Revista Electrónica EduSol, ISSN: 1729-9091. 2012. Volumen 10, No. 31, abr.-jun., pp. 1-11.

Universidad de Ciencias Pedagógicas “Raúl Gómez García”, Guantánamo, Cuba

Enseñar a demostrar aplicando la inducción completa: algunas recomendaciones metodológicas

M.Sc Risel Ruiz Cordovés. Profesora Auxiliar

e-mail**:risel@ucp.gu.rimed.cu**

Institución: Universidad de Ciencias Pedagógicas “Raúl Gómez García”

Provincia: Guantánamo

País: Cuba

M.Sc Marcia de las Mercedes Zamora Pellicier, Asistente

e-mail**:mzamora@ucp.gu.rimed.cu**

Institución: Universidad de Ciencias Pedagógicas “Raúl Gómez García”

Provincia: Guantánamo

País: Cuba

Fecha de recibido: diciembre de 2009

Fecha de aprobado: marzo de 2010

RESUMEN

A partir del análisis de algunos factores que inciden en la calidad del aprendizaje de la Matemática, en específico en la resolución de problemas de demostración de proposiciones por inducción completa en el 12mo grado, se proponen algunas recomendaciones a tener en cuenta en su enseñanza ilustrando el proceder a través de ejercicios resueltos, lo que permite que el estudiante se apropie de un procedimiento de solución en cada caso específico atendiendo a la estructura de la proposición. Se proponen otros ejercicios que permiten sistematizar el procedimiento obtenido.

Palabras Clave: Solución de Problemas, Educación Preuniversitaria

Teaching using the complete induction show: some methodological recommendations

ABSTRACT

Starting from the analysis of some factors that impact in the quality of the Mathematics's learning, in specific in the resolution of demonstration problems of advance for complete induction in the 12mo grade, they intend some recommendations to keep in mind in their teaching illustrating proceeding through resolved exercises, what allows the student to appropriate of a solution procedure in each specific case assisting to the structure of the proposition. They intend other exercises that allow to systematize the obtained procedure.

Keywords: Problem's Solution, High School Education

INTRODUCCIÓN

Dentro de las exigencias para el desarrollo de capacidades específicas y generales en la enseñanza de la Matemática para la Educación Media Superior se encuentra que los estudiantes deben ser capaces de:

- Aplicar el método de inducción completa a la obtención de nuevos conocimientos y la determinación del término n-ésimo de una sucesión.
- Saber qué es una demostración matemática y en qué difiere de otros tipos de razonamiento matemático.
- Comprender, evaluar y realizar ejercicios de demostración y demostraciones de proposiciones (prueba y refutación) por distintos métodos.
- Fundamentar la pertinencia de cadenas de argumentos de acuerdo con la situación de aplicación planteada.
- Elaborar ideas matemáticas y estrategias de solución para resolver problemas, estableciendo relaciones entre los conocimientos y habilidades de distintas áreas matemáticas y asignaturas y utilizando conscientemente procedimientos heurísticos.

Sin embargo, los diferentes informes de la evaluación de la calidad del aprendizaje de esta asignatura revelan que existen insuficiencias en la resolución de ejercicios y problemas matemáticos de demostración, en los que no se excluyen, por supuesto, la demostración por inducción completa. Además, en los exámenes aplicados al 12mo grado, una de las mayores dificultades se revela en la aplicación del método de inducción completa a la demostración de propiedades.

Existen varios factores que intervienen en las causas de esta problemática:

- Es insuficiente la enseñanza y sistematización de los procedimientos heurísticos en las clases.
- Es insuficiente el dominio del contenido por parte de los docentes, en los momentos actuales.
- El sistema de creencias de los alumnos y docentes hacia la ciencia Matemática como una asignatura de difícil aprendizaje.
- El contenido referente a la inducción completa aparece disperso en varias literaturas que no siempre se encuentra al alcance de los docentes, de manera que este, cuando imparte la asignatura Matemática en el 12mo grado, solo tiene acceso al libro de texto del grado mencionado.
- El poco desarrollo de habilidades de los estudiantes para realizar inferencias y deducciones lógicas verdaderas, dado entre otras razones, por no estar explícita su enseñanza en la escuela.

