Historias de Matemáticas

Aritmética de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros

Arithmetic of the values of the Riemann's zeta function in integer arguments

Anier Soria Lorente

Revista de Investigación

Volumen IV, Número 1, pp. 033–044, ISSN 2174-0410
Recepción: 25 Mar'13; Aceptación: 20 Dic'13

1 de abril de 2014

Resumen

Hoy en día, el carácter aritmético de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros y en particular en impares, continúa siendo un problema abierto dentro de la comunidad matemática. Este artículo, se dedica a presentar los principales resultados alcanzados por varios matemáticos desde el siglo XVII hasta la actualidad, correspondientes al carácter aritmético que siguen los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros.

Palabras Clave: Apéry, Euler, función zeta de Riemann.

Abstract

At present, arithmetical character of the values of the Riemann's zeta function in integer arguments and in particular in odd arguments, keep being an open problem into the mathematical community. This paper, dedicates to show the principal results obtained for several mathematicians from the century XVII until the present time.

Keywords: Apéry, Euler, Riemann's zeta function.

1. Introducción

El problema de calcular la suma de la serie

$$\zeta\left(s\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{s}}=1+\frac{1}{2^{s}}+\frac{1}{3^{s}}+\cdots, \tag{1}$$

para $s \geq 2$ entero, había atraído la atención de varios matemáticos desde el siglo XVII, en particular para $s = 2$. Por lo que a principios del siglo XVIII las series infinitas pasan a ser uno de los temas estrellas dentro del universo matemático de la época. El estudio de que si convergían hacia un número o si se hacían cada vez más grandes sería uno de los retos de cualquier matemático de aquel entonces. En el siglo XVIII se interesaron en este problema varios matemáticos como Jacob Bernoulli, Daniel Bernoulli y Christian Goldbach, quienes obtuvieron algunos resultados preliminares sobre la suma de esta serie en el caso $s = 2$, los cuales pronto serían superados por Leonhard Euler que, en este marco conceptual, hizo su primer contacto con dicha serie en el caso $s = 2$ y pronto mejoraría los cálculos de sus predecesores. El problema de calcular la suma de la serie en el caso $s = 2$ no era fácil debido a su lenta convergencia, por ejemplo, para calcular el número al que converge, con una precisión de seis decimales, hay que sumar al menos un millón de términos de la serie. En efecto, como

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k\,(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

sumando desde $k = n + 1$, por la propiedad telescópica de los extremos de la desigualdad anterior, se tiene que

$$\frac{1}{n+1} < \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n},$$

de tal forma que aproximar la serie con n lugares decimales requiere calcular la suma de almenos 10^n términos.

Se conoce que, Leibniz a propuesta de su mentor Huygens, calculó la suma de los recíprocos de los números triangulares. Descubrir que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

satisfizo tanto al joven Leibniz que impulsó su afición por las matemáticas, que luego le llevaría a co-descubrir el Análisis Matemático. Si la suma de los inversos de los números triangulares constituyó un problema fácil para Leibniz, no ocurrió lo mismo con la suma de los inversos de los números cuadrados $\zeta\,(2)$. El problema le fue planteado a Leibniz por Oldenburg, secretario de la Royal Society en 1673, aunque ya había sido abordado veinte años antes por Pietro Mengoli y por el mismo Walis (que dió el valor de $1,645$ como aproximación de la suma de la serie). Leibniz comunicó a sus corresponsales Jacob y Johann Bernoulli el problema, y les dijo que en apariencia debía tener una solución tan simple como la de los números triangulares inversos. Y así lo pensaron Jacob y Johann Bernoulli, pero pronto se dieron cuenta de que algo no marchaba bien. No fue difícil demostrar por comparación que su suma estaba acotada superiormente por la suma de la serie de los inversos de los números triangulares

$$\frac{1}{n^2} < \frac{2}{n\,(n+1)}, \quad n > 1.$$

Pero el resultado preciso de la suma se les negaba, hasta tal punto que lanzaron públicamente este grito de socorro, "Grande será nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos". Desde entonces al problema se le conoce como Problema de Basilea y fue Johann Bernoulli, hermano menor de Jacob y en ese entonces mentor de Euler, quien seguramente le sugirió a este último investigar la evaluación de esa suma.

