224 |
| 17 | 562 | 447 | 130 | 15 | 466 | 543 | 34 | 111 | 514 | 495 | 82 | 63 | 274 | 159 | 418 | 303 | 178 | 255 | 322 | 399 | 226 | 207 | 370 | 351 |
| 18 | 16 | 129 | 448 | 561 | 112 | 33 | 544 | 465 | 64 | 81 | 496 | 513 | 304 | 417 | 160 | 273 | 400 | 321 | 256 | 177 | 352 | 369 | 208 | 225 |
| 19 | 567 | 442 | 135 | 10 | 471 | 538 | 39 | 106 | 519 | 490 | 87 | 58 | 279 | 154 | 423 | 298 | 183 | 250 | 327 | 394 | 231 | 202 | 375 | 346 |
| 20 | 9 | 136 | 441 | 568 | 105 | 40 | 537 | 472 | 57 | 88 | 489 | 520 | 297 | 424 | 153 | 280 | 393 | 328 | 249 | 184 | 345 | 376 | 201 | 232 |
| 21 | 570 | 439 | 138 | 7 | 474 | 535 | 42 | 103 | 522 | 487 | 90 | 55 | 282 | 151 | 426 | 295 | 186 | 247 | 330 | 391 | 234 | 199 | 378 | 343 |
| 22 | 8 | 137 | 440 | 569 | 104 | 41 | 536 | 473 | 56 | 89 | 488 | 521 | 296 | 425 | 152 | 281 | 392 | 329 | 248 | 185 | 344 | 377 | 200 | 233 |
| 23 | 575 | 434 | 143 | 2 | 479 | 530 | 47 | 98 | 527 | 482 | 95 | 50 | 287 | 146 | 431 | 290 | 191 | 242 | 335 | 386 | 239 | 194 | 383 | 338 |
| 24 | 1 | 144 | 433 | 576 | 97 | 48 | 529 | 480 | 49 | 96 | 481 | 528 | 289 | 432 | 145 | 288 | 385 | 336 | 241 | 192 | 337 | 384 | 193 | 240 |

*Cuadrado Benjamin Franklin 24 × 24*

# Referencias


[1] PASLES, Paul C., *"Benjamin Franklin's Numbers"*, Princeton University Press or AMAZON, *"Benjamin Franklin, Magician?"*, Franklin Gazette, 2000.

[2] PASLES, Paul C., *"The Lost Squares of Dr. Franklin"*, American Mathematical Monthly, Junio.Julio 2001.

[3] PASLES, Paul C., *"The Lost Squares of Dr. Franklin"*, American Mathematical Monthly, Junio.Julio 2001.

[4] PASLES, Paul C., *"Benjamin Franklin"*, MacTutor Entry, Junio 2001.

[5] PASLES, Paul C., *"Diggin for Squares"*, Math Horizons, Abril 2001.

[6] PASLES, Paul C., *"Franklin's Other 8-Square"*, Journal of Recreational Mathematicas, 31:3, 2003.

