

Metaheurística para la solución del Transit Network Design Problem multiobjetivo con demanda multiperiodo

Natalia Andrea Garzón¹, Eliana María González Neira² y Ignacio Pérez Vélez³

Recepción: 17-10-2016 | Aceptación: 20-01-2017 | En línea: 08-05-2017

MSC:90C29, 90C59 | PACS:02.70.-c

doi:10.17230/ingciencia.13.25.2

Resumen

En este artículo se estudia el problema de Red de Transporte, usualmente conocido como TNDP (Transit Network Design Problem) multiobjetivo. Este consiste en encontrar la combinación ideal de rutas y frecuencias, que permita realizar un balance entre los intereses de los usuarios y los operadores, que se contraponen. Utiliza como datos de entrada un grafo con sus respectivos costos de transporte (en este caso tiempos) y demandas asociadas a cada par de nodos. Como método de solución a este problema de optimización combinatoria multiobjetivo, se propone el uso de la metaheurística Búsqueda en Vecindades Variables (VNS), que resuelve problemas de optimización buscando soluciones competitivas mediante el cambio de vecindario iterativamente. El método propuesto fue probado inicialmente en el caso de estudio diseñado por Mandl, que consiste en 15 nodos y 21

¹ Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, Natalia.garzon-s@mail.escuelaing.edu.co, <http://orcid.org/0000-0002-4217-1110>, Bogotá, Colombia.

² Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, eliana.gonzalez@javeriana.edu.co, <http://orcid.org/0000-0002-4590-3401>, Bogotá, Colombia.

³ Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, ignacio.perez@escuelaing.edu.co, Bogotá, Colombia.

arcos, y una matriz de demandas simétrica; y posteriormente para otras 11 instancias con tres tamaños de grafo diferentes (15, 30, 45 nodos). El modelo primero se corrió con el caso original para compararlo con autores que en oportunidades pasadas han trabajado el mismo problema. Posteriormente el VNS propuesto se probó con un modelo de demanda cambiante en 3 momentos del día (Mañana, tarde y noche) para corroborar los resultados positivos obtenidos en el primer ejercicio y darle un alcance mayor a la solución del problema.

Palabras clave: Diseño de redes de transporte; transporte público; búsqueda de vecindades variables; optimización multiobjetivo.

Metaheuristics to Solve the Multiobjective Transit Network Design Problem (TNDP) with Multiperiod Demand

Abstract

In this paper we study the Transport Network Design Problem (TNDP). It consists in finding the ideal combination of routes and frequencies that allow the decision maker to balance the interests of the users and the transit operators, which are opposite. The TNDP uses as input a graph, with their transportation costs (in this case time), and the demands associated to each pair of nodes. Our proposed approach to solve the TNDP is based on a Variable Neighborhood Search (VNS) metaheuristic. VNS has been used to solve different kinds of combinatorial optimization problems and it consists in searching competitive solutions by iterative changes of the neighborhood. The VNS is tested first for the case study designed by Mandl, which consists in 15 nodes and 21 arcs, and a symmetric demand matrix. Posteriorly the VNS was tested for other 11 instances of (15, 30 and 45 nodes). In the first place, the model was run for that original case to compare it with other authors who worked this problem in the past. Then, we tested the VNS approach for a changing demand model in 3 moments of the day (Morning, afternoon and night) to prove the positive results obtained in the first exercise and give a greater scope to the problem solution.

Key words: Network design problem; public transportation; variable neighborhood search; multi-objective optimization.

1 Introducción

El sistema de transporte público es un componente básico en la estructura social, económica y física de un área urbana, y debe ser efectivo, confiable

y sostenible. En América Latina, el estado de las redes de transporte y sus componentes es heterogéneo, no podría afirmarse que todos los países latinoamericanos tienen las mismas condiciones de movilidad. Sin embargo, las problemáticas se podrían generalizar en rutas superpuestas, frecuencias inadecuadas, flotas mal calculadas, tiempos de espera excesivos y desconexión de las estrategias con la demanda real de los sistemas [1]. Esto explica la pérdida progresiva de participación de los sistemas de transporte público que, debido al crecimiento económico, la apertura de mercados y una clara inconformidad de los usuarios, ha aumentado las tasas de uso de automóviles [2], que en el largo plazo empeoran el problema de movilidad [3]. La problemática generalizada del transporte público se presenta desde los años 70 sin tener cambios reales que apalancen un transporte sostenible económica y socialmente, capaz de discernir una nueva movilidad para una nueva sociedad [4]. Esto incluye tomar en consideración el entorno económico de los países latinoamericanos y aspectos claves como los costos, traducidos en las tarifas de acceso al sistema, tiempos de viaje y el volumen de pasajes consumidos entre zonas, que varía en el tiempo e implica finalmente una demanda cambiante del sistema. Estas características son contempladas en el Transit Network Design Problem, un problema multiobjetivo [5], de optimización combinatoria, que ha sido abordado desde la década de los 60. La mayoría de los casos mencionados han asumido demanda constante, alejando de la realidad los modelos y métodos de solución empleados. Con base en lo anterior y evidenciando las oportunidades de contribución que presenta el problema descrito, se busca articular las estrategias relativas al transporte público con el entorno real que requiere el sistema, en términos de demanda, necesidades de tiempo, confiabilidad y con las restricciones económicas, que de ignorarse pueden hacer el sistema menos eficiente. Para lograrlo, se plantea solucionar el Transit Network Design Problem (TNDP) mediante la metaheurística [6] de Búsqueda en Vecindades Variables (VNS por sus siglas en inglés) [7]. El TNDP abordado tiene en cuenta demanda multiperiodo, ya que ha sido poco estudiada hasta el momento. Por su parte la metaheurística VNS presenta características apropiadas para solucionar este tipo de problemas, tales como simplicidad, coherencia por los pasos que la componen, eficiencia en sus soluciones, fácil aplicabilidad y robustez, ya que da buenas soluciones en diferentes instancias [8].

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: En la sección

1 se realiza un resumen de cómo ha sido abordada la problemática hasta el momento en la literatura, en la sección 2 se formula matemáticamente el problema, en la sección 3 se describe el método de solución utilizado, basado en el VNS, en la sección 4 se presentan los resultados obtenidos tanto para el caso práctico aplicado (Red de Mandl), como para la variación del problema basado en la demanda multiperiodo, con sus respectivos análisis y en la sección 5 se presentan las conclusiones y trabajos futuros.

2 Estado del arte

El TNDP ha sido definido como el problema del diseño óptimo de recorridos y frecuencias para transporte público, y puede ser encontrado en la literatura también como Urban Transit Network Design Problem (UTNDP), Transit Route Network Design (TRND) o Bus Transit Route Network Design Problem (BTRNDP) [9].