En 1729 Euler recibió una carta de su amigo Christian Goldbach donde le señala un método de aproximación que lo lleva a estimar el valor entre $1,64$ y $1,66$. Goldbach reta a Euler para que lo mejore. En el momento de recibir este desafío, Euler, que contaba sólo con 22 años de edad, se encontraba en la Academia de San Petersburgo enfrascado en varios problemas concretos de mecánica. Sin embargo, no se olvidó del reto y dos años más tarde, hizo pública una asombrosa aproximación de seis cifras decimales exactas, $1,643934$, transformando habilidosamente la serie en otra de convergencia mucho más rápida

$$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 2^{n-1}} + \ln^2 2.$$

Varios años más tarde, un día que leía con interés una de las obras de Newton, la genialidad de Euler se desbordó al encontrar la idea de que el desarrollo en serie de la función seno estaba relacionado con la solución exacta del problema. Lo ingenioso sería utilizar el desarrollo del seno no solo como sumas sino también como producto de infinitos factores. Newton, precisamente en esta obra, utilizaba con mucha eficacia la relación entre los coeficientes de las potencias y las raíces de los polinomios. Esto mismo intentó Euler con la serie de los inversos de los cuadrados. Basándose en el desarrollo en series de potencias del seno

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Euler introduce la función

$$P(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Luego, utilizando el hecho de que los ceros de la función $P(z)$ se producen para los valores en que el numerador se anula (con excepción de $z=0$, donde $P(0)=1$, es decir, para todo $z=\pi n$, donde $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Entonces factoriza como si $P(z)$ fuese un polinomio

$$P(z) = \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) = 1 - \frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right) z^2 + \cdots = 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

De esta manera, comparando los términos de segundo grado, le lleva a Euler a obtener el maravilloso resultado $\zeta(2) = \pi^2/6$. Así le comunicaba Euler su extraordinario hallazgo a Daniel Bernoulli, el hijo de Johann, en una carta fechada en 1735, dando solución así al llamado Problema de Basilea [26], que sin lugar a dudas le abrió las puertas para ingresar a la élite matemática de su época. La deducción de Euler es una joya de las Matemáticas, la misma expresa muy bien el estilo de esa época prodigiosa. Cuando Euler hizo este cálculo hacía veintinueve años que Jacob había fallecido. Johann Bernoulli, reconciliado ya con la figura de su hermano mayor, comentó a Euler: "De este modo el deseo más ferviente de mi hermano se ha cumplido ... ¡Si estuviera aquí!".

Entre 1740 y 1744, utilizando las mismas herramientas Euler encontró la suma de las series de los inversos de las potencias pares de los números naturales hasta el orden 26

$$\zeta(26) = \frac{1315862}{11094481976030578125} \pi^{26}.$$

Todos estos triunfos, estimularon formidablemente a Euler para continuar extendiendo estos resultados. El espíritu inquieto y perspicaz de Euler no podía sentirse satisfecho con lo encontrado hasta el momento. Además, aún faltaban las sumas en el caso de n impar. De modo que en 1750 publica otro artículo donde señala los valores aproximados de las series armónicas de orden impar $n = 2k+1$, para $k = 1, \ldots, 7$. Y en su famoso Tratado de Cálculo Diferencial de 1755, al fin consigue exponer la elegante fórmula [14]

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

donde los B_{2k} son los llamados números de Bernoulli [1, 16]. En particular, $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $\zeta(2k)$ es irracional para cada $k \in \mathbb{N}$. De este modo, Euler dio un paso muy importante en las matemáticas, pues generalizó un problema que se había resistido mucho tiempo, haciéndose muy famoso por el camino. Pero Euler no se quedó aquí, entusiasmado expuso la siguiente conjetura sobre el caso impar

$$¿\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k+1}}=\frac{p}{q}\pi^{2k+1}?$$

donde p y q son números enteros. Los esfuerzos de Euler para probar la validez de esta conjetura fueron vanos. No obstante, puede servirle de consuelo que aún hoy, a más 255 años después, no se ha conseguido ni validar ni refutar su conjetura, la misma sigue siendo todo un misterio.

2. El resultado de Roger Apéry y sus consecuencias

Actualmente la serie (1) es conocida bajo el nombre de función zeta de Riemann [17, 18, 25, 46], quien la extendió al campo complejo, mostrando, y previendo, muchas de sus interesantes propiedades. Desafortunadamente Euler no obtuvo nada acerca de los casos impares, todos sus intentos por evaluar la función zeta de Riemann en argumentos impares $\zeta(2k+1)$, $k\in\mathbb{N}$, fueron fallidos. Hasta la fecha, el carácter aritmético de estos números, exceptuando $\zeta(3)$; es decir, si son racionales o irracionales, sigue siendo un problema abierto dentro de la comunidad matemática.

Después de los estudios iniciados por Euler, nada se supo sobre la naturaleza aritmética de $\zeta(2k+1)$ para $k\in\mathbb{N}$, hasta que Roger Apéry, en el año 1979, sorprendió a la comunidad matemática con una demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$ [2]. De ahí el conocido teorema de Apéry, $\zeta(3)\notin\mathbb{Q}$. Él sólo brindó una breve descripción de su impresionante demostración, cuyos resultados se pueden encontrar de forma detallada en [2, 15, 47, 65]. Como reconocimiento a este resultado, la constante $\zeta(3)$, se denomina actualmente, constante de Apéry.