[7] PASLES, Paul C., *"A Bent for Magic"*, Mathematics Magazine, 79:1, 2006.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 195 | 62 | 899 | 894 | 67 | 190 | 771 | 1022 | 3 | 254 | 835 | 958 | 131 | 126 | 963 | 830 | 707 | 574 | 387 | 382 | 579 | 702 | 259 | 510 | 515 | 766 | 323 | 446 | 643 | 638 | 451 | 318 |
| 2 | 829 | 964 | 125 | 132 | 957 | 836 | 253 | 4 | 1021 | 772 | 189 | 68 | 893 | 900 | 61 | 196 | 317 | 452 | 637 | 644 | 445 | 324 | 765 | 516 | 509 | 260 | 701 | 580 | 381 | 388 | 573 | 708 |
| 3 | 198 | 59 | 902 | 891 | 70 | 187 | 774 | 1019 | 6 | 251 | 838 | 955 | 134 | 123 | 966 | 827 | 710 | 571 | 390 | 379 | 582 | 699 | 262 | 507 | 518 | 763 | 326 | 443 | 646 | 635 | 454 | 315 |
| 4 | 828 | 965 | 124 | 133 | 956 | 837 | 252 | 5 | 1020 | 773 | 188 | 69 | 892 | 901 | 60 | 197 | 316 | 453 | 636 | 645 | 444 | 325 | 764 | 517 | 508 | 261 | 700 | 581 | 380 | 389 | 572 | 709 |
| 5 | 203 | 54 | 907 | 886 | 75 | 182 | 779 | 1014 | 11 | 246 | 843 | 950 | 139 | 118 | 971 | 822 | 715 | 566 | 395 | 374 | 587 | 694 | 267 | 502 | 523 | 758 | 331 | 438 | 651 | 630 | 459 | 310 |
| 6 | 821 | 972 | 117 | 140 | 949 | 844 | 245 | 12 | 1013 | 780 | 181 | 76 | 885 | 908 | 53 | 204 | 309 | 460 | 629 | 652 | 437 | 332 | 757 | 524 | 501 | 268 | 693 | 588 | 373 | 396 | 565 | 716 |
| 7 | 206 | 51 | 910 | 883 | 78 | 179 | 782 | 1011 | 14 | 243 | 846 | 947 | 142 | 115 | 974 | 819 | 718 | 563 | 398 | 371 | 590 | 691 | 270 | 499 | 526 | 755 | 334 | 435 | 654 | 627 | 462 | 307 |
| 8 | 820 | 973 | 116 | 141 | 948 | 845 | 244 | 13 | 1012 | 781 | 180 | 77 | 884 | 909 | 52 | 205 | 308 | 461 | 628 | 653 | 436 | 333 | 756 | 525 | 500 | 269 | 692 | 589 | 372 | 397 | 564 | 717 |
| 9 | 211 | 46 | 915 | 878 | 83 | 174 | 787 | 1006 | 19 | 238 | 851 | 942 | 147 | 110 | 979 | 814 | 723 | 558 | 403 | 366 | 595 | 686 | 275 | 494 | 531 | 750 | 339 | 430 | 659 | 622 | 467 | 302 |
| 10 | 813 | 980 | 109 | 148 | 941 | 852 | 237 | 20 | 1005 | 788 | 173 | 84 | 877 | 916 | 45 | 212 | 301 | 468 | 621 | 660 | 429 | 340 | 749 | 532 | 493 | 276 | 685 | 596 | 365 | 404 | 557 | 724 |
| 11 | 214 | 43 | 918 | 875 | 86 | 171 | 790 | 1003 | 22 | 235 | 854 | 939 | 150 | 107 | 982 | 811 | 726 | 555 | 406 | 363 | 598 | 683 | 278 | 491 | 534 | 747 | 342 | 427 | 662 | 619 | 470 | 299 |
| 12 | 812 | 981 | 108 | 149 | 940 | 853 | 236 | 21 | 1004 | 789 | 172 | 85 | 876 | 917 | 44 | 213 | 300 | 469 | 620 | 661 | 428 | 341 | 748 | 533 | 492 | 277 | 684 | 597 | 364 | 405 | 556 | 725 |
| 13 | 219 | 38 | 923 | 870 | 91 | 166 | 795 | 998 | 27 | 230 | 859 | 934 | 155 | 102 | 987 | 806 | 731 | 550 | 411 | 358 | 603 | 678 | 283 | 486 | 539 | 742 | 347 | 422 | 667 | 614 | 475 | 294 |
| 14 | 805 | 988 | 101 | 156 | 933 | 860 | 229 | 28 | 997 | 796 | 165 | 92 | 869 | 924 | 37 | 220 | 293 | 476 | 613 | 668 | 421 | 348 | 741 | 540 | 485 | 284 | 677 | 604 | 357 | 412 | 549 | 732 |
| 15 | 222 | 35 | 926 | 867 | 94 | 163 | 798 | 995 | 30 | 227 | 862 | 931 | 158 | 99 | 990 | 803 | 734 | 547 | 414 | 355 | 606 | 675 | 286 | 483 | 542 | 739 | 350 | 419 | 670 | 611 | 478 | 291 |
| 16 | 804 | 989 | 100 | 157 | 932 | 861 | 228 | 29 | 996 | 797 | 164 | 93 | 868 | 925 | 36 | 221 | 292 | 477 | 612 | 669 | 420 | 349 | 740 | 541 | 484 | 285 | 676 | 605 | 356 | 413 | 548 | 733 |
| 17 | 223 | 34 | 927 | 866 | 95 | 162 | 799 | 994 | 31 | 226 | 863 | 930 | 159 | 98 | 991 | 802 | 735 | 546 | 415 | 354 | 607 | 674 | 287 | 482 | 543 | 738 | 351 | 418 | 671 | 610 | 479 | 290 |
| 18 | 801 | 992 | 97 | 160 | 929 | 864 | 225 | 32 | 993 | 800 | 161 | 96 | 865 | 928 | 33 | 224 | 289 | 480 | 609 | 672 | 417 | 352 | 737 | 544 | 481 | 288 | 673 | 608 | 353 | 416 | 545 | 736 |