El desarrollo de la capacidad en los estudiantes para realizar demostraciones por el método de inducción completa constituye un gran salto hacia nuevas y ricas formas de razonamiento deductivo, a la vez que pone en sus manos un formidable instrumento de gran utilidad práctica inmediata.

DESARROLLO

Para el profesor de Matemática resulta imprescindible el dominio del método de demostración por inducción completa, tanto en relación al contenido y la estructura de esta forma de demostración, como con la diversidad de sus posibilidades de aplicación. El docente debe ser capaz de fundamentar la necesidad de cada uno de los pasos de la demostración y de establecer claramente la relación entre estos.

Del mismo modo ha de estar en condiciones de aplicar la inducción completa para demostrar igualdades con sumatorias y productos finitos, identidades y desigualdades, propiedades de divisibilidad, propiedades geométricas, etc.

En resumen, el método de inducción completa resulta un factor de gran importancia para la formación del profesor de la asignatura y para el desarrollo de habilidades y capacidades de demostrar en los estudiantes de la enseñanza media superior.

En el presente material se exponen algunas ideas sobre la aplicación de los procedimientos heurísticos en las demostraciones de propiedades aplicando el principio de inducción completa, así como la recopilación de un conjunto de ejercicios que contribuyen al desarrollo de esta habilidad.

Se exponen algunas ideas importantes acerca del razonamiento inductivo y deductivo en la obtención de proposiciones.

A través del razonamiento deductivo se obtienen proposiciones verdaderas a partir de premisas verdaderas, con ayuda de las reglas de inferencia deductiva.

En el razonamiento inductivo se pasa de una proposición de menor generalidad a otra de mayor generalidad. Este tipo de razonamiento no conduce necesariamente a conclusiones verdaderas a partir de premisas verdaderas.

La inducción completa es el razonamiento en que la conclusión general se obtiene a partir del estudio de todos los casos del fenómeno observado y tiene su validez garantizada. Un caso particular de ella es la inducción matemática

La inducción incompleta es el razonamiento en que la conclusión general se obtiene a través del examen de algunos casos del fenómeno observado. A través de ella se puede arribar a conclusiones verdaderas o falsas.

La aplicación de los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la resolución de problemas, en este caso de demostración, es esencial para que los alumnos se apropien de métodos de trabajo que les permitan resolver problemas de diferentes tipos. En particular en la elaboración de procedimientos propios las reglas heurísticas o impulsos, las estrategias y los principios heurísticos son de gran utilidad.

La demostración de propiedades por inducción completa es muy utilizada para el caso del conjunto de los números naturales. Este contenido se estudia en el 12mo grado. Consideramos necesario hacer referencia a la esencia del principio de inducción completa.

Principio de inducción completa o inducción matemática: Si el primer elemento de un conjunto X, finito o simplemente infinito, tiene una propiedad y si de la hipótesis de que un elemento cualquiera la admite se deduce que también la admite el siguiente, entonces tiene dicha propiedad todos los elementos de X.

La aplicación de este principio requiere realizar los dos pasos siguientes.

1ro: Hay que comprobar que la propiedad es cierta para el primer elemento del conjunto.

2do: Hay que hacer la hipótesis de que la propiedad sea cierta para un elemento cualquiera y entonces tratar de inferir de aquí que la propiedad también es cierta para el elemento siguiente (o su sucesor según la naturaleza del conjunto).

Veamos algunos ejemplos y la utilización de los procedimientos heurísticos en cada caso.

Ejemplo 1. Demuestre que para todo número natural $n \geq 1$, se cumple que:

$$7 + 13 + 19 + \ldots + (6n + 1) = n\,(3n + 4)$$

1er paso (inicio de inducción): Probemos que se cumple la propiedad para el primer elemento de este conjunto, es decir para $n=1$.