El método de obtención de los aproximantes, aunque ingenioso, no hacía, sin embargo, uso alguno de resultados que no hubieran sido conocidos por los matemáticos del siglo XVIII. ¡Una demostración que se le había escapado al gran Euler! Una excelente exposición puede encontrarse en Vander Poorten [65], quien dio una conferencia sobre la demostración de Apéry en el congreso internacional celebrado ese mismo año en Helsinki.

A partir de la demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$ dada por Apéry, se organizaron múltiples seminarios en los que se pretendía entender dicha demostración, con la finalidad de responder a las interrogantes acerca de las propiedades aritméticas de la función zeta de Riemann en enteros impares, lo cual tuvo lugar en el Institute for Advanced Study, dirigido por E. Bombieri. No obstante, hasta la fecha no se sabe siquiera si $\zeta(5)$ es irracional o no; algunos de los pocos resultados relacionados con dicho número se pueden encontrar en [51, 53, 61, 67, 68, 70]. Sin embargo, el resultado de Apéry inspiró a varios autores [8, 10, 12, 36, 43, 44, 58, 59, 71] a construir diferentes métodos para explicar la irracionalidad de $\zeta(3)$. Sorprendentemente, estos métodos conducen a la misma sucesión de aproximantes racionales de la clase de Apéry. En [8] se muestra que todos estos métodos coinciden, teniendo como origen común, un problema de aproximación simultánea. A este hecho se le denomina "fenómeno de Apéry".

Uno de ellos, se basa en una integral doble que involucra los polinomios de Legendre, la cual fue considerada por Beukers [8, 10, 11, 37]

$$\begin{aligned} r_n &= q_n\zeta(3)-p_n=-\int_0^1\int_0^1\frac{\log xy}{1-xy}L_n(x)\,L_n(y)\,dx\,dy \qquad (2)\\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{(xyz(1-x)(1-y)(1-z))^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}$$

donde

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2, \quad \text{y} \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \gamma_{n,k}, \tag{3}$$

$$\gamma_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{2j^3} \binom{n+j}{j}^{-1} \binom{n}{j}^{-1},$$

son los aproximantes racionales de Apéry, y

$$L_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} z^n (1-z)^n = \sum_{k=0}^{n} l_k^{(n)} z^k, \quad l_k^{(n)} = (-1)^k \binom{n+k}{k}\binom{n}{k},$$

denotan los polinomios de Legendre, ortogonales con respecto a la medida de Lebesgue en $(0,1)$. Por otra parte, Beukers demostró de una manera sencilla que $r_n = \mathcal{O}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}\right)$, lo cual le permitió dar una nueva demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$. Es de vital importancia destacar, que para ciertas modificaciones de la integral de Beukers (2), se ha mejorado la medida de irracionalidad [30, 48] dada por Apéry [2, 65, 66].

De una manera similar a [23], Beukers [12] consideró un problema de aproximación racional en un intento por formular de un modo más natural la demostración de Apéry. Para ello introdujo la función racional

$$R_n(z) = \frac{(n-z+1)_n^2}{(-z)_{n+1}^2}, \tag{4}$$

donde $(t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$ denota el símbolo de Pochhammer [24], a partir del cual mediante el cálculo de su desarrollo en fracciones simples, dedujo de forma directa los aproximantes racionales de Apéry (3).

Sorokin en [58, 63], obtuvo los aproximantes racionales de Apéry (3) del mismo modo que Beukers, considerando el problema de aproximación racional

$$A_n(z) f_1(z) + B_n(z) f_2(z) - C_n(z) = \mathcal{O}\left(z^{-n-1}\right),$$
$$A_n(z) f_2(z) + 2B_n(z) f_3(z) - D_n(z) = \mathcal{O}\left(z^{-n-1}\right),$$

donde $A_n(z)$ y $B_n(z)$ son polinomios de grado exactamente n y

$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \quad f_2(z) = -\int_0^1 \frac{\log x}{z-x}\,dx, \quad f_3(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2 x}{z-x}\,dx.$$

De este modo, demostró que la solución de este problema viene dada por las relaciones de ortogonalidad

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 (A_n(x) - B_n(x)\log x)\, x^k dx &= 0, \\ \int_0^1 ((A_n(x) - B_n(x)\log x)\log x)\, x^k dx &= 0, \end{aligned}\right\} \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

junto con la condición $A_n(1) = 0$. Luego, usando la convolución de Mellin [62, 63, 64] como un ingrediente crucial, consiguió lo siguiente

$$\begin{aligned} r_n &= \int_0^1 \frac{(A_n(x) - B_n(x)\log x)\log x}{1-x}\,dx \\ &= -\int_0^1\int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} L_n(x) L_n(y)\,dx\,dy, \end{aligned}$$

lo cual implica la irracionalidad de $\zeta(3)$ de acuerdo con la estimación de Beukers dada en (2), véase [10].