Es un problema con objetivos en conflicto, ya que para los usuarios se trata de la minimización de tiempos de viaje, de espera y de trasbordo, mientras que los operadores buscan la minimización de sus costos representados generalmente en el tamaño de la flota requerida. Las decisiones son el conjunto de recorridos de transporte urbano y sus frecuencias asociadas, bajo restricciones de demanda, nivel de servicio y disponibilidad de flota. Respecto a la restricción de demanda los únicos autores que han trabajado la demanda multiperiodo en el tiempo son [10] y [11]. La naturaleza multiobjetivo es resumida en la mayoría de la literatura consultada en una sola formulación, lo que requiere la estimación de coeficientes de conversión para cada función objetivo con el fin de unificarlo, como presentan autores como [12],[13],[14],[10],[15] y [16]. Las formulaciones presentadas por [17],[18],[19],[20],[21] y [22] separan la función objetivo de usuarios y operadores en dos ecuaciones independientes. Esta tendencia, adoptada en los estudios desarrollados en los últimos años, será acogida en el presente trabajo.

Respecto a las restricciones, son comúnmente encontradas las cotas mínimas de las frecuencias, el tamaño de la flota, la duración máxima de los recorridos y el factor de ocupación de los buses, con pocas diferencias en la formulación. Las restricciones establecen los elementos que definen el diseño del sistema de transporte público que se quiere modelar [23].

Por otro lado, la dificultad del problema ya ha sido analizada, especialmente, por [24]. Por ser clasificado como un problema NP-Hard [25] se conocen solo dos estudios que formulen el problema de manera exacta [26] y [27]. Los algoritmos encontrados son aproximados y pueden dividirse en heurísticas puras o metaheurísticas. Las heurísticas operan normalmente construyendo una solución y agregando de a un componente (nodo o arco) y verificando óptimos locales; se detienen al encontrar la primera solución factible [28].

Las metaheurísticas son utilizadas en los trabajos más recientes para este problema en particular. Se han implementado mayoritariamente Algoritmos Genéticos [29] por autores como [30],[31],[32],[33],[34] y [11]. Sin embargo, en los últimos años, se han presentado otras metaheurísticas tanto de trayectoria como de población, como Búsqueda Tabú [35], Algoritmos Ávidos Aleatorios [36], Algoritmo de Recocido Simulado [15], Optimización de Colonia de Abeja [20], Algoritmo Hub and Spoke [21] y más recientemente Algoritmo Genético con Elitismo [22].

La metaheurística seleccionada (VNS) no ha sido empleada para resolver este el TNDP. Sin embargo ha sido utilizada exitosamente de manera individual o híbrida con otras metaheurísticas para resolver problemas de localización como los descritos en [37],[38] y [39]; el Problema de la mochila y sus variantes [40]; los problemas de carga de contenedores como Bin Packing [41] y Strip Packing [42]; la programación de horarios y organización de Operarios [43],[44],[45]; los problemas de programación de la producción [46],[47],[48],[49],[50],[51]; y ruteo de vehículos con sus diferentes extensiones descritos en [52],[53],[54],[55].

Respecto a las medidas de desempeño de las soluciones multiobjetivo, se utilizó para este problema el hipervolumen, que calcula el volumen en el espacio de las funciones objetivo, cubierto por las soluciones de un frente de Pareto aproximado P , para problemas de minimización en todos los objetivos. Se define en [34] como:

$$HV(p) = \bigcup_{i=1}^{|p|} v_i$$

donde v_i es el área que generan las soluciones de cada frente. Para su cálculo, es necesaria la definición de un punto de referencia W , que toma

los mayores valores de los objetivos en las soluciones del frente.

3 Formulación del problema

A continuación se detalla el modelo matemático propuesto de Programación No Lineal Entera Mixta.

Notación:

Conjuntos:

l : Nodos

L : Jornada {1: mañana, 2: tarde, 3: noche}

R : Recorridos posibles entre la red

Parámetros:

- t_{ijr} : Tiempo de ir del nodo i al j en el tipo de recorrido r . $\forall_{i,j} \in I, \forall_r \in R$.
- d_{ijl} : Demanda del nodo i al j en la jornada l . $\forall_{i,j} \in I, \forall_l \in L$.
- C : Capacidad en cada bus incluyendo pasajeros sentados y de pie.
- $D_{o\min}$: Demanda mínima a cubrir con viajes directos (%).
- v_{\min} : Frecuencia mínima.
- v_{\max} : Frecuencia máxima.
- b_{ir} : 1 si el recorrido tipo r pasa por el nodo i , 0 sino. $\forall_i \in I, \forall_r \in R$.
- tt : Tiempo de trasbordo.
- t_l : Duración de la jornada l , $\forall_l \in L$.
- W : Número muy grande.

Variables de decisión:

- X_{rl} : Cantidad pasadas (viajes) de tipo r que se hacen en la jornada $L(s)$. $\forall_r \in R, \forall_l \in L$.

- Pd_{ijsrl} : Cantidad de personas que van con viaje directo del nodo i al nodo j en el recorrido s del tipo de recorrido r que se hacen en la jornada l . $\forall i, j \in I, \forall r \in R, \forall l \in L, \forall s = 1, \dots, X_{rl}$.
- $Pt_{imjs_1r_1s_2r_2l}$: Cantidad de personas que hacen transbordo en el nodo m , es decir, cantidad de personas que van del nodo i al nodo m en el número de recorrido s_1 del tipo de recorrido r_1 y del nodo m al nodo j en el número de recorrido s_2 del tipo de recorrido r_2 que se hacen en la jornada l . $\forall ijm \in I, i \neq j \neq m, \forall r_1, r_2 \in R, r_1 \neq r_2, \forall s_1 = 1, \dots, X_{r_1k}, X_{r_2k}, \forall l \in L$.
- te_{ijrl} : Tiempo de espera promedio del nodo i al nodo j en el tipo recorrido r en la jornada l . $\forall i, j \in I, \forall r \in R, l \in L$.

Funciones objetivo:

$$\text{mín } Z1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{r \in R} \sum_{l \in L} \sum_{s=1}^{X_{rl}} Pd_{ijsrl} * (t_{ijr} + te_{ijrl}) \quad (1)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in I, i \neq j} \sum_{m \in I, m \neq i \neq j} \sum_{r_1 \in R} \sum_{r_2 \in R} \sum_{l \in L} \sum_{s=1}^{X_{r_1l}} \sum_{s=2}^{X_{r_2l}} Pt_{imjs_1r_1s_2r_2l} * (t_{imr_1} + t_{imr_2} + te_{imr_1l}te_{imr_2l} + 2 * tt)$$

$$\text{mín } Z2 = \frac{\sum_{r \in R} \sum_{l \in L} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} X_{rl} * t_{ijr}}{\sum_{l \in L} t_l} \quad (2)$$