En efecto, la propiedad es cierta para el primer elemento pues, sustituyendo este valor en la expresión se tiene que $(3(1) + 4) = 7$

2do paso: suponemos la hipótesis cierta de que la propiedad se cumple para un elemento cualquiera $n = k$, es decir, que se cumple:

$7 + 13 + 19 + \ldots + (6k + 1) = k\,(3k + 4)$. Hipótesis de inducción

Debemos demostrar que entonces la propiedad es cierta para su sucesor $n= k+1$, es decir: $7 + 13 + 19 + \ldots + (6(k+1) + 1) = (k+1)\,(3(k+1) + 4)$.

Efectuando los productos indicados resulta:

Tesis de inducción: $7 + 13 + 19 + \ldots + (6k +7) = (k+1)\,(3k + 7)$

Demostración de la tesis de inducción. Utilizaremos la vía directa de demostración, o sea, partir de la hipótesis y llegar a la tesis.

Hipótesis: $7 + 13 + 19 + \ldots + (6k + 1) = k\,(3k + 4)$.

Vemos que para obtener la tesis basta sumar en ambos miembros de la igualdad el término que le sigue $6k+7$ (sucesor de $6k+1$).

Obtendríamos entonces:

$$7 + 13 + 19 + \ldots + (6k + 1) + (6k+7) = k\,(3k + 4) + (6k+7)$$

Como ya tenemos los miembros izquierdos iguales, entonces trabajaremos con el miembro derecho, efectuando los productos indicados:

$7 + 13 + 19 + \ldots + (6k + 1) + (6k+7) = 3k^2 + 4k + 6k+7$

$= 3k^2 + 10k + 7$ *reduciendo términos semejantes*

$= (k+1)(3k+7)$ *descomponiendo en factores*

Luego, $7 + 13 + 19 + \ldots + (6k + 1) + (6k+7) = (k+1)(3k+7)$ como se quería demostrar.

Es decir, la propiedad se cumple también para el elemento k+1.

Por tanto, podemos concluir que la propiedad se cumple para cualquier número n, natural, $n \geq 1$.

Haciendo una retrospectiva, preguntémonos:

¿Cómo procedimos?, ¿de cuáles conocimientos previos necesité disponer para realizar la demostración?, ¿bajo qué condiciones podré aplicar este proceder?

Entre los elementos previos que debemos disponer se encuentran los siguientes:

Método directo de demostración.

Transformaciones equivalentes.

Multiplicación de un término por un polinomio.

Factorización de trinomios de la forma mx^2+px+q.

En la demostración se utiliza la transformación equivalente “sumar el mismo número (término) en ambos miembros de la expresión, y a continuación se desarrolla el miembro derecho.

Generalizando este proceder para demostrar la tesis de inducción se tiene la siguiente regla heurística: “siempre que tengamos que demostrar que una sumatoria de términos es igual a una expresión, debemos sumar el sucesor del término para n = k en ambos miembros de la igualdad, en la hipótesis de inducción”.

Ejercicios que se resuelven por un proceder análogo, es decir, utilizando la regla heurística anterior:

Demuestre por inducción completa que para todos los números naturales n se cumple:

a) $4+10+16+\ldots+(6n+4)=(n+1)(3n+4)$

b) $1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$

c) $2+7+12+\ldots+(5n+2)=(n+1)(5n+4)/2$

d) $3^0+3^1+3^2+\ldots+3^n=(3^{n+1}-1)/2$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}n(4n^2-1)$$

Ejemplo 2. Demuestra por inducción completa que para todo número natural n se cumple que:

$4^n + 15n - 1$ es divisible por 9.

1er paso: Verificar que la propiedad se cumple para el primer elemento, es decir, para n= 0.

Entonces sustituyendo este valor tenemos:

$4^0 + 15(0) - 1 = 0$ que es divisible por 9 ya que 0.9 = 0.

2do paso: Suponer que la propiedad se cumple para cualquier elemento n=k, es decir $4^k + 15k - 1$ es divisible por 9. Traduciendo esto al lenguaje algebraico significa que existe un número natural m tal que $4^k + 15k - 1 = 9m$. *hipótesis de inducción*

Entonces demostremos que la propiedad se cumple para su sucesor, es decir n= k+1, o sea,

$4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ es divisible por 9 que traducido al lenguaje algebraico significa que existe un número natural p tal que $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 9p$. *tesis de inducción.*

Demostración de la tesis de inducción.