Otra de las principales aportaciones que han sido desarrolladas para explicar la irracionalidad de $\zeta(3)$, fue propuesta por Nesterenko, quien en 1996 inspirado en la obra de Gutnik [23] consideró la siguiente modificación de la función racional (4) de Beukers

$$R_n(z) = \frac{(1-z)_n^2}{(z)_{n+1}^2}, \tag{5}$$

y de esta manera demostró que la sucesión residuo dada en (2) se podía escribir de la siguiente forma

$$r_n = -\sum_{k\geq 1} \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{(1-k)_n^2}{(k)_{n+1}^2}\right) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{(1-\nu)_n^2}{(\nu)_{n+1}^2}\left(\frac{\pi}{\sin \pi\nu}\right)^2 d\nu,$$

donde L es la línea vertical $\mathrm{Re}\, z = C$, $0 < C < n+1$, orientada de arriba hacia abajo. De hecho, él aplicó a esta integral, el conocido método de Laplace [34, 35], lo cual le permitió llegar al mismo comportamiento de la sucesión residuo (2) encontrado por Beukers.

Más tarde, en el 2002, Zudillin basado en los resultados de Nesterenko, utilizó la función racional (5) y haciendo uso del algoritmo de Zeilberger [3, 4, 5, 6, 41, 42], obtuvo la relación de recurrencia de Apéry

$$(n+1)^3 y_{n+1} - (2n+1)(17n^2+17n+5)y_n + n^3 y_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \tag{6}$$

la cual satisfacen la sucesión de los numeradores p_n y denominadores q_n de los aproximantes racionales (3) a $\zeta(3)$ con condiciones iniciales

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 6, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 5,$$

donde a partir de la misma se prueba evidentemente la irracionalidad de $\zeta(3)$. Además, a partir de la relación de recurrencia anterior y de los aproximantes racionales (3) a $\zeta(3)$, Apéry [65] dedujo el siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$\zeta(3) = \frac{6\,|}{|\,5} - \frac{1\,|}{|\,117} - \frac{64\,|}{|\,535} - \cdots - \frac{n^6 \qquad |}{|\,(2n+1)\left(17n^2+17n+5\right)} - \cdots$$

También, de forma similar, en 1996 Nesterenko [36] propuso el siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$2\zeta(3) = 2 + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{2\,|}{|\,4} + \frac{1\,|}{|\,3} + \frac{4\,|}{|\,2} + \frac{2\,|}{|\,4} + \frac{6\,|}{|\,6} + \frac{4\,|}{|\,5} + \cdots,$$

donde los numeradores a_n, $n \geq 1$, y los denominadores b_n, $n \geq 2$, están definidos mediante

$$\begin{aligned} b_{4k+1} &= 2k+2, \quad a_{4k+1} = k(k+1), \quad b_{4k+2} = 2k+4, \\ a_{4k+2} &= (k+1)(k+2), \quad b_{4k+3} = 2k+3, \\ a_{4k+3} &= (k+1)^2, \quad b_{4k} = 2k, \quad a_{4k} = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Luego, en el año 2009, Nesterenko publicó una nueva demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$ [38], demostrando para $l_n^3\mathcal{B}_n, l_n^3\mathcal{D}_n \in \mathbb{Z}$, lo siguiente

$$(-1)^n l_n^3 \sum_{k\geq 1} \frac{\partial}{\partial k} R(k) = (-1)^{n-1} l_n^3 \left(2\mathcal{B}_n\zeta(3) - \mathcal{D}_n\right) < (4/5)^n,$$

donde

$$\begin{aligned} R(k) &= k^{-2}\prod_{j=1}^{[(n-1)/2]} \frac{k-j}{k+j} \prod_{j=1}^{[n/2]} \frac{k-j}{k+j}, \\ \mathcal{B}_n &= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} b_k \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_n = \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(2b_k H_k^{(3)} + a_k H_k^{(2)}\right), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
b_k &= (-1)^{n-1} \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]+k}{k} \binom{\left[\frac{n}{2}\right]+k}{k} \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{k} \binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{k}, \\
a_k &= b_k \left(\frac{2}{k} + \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \left(\frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j} \right) + \sum_{j=0}^{[n/2]} \left(\frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j} \right) \right),
\end{aligned}$$

lo cual prueba evidentemente el teorema de Apéry. Aquí, l_n denota el mínimo común múltiplo de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $H_k^{(r)}$ el k-ésimo número armónico de orden r ($H_k^{(1)} = H_k$ y $H_0 = 0$) [16].