Sujeto a:

$$\sum_{r \in R} \sum_{s=1}^{X_{rl}} * pd_{ijsrl} \quad (3)$$

$$+ \sum_{r_1 \in R} \sum_{r_2 \in R, r_1 \neq r_2} \sum_{s=1}^{X_{r_1l}} \sum_{s=2}^{X_{r_2l}} \sum_{m \in I, m \neq i} pt_{imjs_1s_2r_1r_2l} = d_{ijl} \quad \forall i, j \in I, i \neq j, \forall l \in L$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} \sum_{s=1}^{X_{rl}} *pd_{ijsrl} \geq D_{omin} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I, i \neq j} \sum_{l \in L} d_{ijl} \quad (4)$$

$$pd_{ijsrl} + \sum_{r_1 \in R} \sum_{s_1=1}^{X_{r_1 l}} pt_{mij s_1 s r_1 r l} + \sum_{r_2 \in R} \sum_{s_2=1}^{X_{r_2 l}} Pt_{ijm s s_2 r r_2 l} \leq C \quad (5)$$

$$\forall_{i,j,m} \in I, i \neq j \neq m, \forall_l \in L \quad \forall_r \in R, \forall_s = 1 \dots X_{rl}$$

$$\sum_{r \in R} X_{rl} \geq \frac{\sum_j \sum_i d_{ijl}}{C} \forall_l \in L \quad \forall_l \in L \quad (6)$$

$$v_{min} \leq X_{rl} \leq v_{max} \quad \forall_l \in L, \forall_r \in R \quad (7)$$

$$te_{ijrl} = \frac{t_l}{2 * X_{rl}} \quad \forall_{i,j} \in I, i \neq j, \forall_r \in R, \forall_l \in L \quad (8)$$

$$pd_{ijsrl} \leq b_{ir} b_{jr} W \quad \forall_{i,j} \in I, i \neq j, \forall_r \in R, \quad \forall_{s=1 \dots X_{rl}} \quad (9)$$

$$pt_{imj s_1 s_2 r_1 r_2 l} \leq b_{ir_1} b_{mr_1} b_{mr_2} b_{jr_2} M \quad \forall_{i,j,m} \in I, i \neq j \neq M; \quad (10)$$

$$\forall_{r_1, r_2} \in R, \quad \forall_l \in L, \quad \forall_{s_1} = 1, \dots, X_{r_1 l}, \quad \forall_{s_2} = 1, \dots, X_{r_2 l}$$

$$X_{rl} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \quad \forall_r \in R, \quad \forall_l \in L \quad (11)$$

$$te_{ijrl} \geq 0 \quad \forall_r \in R, \quad \forall_{i,j} \in I, \quad i \neq j, \quad l \in L \quad (12)$$

$$pd_{ijsrl} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \quad \forall_{i,j} \in I, \quad \forall_r \in R, \quad \forall_l \in L, \quad \forall_s = 1, \dots, X_{rl} \quad (13)$$

$$pt_{imjs_1s_2r_1r_2l} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \quad \forall_{i,j,m} \in I, \quad i \neq j \neq m, \quad \forall_{r_1r_2} \in R, \quad \forall_l \in L, \quad (14)$$

$$\forall_{s_1} = 1, \dots, X_{r_1l}, \quad \forall_{s_2} = 1, \dots, X_{r_2l}$$

Supuestos:

1. No se modela la congestión. El costo del arco ij es el mismo sin importar el flujo de personas.
2. Demanda inelástica (igual para todas las soluciones).
3. Demanda multiperiodo en el horizonte horario. Típicamente las primeras horas de la mañana implican un alto flujo de movimiento hacia zonas céntricas y comerciales, y ese patrón de movimientos se invierte en las últimas horas de la tarde. Requiere varias matrices de demanda, dependiendo del horario.
4. Sólo se permite un trasbordo.

Descripción de las ecuaciones:

La Ecuación (1) corresponde a la primera función objetivo, la cual mide la totalidad del tiempo que demoran todos los pasajeros atendidos tanto

por viajes directos como por trasbordo, teniendo en cuenta tiempo de viaje, tiempo en espera y tiempo de trasbordo.

La Ecuación (2) corresponde a la segunda función objetivo, que mide la totalidad de buses que se requieren para atender la totalidad de la demanda. Esta cantidad está dada por el tiempo total de todos los recorridos dividido en el tiempo de las tres jornadas.

El conjunto de restricciones (3) permite que se satisfaga toda la demanda, la primera parte de la ecuación relaciona los viajes directos. La segunda parte de la ecuación mide la cantidad de personas que van del nodo i al nodo j mediante un nodo de trasbordo m . Dado que solo se permite un trasbordo se contemplan los recorridos s_1 que va de i al nodo m y un recorrido s_2 que va de j al nodo m . La suma de ambas ecuaciones debe ser igual a la demanda total requerida.

La restricción (4) permite que se cumpla la cantidad mínima de demanda (en personas) cubierta por viajes directos. Permite altos porcentajes de cubrimiento con viajes directos en una jornada, y bajos en otra, mientras en total se respete el límite definido.

El conjunto de restricciones (5) asegura que no se supera la capacidad de los buses en cada recorrido s del tipo de recorrido r saliendo del nodo i .

El conjunto de restricciones (6) relaciona de las pasadas de cada tipo de recorrido r con la demanda, la cantidad de pasadas para un tipo de recorrido r está dada por la demanda de los nodos i y j que utilizan ese recorrido, y limitado por la capacidad de los buses.

El conjunto de restricciones (7) asegura que se cumplan los límites de las pasadas (frecuencias). Los parámetros de frecuencia mínima y máxima restringen los valores de las pasadas en cada recorrido y jornada. Se manejan los mismos valores para todo el día. Esto se restringe dado que valores de frecuencia muy bajos implican tiempos de espera altos y frecuencias muy altas mejora la percepción de los usuarios sin embargo requieren una gran cantidad de buses.

El conjunto de restricciones (8) calcula el tiempo de espera promedio para ir del nodo i al nodo j . El tiempo entre pasadas entre un bus y otro para un tipo de recorrido r en la jornada l será el tiempo que dura cada jornada dividido en el número de pasadas que se hacen en dicha jornada para un tipo de recorrido. Así, el tiempo promedio de espera de una persona

para ir del nodo i al nodo j es el tiempo entre pasadas dividido en dos.

El conjunto de restricciones (9) asegura que las variables de cantidad de pasajeros que van por viaje directo Pd_{ijsrl} puedan solo tomar valores cuando el tipo de recorrido r pasa por los nodos i y j .

El conjunto de restricciones (10) Asegura que las variables de cantidad de pasajeros que van por viaje indirecto $Pt_{(imjs_1s_2r_1r_2l)}$ puedan solo tomar valores cuando el tipo de recorrido r_1 pasa por los nodos i y m , y el recorrido tipo r_2 pasa por los nodos m y j .

El conjunto de restricciones (11) corresponde a la condición de no negatividad y valores enteros que deben tomar las variables de la cantidad de pasadas que debe hacer un tipo de recorrido r en una jornada l .

El conjunto de restricciones (12) asegura que los valores de tiempos de espera sean mayores que cero.

El conjunto de restricciones (13) corresponde a la condición de no negatividad y valores enteros que deben tomar las variables de la cantidad de personas que van por viajes directos

El conjunto de restricciones (14) corresponde a la condición de no negatividad y valores enteros que deben tomar las variables de la cantidad de personas que van por viajes indirectos.