Aquí no se trata de una sumatoria de términos, como en el ejemplo anterior, sino de demostrar que un término ($4^{k+1} + 15(k+1) - 1$) es divisible por otro (9p), así que debemos partir de ese propio término en la tesis de inducción:

$4^{k+1} + 15(k+) - 1 = 4.4^k + 15k + 15 - 1$ *aplicando propiedad de la potencia*

$= 4.4^k + 15k + 14 + (4.15k - 4) - (4.15k - 4)$ *sumar y restar convenientemente un mismo número.*

$= 4(4^k + 15k - 1) + 15k + 14 - 60k + 4$ *extrayendo factor común 4 y eliminando paréntesis.*

$= 4(9m) - 45k + 18$ *fíjese que $4^k + 15k - 1 = 9m$ por hipótesis y rediciendo términos semejantes.*

$= 4(9m) - 9(5k+2)$ *extrayendo factor común*

$= 9(4m - 5k + 2)$ *fíjese que 4m-5k+2 da como resultado otro número llamémosle p, por las operaciones que aparecen.*

= 9p, que significa que la expresión es divisible por 9.

Por tanto, la propiedad se cumple para todos los números naturales.

Análogamente, realizando una retrospectiva de la solución debemos hacernos las mismas preguntas que en el ejemplo anterior: ¿cómo procedimos?, ¿de cuáles conocimientos previos necesité disponer para realizar la demostración?, ¿bajo qué condiciones podré aplicar este proceder?

Entre los elementos previos que debemos disponer se encuentran los siguientes:

- Método directo de demostración.
- Transformaciones equivalentes.
- Propiedades de las potencias de exponente natural.
- Multiplicación de un término por un polinomio.
- Factorización de expresiones utilizando la extracción del factor común.
- Concepto de divisibilidad de números naturales.

Para realizar la demostración partimos del miembro izquierdo de la tesis y utilizando las propiedades de las potencias, así como el concepto de divisibilidad y llegamos al miembro derecho de la tesis. Percatémonos de que en algún momento de la demostración utilizamos la hipótesis.

Tratando de generalizar esta regla podemos resumir que “en ejercicios con esta estructura (donde nos piden demostrar que una expresión es divisible por otra) es viable partir del miembro izquierdo de la tesis de inducción, utilizar una cadena de reglas de inferencias fundamentadas por propiedades y conceptos estudiados y notar que en algún momento se debe utilizar la hipótesis de inducción y llegar al miembro derecho de la tesis de inducción”.

Ejercicios que se resuelven con un proceder análogo son los siguientes:

1. Demuestre por inducción completa que: La suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es siempre divisible por 9.
2. Demuestre por inducción completa que:

   $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es siempre divisible por 133. a)

   $3^{2n} - 1$ es divisible por 2^{n+2}, pero no es divisible por 2^{n+3}. b)

   $2^{3n} + 1$ es divisible por 3^{n+1}, pero no es divisible por 3^{n+2} **c)**

Ejemplo 3. Demuestra por inducción completa que se cumple la siguiente desigualdad. Analiza para qué valor de n es válida.

$(1+\alpha)^{n} > 1 + n\alpha \quad (\alpha \neq 0,\ \alpha > -1)$

Solución.

Al analizar la proposición nos percatamos que al evaluar para n=0 no se satisface la desigualdad ya que $(1+\alpha)^0=1$ y no se cumple que $1>1$ por la ley de orden en los números naturales.

Al evaluar para n=1 tenemos que $(1+\alpha)^1 = 1+\alpha$ y tampoco se cumple la desigualdad.

Entonces la desigualdad es válida solo para $n>1$.

Apliquemos ahora el principio de inducción completa.