| 19 | 218 | 39 | 922 | 871 | 90 | 167 | 794 | 999 | 26 | 231 | 858 | 935 | 154 | 103 | 986 | 807 | 730 | 551 | 410 | 359 | 602 | 679 | 282 | 487 | 538 | 743 | 346 | 423 | 666 | 615 | 474 | 295 |
| 20 | 808 | 985 | 104 | 153 | 936 | 857 | 232 | 25 | 1000 | 793 | 168 | 89 | 872 | 921 | 40 | 217 | 296 | 473 | 616 | 665 | 424 | 345 | 744 | 537 | 488 | 281 | 680 | 601 | 360 | 409 | 552 | 729 |
| 21 | 215 | 42 | 919 | 874 | 87 | 170 | 791 | 1002 | 23 | 234 | 855 | 938 | 151 | 106 | 983 | 810 | 727 | 554 | 407 | 362 | 599 | 682 | 279 | 490 | 535 | 746 | 343 | 426 | 663 | 618 | 471 | 298 |
| 22 | 809 | 984 | 105 | 152 | 937 | 856 | 233 | 24 | 1001 | 792 | 169 | 88 | 873 | 920 | 41 | 216 | 297 | 472 | 617 | 664 | 425 | 344 | 745 | 536 | 489 | 280 | 681 | 600 | 361 | 408 | 553 | 728 |
| 23 | 210 | 47 | 914 | 879 | 82 | 175 | 786 | 1007 | 18 | 239 | 850 | 943 | 146 | 111 | 978 | 815 | 722 | 559 | 402 | 367 | 594 | 687 | 274 | 495 | 530 | 751 | 338 | 431 | 658 | 623 | 466 | 303 |
| 24 | 816 | 977 | 112 | 145 | 944 | 849 | 240 | 17 | 1008 | 785 | 176 | 81 | 880 | 913 | 48 | 209 | 304 | 465 | 624 | 657 | 432 | 337 | 752 | 529 | 496 | 273 | 688 | 593 | 368 | 401 | 560 | 721 |
| 25 | 207 | 50 | 911 | 882 | 79 | 178 | 783 | 1010 | 15 | 242 | 847 | 946 | 143 | 114 | 975 | 818 | 719 | 562 | 399 | 370 | 591 | 690 | 271 | 498 | 527 | 754 | 335 | 434 | 655 | 626 | 463 | 306 |
| 26 | 817 | 976 | 113 | 144 | 945 | 848 | 241 | 16 | 1009 | 784 | 177 | 80 | 881 | 912 | 49 | 208 | 305 | 464 | 625 | 656 | 433 | 336 | 753 | 528 | 497 | 272 | 689 | 592 | 369 | 400 | 561 | 720 |
| 27 | 202 | 55 | 906 | 887 | 74 | 183 | 778 | 1015 | 10 | 247 | 842 | 951 | 138 | 119 | 970 | 823 | 714 | 567 | 394 | 375 | 586 | 695 | 266 | 503 | 522 | 759 | 330 | 439 | 650 | 631 | 458 | 311 |
| 28 | 824 | 969 | 120 | 137 | 952 | 841 | 248 | 9 | 1016 | 777 | 184 | 73 | 888 | 905 | 56 | 201 | 312 | 457 | 632 | 649 | 440 | 329 | 760 | 521 | 504 | 265 | 696 | 585 | 376 | 393 | 568 | 713 |
| 29 | 199 | 58 | 903 | 890 | 71 | 186 | 775 | 1018 | 7 | 250 | 839 | 954 | 135 | 122 | 967 | 826 | 711 | 570 | 391 | 378 | 583 | 698 | 263 | 506 | 519 | 762 | 327 | 442 | 647 | 634 | 455 | 314 |
| 30 | 825 | 968 | 121 | 136 | 953 | 840 | 249 | 8 | 1017 | 776 | 185 | 72 | 889 | 904 | 57 | 200 | 313 | 456 | 633 | 648 | 441 | 328 | 761 | 520 | 505 | 264 | 697 | 584 | 377 | 392 | 569 | 712 |
| 31 | 194 | 63 | 898 | 895 | 66 | 191 | 770 | 1023 | 2 | 255 | 834 | 959 | 130 | 127 | 962 | 831 | 706 | 575 | 386 | 383 | 578 | 703 | 258 | 511 | 514 | 767 | 322 | 447 | 642 | 639 | 450 | 319 |
| 32 | 832 | 961 | 128 | 129 | 960 | 833 | 256 | 1 | 1024 | 769 | 192 | 65 | 896 | 897 | 64 | 193 | 320 | 449 | 640 | 641 | 448 | 321 | 768 | 513 | 512 | 257 | 704 | 577 | 384 | 385 | 576 | 705 |

*Cuadrado Benjamin Franklin 32 × 32*

[8] MURPHY, Frank, *"Ben Franklin and The Magic Square"*, Amazon.

[9] PICKOVER, Cliff, *"The Zen of Magic Squares, Circles and Stars"*, Princeton University Press.

[10] ANDREWS, W. S., *"Magic Squares and Cubes"*, Chapter 3, *"The Franklin Squares"*, New York, Dover, 1960.

[11] AMELA, M. A., *"Structured Franklin Squares"*.

[12] FRANKLIN, Benjamin, *"The Autobiography of Benjamin Franklin"*, 1793. Reprinted New York: Dover, 1996.

[13] MADACHY, J. S., *"Magic and Antimagic Squares"*, Chapter 4 in Madach's Mathematical Recreations. New York: Dover, pp. 103–113, 1979.

[14] PAPPAS, T., *"The Magic Square of Benjamin Franklin"*, The Joy of Mathematics. San Carlos, California, Wide World Publ./Tetra, p. 87, 1989.

**Sobre el autor:**
*Nombre:* Marco Vinicio Vásquez Bernal
*Correo electrónico:* marvas123@hotmail.es
*Institución:* School of Mathematics, Yachay Tech. Yachay City of Knowledge, Urcuqui, Ecuador.