4 Métodos de solución

La metaheurística VNS consta de tres fases [56]:

1. De construcción, en la cual se genera una solución inicial. Esta solución inicial será reemplazada posteriormente dada una determinada estructura de vecindario. Esto conducirá a una búsqueda desde una nueva solución inicial a otras soluciones de manera estocástica.
2. De evaluación, que evalúa la función objetivo mediante el modelo de asignación descrito a continuación.
3. De mejora, donde se realiza una búsqueda local sobre la solución inicial y se genera un movimiento, al comparar el valor de la función objetivo de la nueva solución con la mejor solución hasta el momento.

Si existe mejora se buscará una nueva solución desde un vecindario más pequeño. Si no mejora, se buscará una nueva solución desde un vecindario más grande.

Para detallar el método de solución se utilizará la misma notación de la formulación matemática. Sin embargo, existen términos adicionales que requiere la metaheurística, los cuales se describen a continuación:

tc_{ij} : Tiempo del camino más corto (según los tiempos de sus arcos en la red) entre los nodos i y j utilizando exclusivamente recorridos de la solución S .

φ_{ijr} : Conjunto de flujos para ir de i a j mediante el tipo de recorrido r , que representan la carga del recorrido en términos de la demanda. Los flujos se representan por la cantidad de personas que se carga a un bus en cada recorrido.

b : Filtro de recorridos candidatos en la selección de líneas competentes para un mismo par de nodos (i, j) . No se consideran recorridos cuyo largo exceda el recorrido más corto que une a i con j multiplicado por b .

g : Igual que b pero con trasbordos.

N_H : Número total de líneas.

4.1 Fase de construcción

La solución inicial se basa en el algoritmo propuesto en [20], el cual considera una línea de bus H , cuyas terminales son i y j . Se basa en encontrar el camino más corto entre los terminales definidos $(i$ y $j)$ y el algoritmo se describe a continuación:

Datos de entrada:

1. Matriz cuadrada de demandas entre los nodos del problema. *Unidades:* Pasajeros/Minutos.
2. Matriz cuadrada de tiempos entre los nodos del problema. *Unidades:* Minutos.
3. Cantidad de líneas deseadas, típicamente se utilizan 4, 6 y 8 líneas de buses para configurar las rutas.

4.1.1 Algoritmo de construcción de la solución inicial

Paso 1. Considerar la línea H , que contiene los nodos de la ruta más corta para ir de i a j . N_H es el conjunto de nodos en la línea. La pareja i, j es la combinación de todos los nodos de la red.

Paso 2. Empezar a conectar con servicio directo los pares de nodos que tienen los valores más grandes de d_{ijl} , ($\forall i, j \in N_H, l \in L$).

1. Introducir el número total de líneas de buses N_H en la red. Iniciar $cont = 1$.
2. Encontrar el par de nodos que tienen los valores más altos de d_{ijl} . Fijar estos nodos como a y b . Los nodos a y b son las terminales de la nueva línea de bus H .
3. Encontrar el camino más corto entre esos dos nodos utilizando la matriz de tiempos dada. Los nodos que pertenecen al camino más corto entre a y b representan las paradas en la línea de buses. Agregar la línea H en el conjunto de líneas.
4. Actualizar la matriz d_{ijl} , sin tener en cuenta las demandas de pasajeros que ya ha sido satisfecha.
5. Si $cont$ es igual a N_H parar, sino $cont = cont + 1$ y regresar a 2.

Datos de salida:

Configuración de las rutas: lista de rutas indicando nodos terminales (A y B).

Tabla 1: Ejemplo configuración de las rutas

Ruta 1	A 1	2	3	B 4
Ruta 2	A 5	6	B 7	
Ruta 3	A 1	8	B 4	

Cantidad de viajes de cada ruta: En función de las demandas de los arcos que lo componen y la capacidad de los buses para cada jornada. Se utiliza este criterio asumido como válido para horas de alta afluencia.

$$X_{rl} = \frac{\sum_i \sum_j d_{ijl}}{C} \quad \forall_l \in L, \forall_r \in R$$

4.2 Fase de evaluación

Para evaluar tanto la solución inicial construida en la fase de construcción como las soluciones que se generan en la Fase de Mejora se utiliza un Modelo de Asignación, basado en el modelo utilizado por [12], mediante el cual, cada solución S , se conoce para cada par de nodos (i, j) , de la red el conjunto de recorridos de R que pueden ser utilizados para transportar la demanda d_{ijl} .

El Modelo de Asignación considera la posibilidad de transbordos para pares origen-destino que no comparten recorridos y tiene como criterio principal la minimización de transbordos, lo cual significa que siempre que un pasajero tenga la posibilidad de hacer un viaje directo, lo hará incluso si implica más tiempo que un viaje con transbordo factible.

Para implementar la fase de evaluación se requiere como dato de entrada la Solución S : Conjunto de Rutas y Frecuencias y los parámetros definidos hasta el momento.

Como resultado del Modelo de Asignación se tendrán las dos funciones objetivo definidos en el modelo matemático ($Z1$ y $Z2$) y se calcularán cuatro medidas de desempeño adicionales:

Z_1 : Corresponde al mismo Z_1 explicado y detallado en la formulación matemática.

Z_2 : Corresponde al mismo Z_2 explicado y detallado en la formulación matemática.

d_{ol} : Es la proporción de viajes directos satisfechos por la solución S , de la jornada l .

d_{o1l} : Es la proporción del total de la demanda satisfecha con viajes directos o con al menos un transbordo por los recorridos de la solución S de la jornada l .

dn_{sl} : Demanda no satisfecha de la jornada l .

ATT : (Average Travel Time) Tiempo promedio de viaje en minutos (Incluyendo tiempos de transferencia), de la jornada l .

Algoritmo de asignación

Considerando los costos (tiempos de los arcos) y la capacidad de los buses, toma como entrada el conjunto de rutas y sus respectivos recorridos para determinar los flujos de personas en cada arco, los tiempos de viaje, en espera y de transbordo y finalmente las funciones objetivo descritas. A continuación se especifica el pseudocódigo, donde n es el tamaño de la red:

Algorithm 1 Algoritmo de Asignación

```

1:   For(i,j) in (1 to  $n$ )x(1 to  $n$ )  $d_{ol}$ 
2:      $R_i$ : Recorridos de  $R$  que pasan por el nodo  $i$ 
3:      $R_j$ : Recorridos de  $R$  que pasan por el nodo  $j$ 
4:     if  $R_i$  es vacío and  $R_j$  es vacío
5:       Else
6:         Actualizar  $dns_l$ 
7:         if Asignación Directa ( $i, j, R_i, R_j, X_{rl}$ )
8:           Actualizar  $d_{ol}$ 
9:           Actualizar  $t_{ijr}$  y  $te_{ijrl}$ 
10:          Actualizar los flujos en los recorridos de  $R$ 
11:         Else
12:          if Asignación transbordo ( $i, j, R_i, R_j, X_{rl}$ )
13:            Actualizar  $d_{o1l}$ 
14:            Actualizar  $t_{ijr}$  y  $te_{ijrl}$  y  $tt$ 
15:            Actualizar los flujos en los recorridos de  $R$ 
16:          Else
17:            Actualizar  $dns_l$ 
18:          End if
19:        End if
20:      End if
21:    End For
22:  Return ( $t_{ijr}, te_{ijrl}, tt, d_{ol}, d_{o1l}, dns_l, \bar{\varphi}$ )
23:  Calculate ( $Z_1, Z_2, ATT_l$ )