Se conoce además, que de los pocos resultados desarrollados para $\zeta(4)$, se encuentran los aportados por Zudilin en [74, 75], donde basado en la serie de tipo hipergeométrica

$$\begin{aligned}
r_{n,z} &= \frac{(-1)^{n+1}}{6} \sum_{k \geq 1} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{(1-k)_n^2 (k+n+1)_n^2 (2k+n)}{(k)_{n+1}^4} \right) = q_{n,z}\zeta(4) - p_{n,z} \qquad (7) \\
&= \mathcal{O}\left(\left(3 - 2\sqrt{3} \right)^{3n} \right),
\end{aligned}$$

dedujo la relación de recurrencia [77]

$$\begin{aligned}
&(n+1)^5 y_{n+1} - 3(2n+1)\left(3n^2+3n+1\right)\left(15n^2+15n+4\right) y_n \\
&\qquad - 3n^3 \left(9n^2-1\right) y_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \qquad (8)
\end{aligned}$$

donde los aproximantes racionales involucrados en (7), la satisfacen con condiciones iniciales

$$q_{0,z} = 1, \quad q_{1,z} = 12, \quad p_{0,z} = 0, \quad p_{1,z} = 13,$$

y a partir de la misma obtuvo el desarrollo en fracciones continuas,

$$\begin{aligned}
\zeta(4) = \frac{13 \mid}{\mid \mathcal{P}(0)} + \frac{1^7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \mid}{\mid \quad \mathcal{P}(1)} + \frac{2^7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \mid}{\mid \quad \mathcal{P}(2)} + \cdots \\
+ \frac{n^7 (3n-1)(3n)(3n+1) \mid}{\mid \quad \mathcal{P}(n)} + \cdots,
\end{aligned}$$

siendo $\mathcal{P}(n) = 3(2n+1)\left(3n^2+3n+1\right)\left(15n^2+15n+4\right)$. Cabe destacar, que la relación de recurrencia de segundo orden (8), no brinda aproximantes diofánticos que prueban la irracionalidad de $\zeta(4)$, sin embargo, presentan un eficiente y rápido algoritmo para el cálculo de esta constante. También, existen otros resultados, relacionados con el número $\zeta(4)$, los cuales han sido desarrollados en su gran mayoría por Zudilin (véase [14, 27, 60, 72, 74, 75, 77]).

En vista a extender el resultado anterior para $\zeta(5)$, Zudilin en [70] auxiliándose de las series hipergeométricas

$$\begin{aligned}
F_n &= n!^4 (-1)^n \sum_{k \geq 1} \left(k + \frac{n}{2} \right) \frac{(1-k)_n (k+n+1)_n}{(k)_{n+1}^6}, \\
\tilde{F}_n &= n!^4 (-1)^{n+2} \sum_{k \geq 1} \left(k + \frac{n}{2} \right) \frac{(-k)_{n+1} (k+n)_{n+1}}{(k)_{n+1}^6},
\end{aligned}$$

dedujo la siguiente relación de recurrencia de tercer orden

$$\begin{aligned}
&(n+1)^6 \alpha_0(n) y_{n+1} + \alpha_1(n) y_n - 4(2n-1)\alpha_2(n) y_{n-1} \\
&\qquad - 4(n-1)^4 (2n-1)(2n-3)\alpha_0(n+1) y_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \qquad (9)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_0(n) &= 41218n^3 - 48459n^2 + 20010n - 2871, \\
\alpha_1(n) &= 2(48802112n^9 + 89030880n^8 + 36002654n^7 \\
&\quad -24317344n^6 - 19538418n^5 + 1311365n^4 \\
&\quad +3790503n^3 + 460056n^2 - 271701n - 60291), \\
\alpha_2(n) &= 3874492n^8 - 2617900n^7 - 3144314n^6 \\
&\quad +2947148n^5 + 647130n^4 - 1182926n^3 \\
&\quad +115771n^2 + 170716n - 44541,
\end{aligned}$$

la cual satisfacen la sucesión de los numeradores $p_{n,5}$ y denominadores $q_{n,5}$ de los aproximantes racionales a $\zeta(5)$ con condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
p_{0,5} &= 0, \quad p_{1,5} = \frac{87}{2}, \quad p_{2,5} = -\frac{1190161}{64}, \\
q_{0,5} &= -1, \quad q_{1,5} = 42, \quad q_{2,5} = -17934.
\end{aligned}$$

Además, comprobó que la sucesión $r_{n,5} = q_{n,5}\zeta(5) - p_{n,5} > 0$ también satisface la relación de recurrencia (9) y verificó que la misma y la sucesión de los denominadores $q_{n,5}$, satisfacen los siguientes límites