Primer paso: La desigualdad se cumple para el primer elemento, es decir para n=2, pues

$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 > 1+2\alpha \quad (\alpha\neq 0,\ \alpha> -1)$

Segundo paso: Suponemos que se cumple para n=k. luego

$(1+\alpha)^k > 1+k\alpha \quad (\alpha\neq 0,\ \alpha> -1)$ hipótesis de inducción

Demostremos que entonces se cumple para su sucesor, es decir que

$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha \quad (\alpha\neq 0,\ \alpha> -1)$ tesis de inducción

Demostración de la tesis de inducción.

Debemos partir de la hipótesis de inducción, esto es

$(1+\alpha)^k > 1+k\alpha \quad (\alpha\neq 0,\ \alpha> -1)$ para obtener el miembro derecho de la tesis debemos multiplicar por la expresión $1+\alpha$, desarrollemos la expresión, quedando:

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^k(1+\alpha) &> (1+k\alpha)(1+\alpha)\\ &=1+\alpha+k\alpha+k\alpha^2\\ &= 1+\alpha(k+1)+k\alpha^2\\ &> 1+\alpha(k+1),\ \text{pues } k\alpha^2>0.\end{aligned}$$

Luego, $(1+\alpha)^{k+1}>1+(k+1)\alpha$

Así concluimos que la propiedad se cumple para todos los números naturales $n>1$.

El proceder en ejercicios con esta estructura, es decir, donde demostremos que se cumple una desigualdad, es recomendable partir de la hipótesis de inducción, o del miembro izquierdo de la tesis de inducción en otros casos, y realizar comparaciones sucesivas utilizando los recursos del trabajo algebraico y propiedades conocidas del orden de los números naturales.

Ejercicio que se resuelve con un proceder análogo:

Demuestre por inducción completa las desigualdades siguientes:

a) $3n>n+1$

b) $n^2+1>n$

c) $(1+n)^2>1+n^2$

d) $2^n>n^2$

e) $4^n>n^4$

Otros ejercicios:

1. Demuestre que las leyes siguientes se cumplen para todos los números a y b reales, con $a\neq 0$, $b\neq 0$ y para todos los m y n naturales:

$a^n/b^n=(a/b)^n$

$a^m/a^n=a^{m-n}$

Es indispensable que el docente tenga en cuenta en el desarrollo de su clase, y por tanto en la planificación de la misma que:

- Los alumnos expliquen sus ideas unos a otros, en pequeños grupos o a la totalidad de los alumnos, de forma completa, haciendo hincapié en el vocabulario técnico de la asignatura.
- Se haga un análisis de la ganancia Metodológica de cada ejercicio.

CONCLUSIONES

Los procedimientos heurísticos tienen un valor incalculable en la asimilación de procedimientos de trabajo para realizar demostraciones de proposiciones matemáticas. Sin embargo, se debe tener en cuenta que su enseñanza no es espontánea, hay que familiarizar a los estudiantes con los procedimientos que deben aprender y destacar sus ventajas.

Aprovechar todos los momentos de la clase para que los estudiantes practiquen la utilización de las formas de trabajo de la Matemática promueve necesariamente un desarrollo del pensamiento lógico y en consecuencia, mejora la calidad del aprendizaje de la asignatura.

BIBLIOGRAFÍA

1. Allendoerfer, Carl B. Fundamentos de Álgebra. España: Mc Graw – Hill, 1970.
2. ________________ Introducción moderna a la Matemática Superior. La Habana. Pueblo y Educación, 1972.

3. Ballester, S. Metodología de la Enseñanza de la Matemática. La Habana. Pueblo y Educación, 1990, Tomos I y II.
4. Matemática. Duodécimo grado. [Por] P. Campistrous [y otros]. La Habana. Pueblo y Educación, 1991.
5. González, M. Matemática. Quinto curso. Complementos de aritmética y álgebra. La Habana. Pueblo y Educación, Tomo primero, 1968.
6. Müller, H.Inferencia lógica y demostraciones de la enseñanza de la Matemática. La Habana. Pueblo y Educación, 1980.
7. Santibañez, María Emilia y Félix Recio Pacheco. Introducción al Análisis Matemático. Inducción completa. La Habana. Pueblo y Educación, 1982.