```

Considerando los costos (tiempos de los arcos) y la capacidad de los buses, toma como entrada el conjunto de rutas y sus respectivos recorridos para determinar los flujos de personas en cada arco, los tiempos de viaje, en espera y de transbordo y finalmente las funciones objetivo descritas. A

continuación se especifica el pseudocódigo, donde n es el tamaño de la red:

Algorithm 2 Inserción de nodos

```
1:   Seleccionar Aleatoriamente un nodo
2:   Verificar nodos adyacentes
3:   Actualizar cantidadNodosAdyacentes
4:   if cantidadNodosAdyacentes < 2
5:     Descartar este nodo (es extremo)
6:     Volver a 1
7:   Else
8:     Ordenar los nodos de menor a mayor de acuerdo al tiempo de
    viaje
9:     Revisar qué ruta contiene uno o varios nodos adyacentes
10:    Verificar si algún nodo adyacente está en los extremos
11:    if existeExtremo
12:      Insertar nodo seleccionado en la posición del extremo
13:    Else
14:      if existeEnElMedio
15:        Insertar nodo seleccionado en la posición del medio
16:      Else
17:        Volver a 1
18:    End if
19:    Actualizar la nueva configuración de la ruta
```

4.3 Fase de mejora

En esta fase se utiliza en mayor medida la metaheurística definida: VNS, la cual no sigue una trayectoria sino que explora vecindarios distantes de la solución actual y salta de esta solución a una nueva si y solo si una mejora ha sido realizada.

Por estas características favorables de la solución actual son guardadas y usadas para obtener vecindarios con soluciones promisorias. En esta fase se realiza una búsqueda local sobre la solución inicial, aplicada sobre los recorridos completos y se genera un movimiento, al comparar el valor de la función objetivo de la nueva solución con la mejor solución hasta el momento. Si no mejora, se buscará una nueva solución desde otro vecindario.

A continuación se presentan las descripciones y los macroalgoritmos de los vecindarios definidos:

Inserción de nodos:

Seleccionar un nodo de manera aleatorio (primero entre los nodos que no se encuentran en la solución, posteriormente de todos los nodos) que tenga más de dos conexiones y escoger la mejor posición factible. Previamente validar si se puede incluir como extremo de la ruta, de no ser posible validar si se puede incluir en el medio, es decir en cualquier posición que no sea extrema.

Cruce de rutas:

Seleccionar un nodo de manera aleatoria (primero entre los nodos que no se encuentran en la solución, posteriormente de todos los nodos) que se encuentre en mínimo dos rutas. El nodo seleccionado será el punto de quiebre de ambas rutas y los extremos opuestos se intercambian para formar tres nuevas rutas (o las que sean factibles de acuerdo al grafo inicial).

Algorithm 3 Inserción de nodos

- 1: Seleccionar un nodo de manera aleatoria
 - 2: Verificar en que rutas se encuentra el nodo
 - 3: Actualizar cantidadRutas
 - 4: **if** cantidadRutas < 2
 - 5: Volver a 1
 - 6: **Else**
 - 7: **if** cantidadRutas = 2
 - 8: Partir las rutas
 - 9: Unir las subrutas opuestas
 - 10: **Else**
 - 11: Elegir dos de las rutas que contienen el nodo elegido
 - 12: Partir las rutas
 - 13: Unir las subrutas opuestas
 - 14: Actualizar la nueva configuración de la ruta
-

Movimiento de arcos:

Un arco es removido de una ruta e insertado en un lugar mejor (factible) de la misma ruta o de otra ruta. Se selecciona el arco en orden de mayor a menor peso. El peso se calcula de acuerdo a la cantidad de cambios factibles (con conexiones existentes) dentro de las rutas actuales. Si el arco con mayor peso solo está presente en un arco, se descarta dado que no se puede realizar el movimiento.

Algorithm 4 Inserción de nodos

- 1: Calcular peso de cada arco (En función de los posibles cambios que puede efectuar con la configuración de rutas dadas).
 - 2: Elegir arco con mayor peso
 - 3: Elegir ruta con menos cantidad de nodos
 - 4: **if** rutaConMenosNodos > 2
 - 5: Elegir una de manera aleatoria
 - 6: **Else**
 - 7: Asignar a RutaAfectada
 - 8: **End if**
 - 9: Insertar el arco en la ruta seleccionada
 - 10: Eliminar el arco de la ruta origen
 - 11: Actualizar la nueva configuración de la ruta
-

Duplicación de arcos:

Se efectúa de manera similar al vecindario de Movimiento de Arcos. Sin embargo, el arco no es eliminado de su ruta original. Se mantiene la priorización de arcos de acuerdo a los pesos dados por los cambios factibles, de igual manera se descartan los arcos que no pueden ser duplicados por encontrarse solo en una ruta.

Algorithm 5 Inserción de nodos

- 1: Calcular peso de cada arco (En función de los posibles cambios que puede efectuar con la configuración de rutas dadas).
 - 2: Elegir arco con mayor peso
 - 3: Elegir ruta con menos cantidad de nodos
 - 4: **if** rutaConMenosNodos >2
 - 5: Elegir una de manera aleatoria
 - 6: **Else**
 - 7: Asignar a RutaAfectada
 - 8: **End if**
 - 9: Insertar el arco en la ruta seleccionada
 - 10: Actualizar la nueva configuración de la ruta
-

Equilibrio de rutas:

En este vecindario se itera para lograr que todas las rutas tengan la misma cantidad de arcos, tomando como referencia la ruta más larga de la configuración dada. Esto con el fin de balancear las cargas de los flujos entre rutas, dado que las configuraciones iniciales de la fase de construcción tienden a cargar en mayor medida las primeras rutas elaboradas. Cuando se logran rutas más largas se favorecen ambas funciones objetivo, minimizando los tiempos de transbordo y frecuencias requeridas.

1. Verificar cual es la ruta más larga de la configuración actual de rutas
2. Identificar las rutas que tiene una cantidad menor de nodos
3. Para cada ruta hacer:
4. Calcular el GAP entre el máximo y la cantidad de nodos de la ruta
5. Agregar la mayor cantidad de nodos posibles hasta alcanzar el máximo o aproximarse lo que más se sea posible
6. Actualizar la nueva configuración de la ruta

5 Resultados obtenidos

El modelo fue probado en primera medida para el caso con demanda estática, utilizando como datos de entrada el problema de la Red de Mandl. Lo anterior con el fin de referenciar los resultados con otros autores que previamente la han utilizado. Posteriormente se solucionó el problema con demanda multiperiodo, para lo cual se desarrollaron 12 instancias, de 3 tamaños diferentes (15, 30 y 45 nodos). Las demandas cambian de acuerdo al momento del día en que se encuentra (Mañana, tarde o noche) mediante la variación de las matrices por instancia.