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log|r_{n,5}|}{n} &= \log|\mu_2| = -1.08607936\ldots, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\log|q_{n,5}|}{n} &= \log|\mu_3|,
\end{aligned}$$

donde

$$\mu_1 = -0.02001512\ldots, \quad \mu_2 = 0.33753726\ldots, \quad \mu_3 = -2368.31752213\ldots,$$

son las raíces del polinomio característico $\mu^3 + 2368\mu^2 - 752\mu - 16$ de la relación de recurrencia (9). Con estos resultados, Zudilin presentó un eficiente y rápido algoritmo para el cálculo de esta constante $\zeta(5)$, puesto que la sucesión de números racionales $p_{n,5}/q_{n,5}$ converge a $\zeta(5)$ con una velocidad $|\mu_2/\mu_3| < 1.42521964 \cdot 10^{-4}$.

En el 2001, Ball y Rivoal [9, 49, 50, 54] probaron que la sucesión $\{\zeta(2k+1)\}_{k\geq 1}$ contiene una infinidad de irracionales. En otra dirección, para el 2002, el ruso Vladimir Zudilin, un investigador de la Universidad Lomonosov de Moscú, probó que al menos uno de los números $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional [68]. Lo cierto es, que son escasos los resultados que existen acerca de las propiedades aritméticas de los números $\zeta(2k+1)$, con $k \in \mathbb{N}$, los cuales pueden consultarse en [19, 20, 21, 22, 33, 45, 52, 55, 56, 57, 69, 73, 76]

Referencias

[1] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York, 1972.

[2] APÉRY, R., *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque, Vol. 61, pp. 11–13, 1979.

[3] ABRAMOV, S.A., *Applicability of Zeilberger's algorithm to hypergeometric terms*, In ISSAC'02: Proceedings of the 2002 international symposium on Symbolic and algebraic computation, New York, pp. 1–7, 2002.

[4] ABRAMOV, S.A. and LE, H. Q., *A criterion for the applicability of Zeilberger's algorithm to rational functions*, Discrete Math., Vol. 259, pp. 1–17, 2002.

[5] ABRAMOV, S.A., *When does Zeilberger's algorithm succeed?*, Appl. Math., Vol. 30, pp. 424–441.

[6] ABRAMOV, S.A. and LE, H. Q., *Telescoping in the context of symbolic summation in Maple*, J. of Symb. Comput., Vol. 38, pp. 1303–1326, 2004.

[7] ALMKVIST, G., VAN STRATEN, D. and ZUDILIN, W., *Apéry limits of differential equations of order 4 and 5*, Modular Forms and String Duality, Fields Inst. Commun. Ser., Amer. Math. Soc. & Fields Inst., Providence, Vol. 54, pp. 105–123, 2008.

[8] ARVESÚ, J., *Orthogonal forms: A key tool for deducing Apéry's recurrence relation*, J. Approx. Theory, 2012.

[9] BALL, K. and RIVOAL, T., *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs*, Inv. Math., Vol. 146, pp. 193–207, 2006.

[10] BEUKER, F., *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc., Vol. 11, pp. 268–272, 1979.

[11] BEUKER, F., *Legendre polynomials in irrationality proofs*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 22, pp. 431–438, 1980.

[12] BEUKER, F., *Padé approximations in number theory*, Padé approximation and its applications, (Amsterdam, 1980), Lecture Notes in Math., Vol. 888, pp. 90–99, Springer, Berlin-New York, 1981.

[13] BEUKER, F., *Consequences of Apéry's work on $\zeta(3)$*, preprint of talk presented at the Rencontres Arithmétiques de Caen, $\zeta(3)$ Irrationnel: Les Retombées, 1995.

[14] BALANZARIO, E. P., *Método elemental para la evaluación de la función zeta de Riemann en los enteros pares*, Miscelánea Matemática, Vol. 33, pp. 31–41, 2001.

[15] COHEN, H., *Démonstration de I'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'aprés R. Apéry),* Séminaire de théorie des nombres, Grenoble, 1978.

[16] COHEN, J. and GUY, R., *The Book of Numbers,* Copernicus, Springer-Verlag New York, Inc., 1997.

[17] CALDERÓN, J., *La Función Zeta de Riemann*, Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco, Rev. Real Academia de Ciencias, Zaragoza, Vol. 57, pp. 67–87, 2007.

[18] EDWARDS, H. M., *Riemann's Zeta Function,* Academic Press, Dover, New York, 1974.

[19] FISCHLER, S., *Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal, ...],* Séminaire Bourbaki, Astérisque, Vol. 294, Nº 990, pp. 27–62, 2004.

[20] FISCHLER, S., *Restricted rational approximation and Apéry-type constructions,* Indagationes Mathem, Vol. 20, pp. 201–215, 2009.