5.1 Red de Mandl - caso práctico

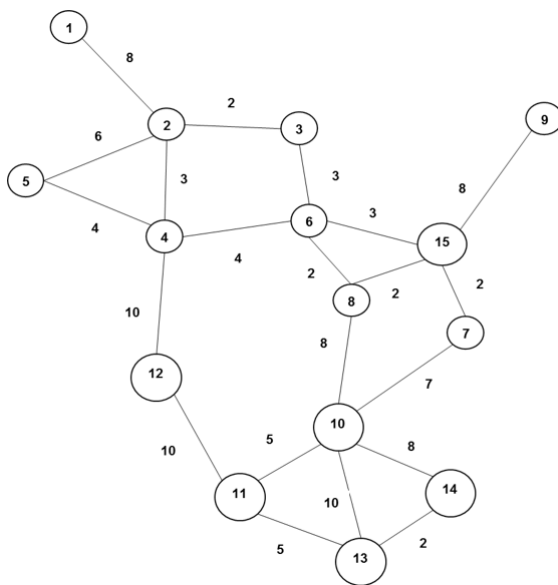


Figura 1: Red de Mandl.

Existen pocos casos de estudio para probar el TNDP en la literatura existente, cuya descripción sea completa y con los datos detallados. Tampoco es sencillo encontrar resultados numéricos existentes para realizar comparaciones, dado que las implementaciones se realizan sobre casos particulares

con hipótesis no especificadas. Para este trabajo se seleccionó la Red más utilizada entre investigadores previos del TNDP, la cual fue creada por Mandl [57], como un caso de estudio de una ciudad no especificada de Suiza. Consiste en 15 nodos y 21 arcos, y un matriz origen destino simétrica. En la Figura 1 se muestra la red de Mandl gráficamente

5.2 Resultados con demanda constante

El modelo es probado inicialmente con demanda constante con el fin de compararlo con autores que anteriormente han solucionado el TNDP. Se presentan todos los resultados para 4 rutas.

5.2.1 Solución inicial En la Tabla 2 se detalla la solución inicial para 4 rutas

Tabla 2: Solución inicial

Ruta	Solución inicial para 4 rutas						
1	1	2	3	6	8	10	11
2	5	4	6	8	10	13	
3	9	15	7	10	14		
4	1	2	3	6	15	7	

5.3 Solución final

A continuación, se describen las soluciones encontradas mediante ciertas combinaciones de vecindarios, llamadas configuraciones. El algoritmo VNS propuesto fue implementado en RStudio en un procesador Intel®Core™ i5 CPU M460 2.53 GHz.

Las configuraciones realizadas fueron:

1. Equilibrio de Rutas - Inserción de Nodos - Cruce de Rutas.
2. Inserción de Nodos - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas.
3. Inserción de Nodos - Duplicación de arcos - Movimiento de arcos.

4. Cruce de Rutas - Inserción de Nodos - Duplicación de arcos - Movimiento de arcos.
5. Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de Rutas - Movimiento de arcos.
6. Duplicación de Rutas - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas.
7. Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de Rutas - Movimiento de arcos - Duplicación de Arcos.

A continuación se presentan los resultados de la configuración 2 (Inserción de Nodos - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas) y configuración 5 (Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de Rutas - Movimiento de arcos), por las buenas medidas de desempeño que presentaron. En las Figuras 1 y 2 se presentan las Fronteras de Pareto respectivas y en las Tablas 4 y 5 se presentan las rutas con mejor desempeño de acuerdo a su ATT_l para cada configuración. Las medidas de desempeño de las demás configuraciones se presentan en la Tabla 6.

Configuración 2: Inserción de nodos - Movimiento de arcos - Cruce de rutas:

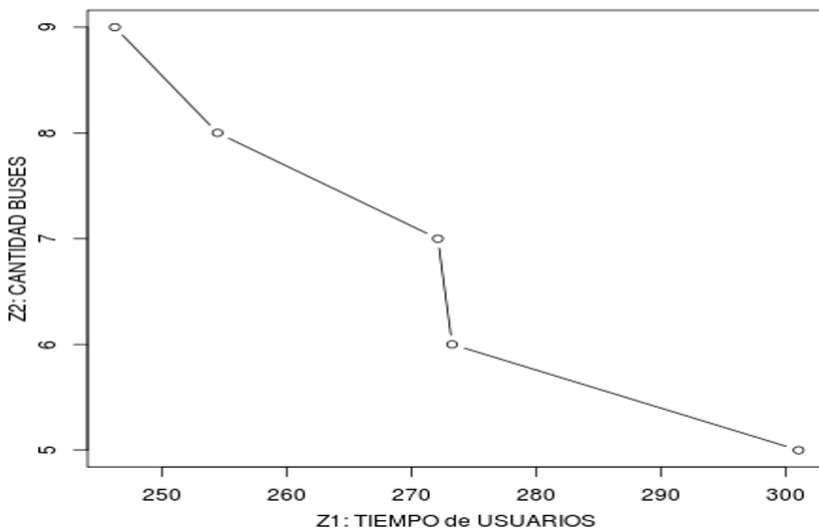


Figura 2: Red de Mandl.

Tabla 3: Mejor ruta 2.

Ruta	Ruta con mejor <i>ATT</i>									
1	1	2	3	6	4	5				
2	14	13	10	7	15	8	6	4	12	
3	1	2	3	6	8	10	11	12	4	5
4	9	15	7	10	14	13	11	12		

Configuración 5: Inserción de nodos - Cruce de rutas - Equilibrio de rutas - Movimiento de arcos:

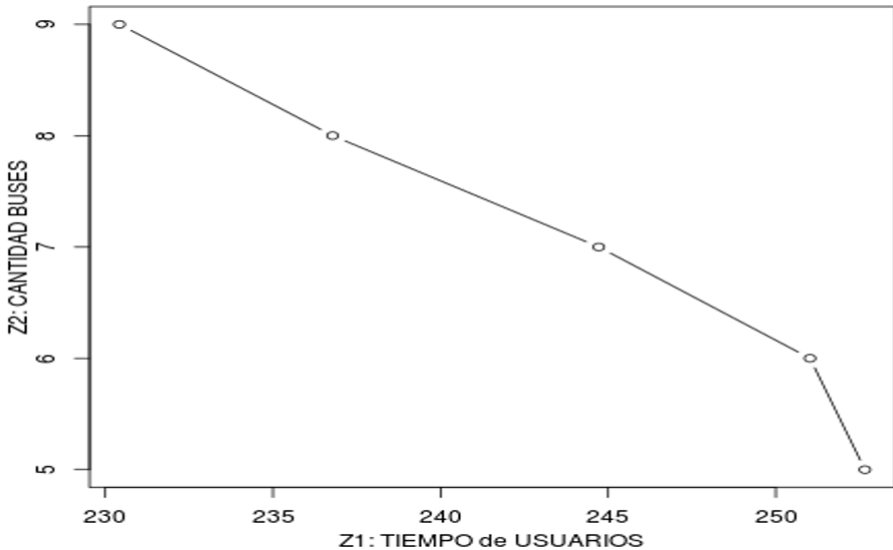


Figura 3: Frontera de Pareto 5.