[21] FISCHLER, S., W. Zudilin, *A refinement of Nesterenko's linear independence criterion with applications to zeta values,* Math. Ann., Vol. 347, pp. 739–763, 2010.

[22] FISCHLER, S., *Nesterenko's criterion when the small linear forms oscillate,* Arch. Math., Vol. 98, pp. 143–151, 2012.

[23] GUTNIK, L. A., *On the irrationality of certain quantities involving $\zeta(3)$*, Acta Arith., Vol. 42, pp. 255–264, 1983.

[24] GASPER, L. and RAHMAN, M., *Basic Hypergeometric Series,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[25] GOURDON, X. and SEBAH, P., *The Riemann Zeta-function $\zeta(s)$: generalities*, Numbers, constants and computation, 2004.

[26] GRANERO, F., *El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones,* La Gaceta de la RSME, Vol. 12, Nº 4, pp. 721–737, 2009.

[27] HANCL, J., *A simple proof of the irrationality of ß^4*, Amer. Math. Monthly, Vol. 93, pp. 374–375, 1986.

[28] HATA, M., *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math., pp. 99–125, 1990.

[29] HATA, M., *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures et Appl., Vol. 69, pp. 133–173, 1990.

[30] HATA, M., *A new irrationality measure for $\zeta(3)$*, Acta Arith., Vol. 92, pp. 47–57, 2000.

[31] JIN, Y. and DICKINSON, H., *Apéry sequences and Legendre transforms*, J. Austral. Math. Soc., Vol. 68, pp. 349–356, 2000.

[32] JAIN, L. and TZERMIAS, P., *Beukers' integrals and Apéry's recurrences*, J. Integ. Seq., Article 05.1.1, Vol. 8, 2000.

[33] KRATTENTHALER, C. and RIVOAL, T., *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 186, Nº 875, 2007.

[34] LÓPEZ, J. L. and PAGOLA, P. J., *The Laplace's and Steepest Descents Methods Revisited*, International Mathematical Forum, Vol. 2, Nº 7, pp. 297–314, 2007.

[35] LÓPEZ, J. L. and PAGOLA, P. J., *Fórmulas explícitas para los coeficientes de los métodos de Laplace y Saddle Point*, XI Congreso de Matemática Aplicada, Ciudad Real, pp. 1–9, septiembre 2009.

[36] NESTERENKO, Yu. V., *A few remarks on $\zeta(3)$*, Math. Notes, Vol. 59, Nº 6, pp. 625–636, 1996.

[37] NESTERENKO, Yu. V., *Integral identities and constructions of approximations to zeta values*, J. Théor. Nombres Bordx, Vol. 15, pp. 535–550, 2003.

[38] NESTERENKO, Yu. V., *An Elementary Proof of the Irrationality of $\zeta(3)$*, Moscow University Mathematics Bulletin, Vol. 64, Nº 4, pp. 165–171, 2009.

[39] NIKISHIN, E. M. and SOROKIN, V. N., *Rational Approximations and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc. Providence, RI, Vol. 92, 1991.

[40] OSLER, T. J., *A Computer Hunt for Apery's*, Math. Spectrum, Vol. 35, Nº 1, pp. 5–8, 2002.

[41] PAULE, P., *A Mathematica Version of Zeilberger's Algorithm for Proving Binomial Coefficient Identities*, J. Symb. Comput., Vol. 20, pp. 673–698, 1995.

[42] PAULE, P., *Symbolic summation–some recent developments*, In Computer Algebra in Science and Engeneering–Algorithms, Systems, and Applications, pp. 138–162, 1995.

[43] PRÉVOST, M., *A new proof of the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ using Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math., Vol. 67, pp. 219–235, 1996.

[44] PRÉVOST, M. and SOROKIN, V. N., *Hermite-Padé Approximants and Apery Theorem*, Technical Report L.M.P.A., 2007.

[45] PILEHROOD, Kh. H., *Simultaneous generation for zeta values by the Markov-WZ method*, D. Math. Theor. Comput. Sci. DMTCS, pp. 115–124, 2008.

[46] RIEMANN, B., *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monastsber. Akad. Berlin, pp. 671–680, 1859.

[47] REYSSAT, E., *Irrationalité de* $\zeta(3)$, Selon Apéry in: 20 année. Seminaire Delange–Pisot–Poitou, 1978.

[48] RHIN, G. and VIOLA, C., *The Group Structure for* $\zeta(3)$, Acta Arith., Vol. 97, pp. 269–293, 2001.

[49] RIVOAL, T., *La fonction zêta de Riemann prend una infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., pp. 267–270, 2000.

[50] RIVOAL, T., *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, Thèse de doctorat, Laboratoire SDAD, Université de Caen, 2001.