Tabla 4: Mejor Ruta 5.

Ruta	Ruta con mejor <i>ATT</i>									
1	9	15	7	10						
2	1	2	3	6	15	7	10	14	13	11
3	1	2	3	6	8	10	11	12	4	
4	11	13	10	8	6	4	5	2	3	

Medidas de desempeño obtenidas En la Tabla 5 se resumen las medidas de desempeño de la mejor solución de las configuraciones planteados (de acuerdo a su *ATT*)

Tabla 5: Medidas de desempeño obtenidas

Medidas de desempeño	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
(%)	94 %	94 %	96 %	86 %	94 %	93 %	88 %
(%)	6 %	6 %	4 %	14 %	6 %	7 %	12 %
(%)	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
ATT (min/psjro)	9.212	8.963	11.451	8.89	8.465	9.34	9.446
HV	0.47	0.56	0.91	0.74	0.47	0.45	0.7

Medidas de desempeño autores

En la Tabla 6 se resumen las medidas de desempeño obtenidas por otros autores que han estudiado el problema previamente.

Tabla 6: Medidas de desempeño autores

Medidas de desempeño	Mandl (1979)	Baaj y Mahamassani (1991)	Charkroborty and dwivedi (2002)	Fan and Machemehl (2008)	Nikolic and teodorovic (2013)
(%)	70 %	79 %	87 %	93 %	92 %
(%)	30 %	21 %	12 %	7 %	72 %
(%)	0 %	0 %	11 %	0 %	0 %
ATT (min/psjro)	12.9	11.86	11.9	11.37	10.51

5.3.1 Análisis de resultados En términos generales los resultados obtenidos con la metaheurística de VNS fueron positivos, comparados con los autores citados. Su comportamiento se resume en las siguientes afirmaciones:

- En todas las configuraciones se mantiene la demanda no satisfecha en 0 %, lo cual mantiene el nivel de servicio de los trabajos realizados en los últimos años.
- Respecto a la demanda atendida con viajes directos la configuración 4 presenta un comportamiento inferior a las demás configuraciones (86 %), muy cercano al promedio de los autores citados (84 %). Las demás configuraciones tienen un comportamiento similar superior al 93 % de cobertura directa.

- El tiempo promedio de viaje (ATT) es muy sobresaliente en las configuraciones 2, 4 y 5. Sin embargo las configuraciones 2 y 5 tienen buenos tiempos promedio manteniendo porcentajes de demanda atendida directamente de 94 %, superior a la configuración 4 que obtiene 86 %. En general, todas las configuraciones obtienen mejores tiempos que el mejor encontrado hasta ahora, excepto la configuración 3, cuyo valor es muy similar.
- La configuración 3 presenta el hipervolumen más alto, lo que permite concluir que tiene soluciones cercanas al valor de referencia. Por el contrario, las configuraciones 1 y 6 presentan un hipervolumen por debajo de 0.5. Respecto a otras medidas de desempeño como el ATT , las configuraciones 2 y 5 tienen los valores más bajos, lo que presenta una relación positiva entre ambas funciones objetivo.

5.4 Resultados con demanda variable

Para ejecutar el modelo con Demanda Variable, se modifican las demandas de manera que se ejecuta a la vez con demanda de mañana, tarde y noche. Las demandas de la tarde son las del problema original y se hacen modificaciones para la mañana y noche, tratando de simular el movimiento de las personas hacia ciertos sectores “laborales” y en la noche de regreso a los puntos “residenciales”.

La configuración del grafo y los costos asociados a sus arcos se mantiene respecto del problema original.

5.4.1 Soluciones iniciales En las Tablas 7, 8 y 9 se detallan las configuraciones de las soluciones iniciales para mañana, tarde y noche respectivamente:

Tabla 7: Rutas iniciales mañana.

Ruta	Solución inicial para mañana						
1	1	2	3	6	8	10	11
2	5	4	6	8	10	13	
3	9	15	7	10	14		
4	1	2	3	6	15	7	

Tabla 8: Rutas iniciales tarde.

Ruta	Solución inicial para tarde							
1	1	2	3	6	8	10	11	12
2	13	10	8	6	4	5		
3	9	15	7	10	14			
4	1	2	3	6	15	7		

Tabla 9: Rutas iniciales noche.

Ruta	Solución inicial para noche							
1	12	11	10	8	6	3	2	1
2	13	10	8	6	4	5		
3	14	10	7	15	9			
4	7	15	6	3	2	1		

5.4.2 Soluciones finales Para hacer comparable el desempeño del modelo cuando se tiene demanda variable, se mantienen las configuraciones definidas anteriormente. Se muestra a continuación el desempeño del modelo al ingresar las 3 demandas de manera simultánea y la configuración de las rutas para atender de manera multiperiodo la demanda a lo largo del día.

De manera similar a demanda constante, se presentan en detalle los resultados de las configuraciones 2 y 5. En las Figuras 3 y 4 se encuentran las Fronteras de Pareto de cada configuración y en las Tablas 10 y 11 se detallan las rutas con mejor desempeño de acuerdo a su ATT para cada configuración.

Para las demás configuraciones se presenta la Tabla 12 con las medidas de desempeño comparadas con demanda constante y multiperiodo.

Configuración 2: Inserción de Nodos - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas

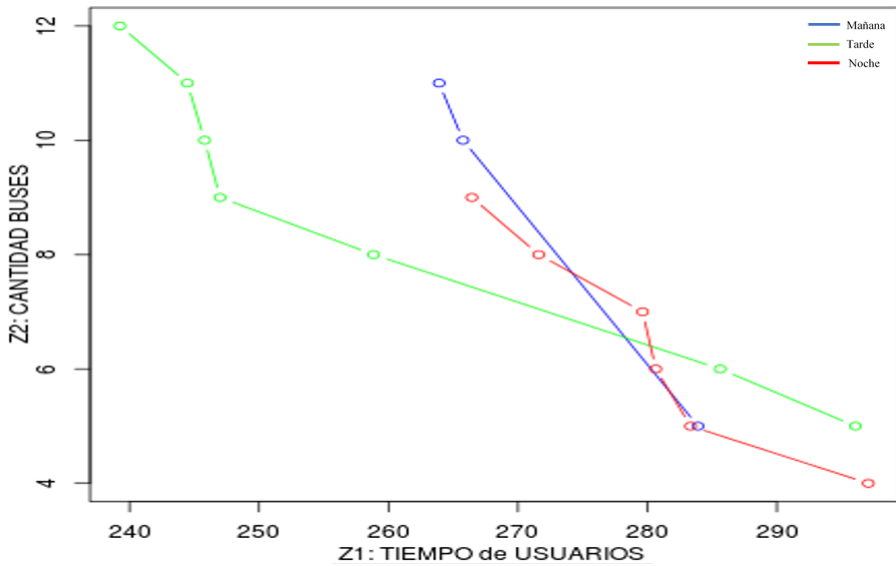


Figura 4: Frontera de Pareto Triple 2.