[51] RIVOAL, T., *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$, Acta Arith., pp. 157–167, 2002.

[52] RIVOAL, T. and ZUDILIN, W., *Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant*, Math. Ann., Vol. 326, pp. 705–721, 2003.

[53] RIVOAL, T., *Séries hypergéométriques et irrationalité des valeurs de la fonction zêta*, Actes des journées arithmétiques de Lille (July, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux, pp. 351–365, 2003.

[54] RIVOAL, T., *Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann*, Quadrature, Vol. 49, 2003.

[55] RIVOAL, T., *Simultaneous generation of Koecher and Almkvist-Granville's Apéry-like formulae*, Experiment. Math., Vol. 13, pp. 503–508, 2004.

[56] RIVOAL, T., *Hypergeometric constructions of rational approximations of (multiple) zeta values*, in Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-Functions, G. Bhowmik et. al. (eds.), MSJ Memoirs, Mathematical Society of Japan, Tokyo, Vol. 21, pp. 167–183, 2010.

[57] SÁNCHEZ, P. A., *Valores irracionales de la función zeta de Riemann en los impares*, Morfismos, Vol. 10, Nº 2, pp. 15–43, 2006.

[58] SOROKIN, V. N., *Hermite-Padé approximations for Nikishin systems and the irrationality of* $\zeta(3)$, Communications of the Moscow Math. Soc., Vol. 49, pp. 176–177, 1993.

[59] SOROKIN, V. N., *Apéry's theorem*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. [Moscow Univ. Math. Bull.], Nº 3, pp. 48–52, 1998.

[60] SOROKIN, V. N., *One algorithm for fast calculation of* $ß^4$, Preprint (Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute for Applied Mathematics, Moscow), 2002.

[61] SALIKHOV, V., *On multiple integrals represented as a linear form in* $1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2k-1)$, J. Math. Sci., Vol. 146, Nº 2, 2007.

[62] SMET, Ch. and VAN ASSCHE, W., *Mellin transforms for multiple Jacobi-Piñeiro polynomials and a q-analogue*, J. Approx. Theory, pp. 782–806, 2010.

[63] VAN ASSCHE, W., *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence*, Contemp. Math., Vol 236, pp. 325–342, 1999.

[64] VAN ASSCHE, W., *Hermite-Padé Rational Approximation to Irrational Numbers*, Comput. Meth. Funct. Theory, Vol. 10, Nº 2, pp. 585–602, 2010.

[65] VAN DER POORTEN, A. J., *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, An informal report, Math. Intelligencer, Vol. 1, pp. 195–203, 1979.

[66] ZUDILIN, W., *Difference equations and the irrationality measure of numbers*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 218, pp. 160–174, 1997.

[67] ZUDILIN, W., *One of the eight numbers* $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(17), \zeta(19)$ *is irrational*, Mat. Zametki [Math. Notes], pp. 472–476, 2001.

[68] ZUDILIN, W., *One of the eight numbers* $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ *is irrational*, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys], pp. 149–150, 2001.

[69] ZUDILIN, W., *Irrationality of values of zeta function at odd integers*, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys], pp. 215–216, 2001.

[70] ZUDILIN, W., *A third-order Apéry-like recursion for* $\zeta(5)$, Mat. Zametki [Math. Notes], pp. 796–800, 2002.

[71] ZUDILIN, W., *An elementary proof of Apéry's theorem*, E-print math. NT/0202159, Moscow Lomonosov State University, pp. 1–8, 2002.

[72] ZUDILIN, W., *Difference equation and permutation group for* $\zeta(4)$, Actes des 12'emes rencontres arithmétiques de Caen (June 29–30, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux (2002).

[73] ZUDILIN, W., *Irrationality of values of the Riemann zeta function*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. [Russian Acad. Sci. Izv. Math.], Vol. 66, Nº 3, 2002.

[74] ZUDILIN, W., *An Apéry-Like Difference Equation for Catalan's Constant*, Elect. J. Comb., Vol. 10, Nº 1, pp. 1–10, 2003.

[75] ZUDILIN, W., *Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values*, Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen (June 29–30, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux, pp. 593–626, 2003.

[76] ZUDILIN, W., *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théorie Nombres Bordeaux, pp. 251–291, 2004.

[77] ZUDILIN, W., *Binomial sums related to rational approximations to* $\zeta(4)$, Math. Notes, Vol. 75, pp. 594–597, 2004.

[78] ZUDILIN, W., *Arithmetic hypergeometric series*, Russian Math. Surveys, pp. 163–216, 2011.

Sobre el autor:
Nombre: Anier Soria Lorente
Correo electrónico: asorial@udg.co.cu
Institución: Universidad de Granma, Bayamo, Cuba.