Tabla 10: Mejores rutas para la jornada 2

Ruta	Ruta con mejor ATT Mañana									
1	5	4	6	8	10	14	13			
2	9	15	7	10	13					
3	1	2	3	6	8	15	7	10	11	12
4	1	2	3	6	15					
Ruta	Ruta con mejor ATT Tarde									
1	1	2	3	6	4	5				
2	11	13	10	7	15	8	6	4	5	
3	1	2	3	6	8	10	11	12		
4	9	15	7	10	14					
Ruta	Ruta con mejor ATT Noche									
1	13	10	7	15	9					
2	14	10	8	6	4	5	2			
3	12	11	10	7	15	8	6	3	2	1
4	4	6	3	2	1					

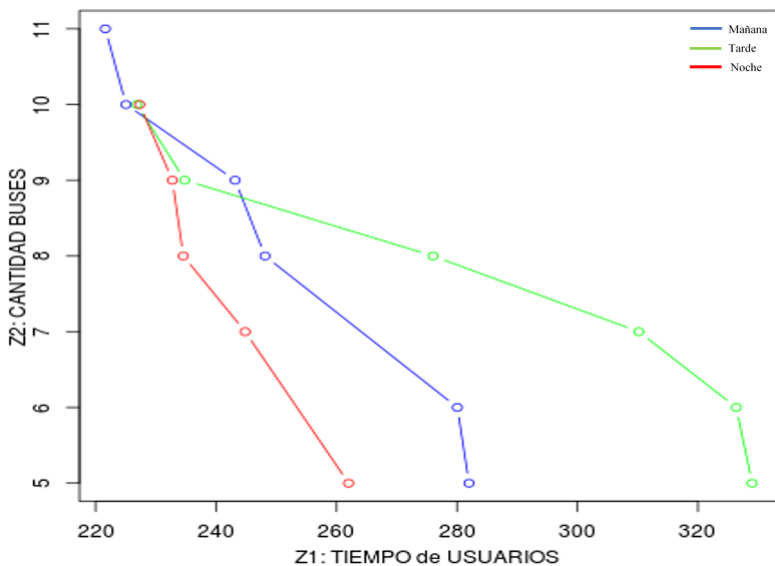


Figura 5: Frontera de Pareto Triple 5

Tabla 11: Mejores rutas para la jornada 5.

Ruta	Ruta con mejor ATT mañana										
1	9	15	7	10							
2	1	2	3	6	15	7	10	14	13	11	12
3	1	2	3	6	8	10	11				
4	5	4	6	8	10	13					
Ruta	Ruta con mejor ATT tarde										
1	9	15	7	10	14	13	11	12	4	2	
2	1	2	3	6	15	7	10	11	13	14	
3	1	2	3	6	8	10	11	12	4	5	
4	14	13	10	8	6	4	5	2	3		
Ruta	Ruta con mejor ATT noche										
1	10	7	15	9							
2	13	14	10	7	15	6	3	2	1		
3	12	11	10	8	6	4	5	2			
4	14	13	10	8	6	3	2	1			

5.4.3 Análisis de soluciones En la Tabla 12 se presentan las medidas de desempeño del modelo de acuerdo a las configuraciones propuestos tanto en demanda estática como multiperiodo. Se analiza de la siguiente manera:

La configuración número 1. Equilibrio de Rutas - Inserción de Nodos - Cruce de Rutas presenta la mayor variación en la cantidad de buses entre las 3 jornadas propuestas, respecto a los resultados con la demanda estática, de acuerdo a los resultados de la primera función objetivo. Como opción es posible mantener en 7 la cantidad de buses, lo que aumentaría el tiempo promedio por pasajero en 4 % ya que algunos pasajeros tendrían que esperar más por el siguiente servicio (disminución de la frecuencia).

En las configuraciones como la 2, 5 y 6 se requieren menos buses (Z2) cuando la demanda se toma variable que cuando se mantiene estática en toda la jornada. Lo anterior aumentando en 8 % el tiempo que esperan los pasajeros en total y 1 % el tiempo promedio por pasajero.

La configuración 3. Inserción de Nodos - Duplicación de arcos - Movimiento de arcos, presenta los mayores valores para los costos de los operadores, tanto en demanda estática como variable, alcanzando en este último el valor de 12 buses para la mañana. De manera similar, en esta misma comparación, los tiempos para los usuarios promedio (*ATT*) también son los más altos, alcanzado 13.49 minutos/pasajero para la tarde.

En las configuraciones 4 y 7, se encuentra una mejora en los tiempos que utilizan los pasajeros para ir de un nodo a otro cuando se cambia de demanda estática a demanda variable, especialmente en la 7. Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de rutas - Movimiento de Arcos - Duplicación de Arcos. Esta mejora en los tiempos no impacta la cantidad de buses que requieren en cada jornada, ya que se mantienen en 4 y 5 buses respectivamente.

Las soluciones encontradas por la configuración 1 representan los mejores valores de la función objetivo 1, es decir, los mejores tiempos de los usuarios medidos en minutos. Sin embargo, existen otras combinaciones con mejores valores en la función objetivo 2.

Tiempos de ejecución: Se realizó un análisis de los tiempos de ejecución para cada configuración con 100 iteraciones tanto en demanda variable como en demanda constante. En promedio se tiene un tiempo para demanda constante de 51 segundos, tiempo máximo de 62 segundos. La desviación

obtenida de 4.6 segundos se considera razonable. Para demanda variable, se obtuvieron tiempos de 2 minutos 45 segundos en promedio, tiempo máximo de 2 minutos 59 segundos y desviación de 10 segundos. Se consideran estos resultados razonables y similares a los presentados en trabajos anteriores que oscilan entre 47 y 101 segundos para demanda constante con métodos y herramientas de diferentes características a las presentadas en este trabajo.

Comparación de soluciones multiobjetivo: Se utiliza la medida de desempeño del Hipervolumen para comparar las soluciones entre ellas. Se encuentra que aunque el valor máximo se encuentra en la demanda estática (0,91) en general los valores de los hipervolumenes en cada periodo son mayores, con promedios de 0.66, 0.78 y 0.67 para mañana, tarde y noche respectivamente, comparado con 0.61 para demanda estática.

5.5 Generación de instancias

Para probar la pertinencia del modelo implementado en este problema se generaron 12 instancias para demanda multiperiodo de la siguiente manera: 3 variaciones al problema original de 15 nodos. La generación de una instancia de 30 nodos y 40 arcos y 3 variaciones a la misma y una nueva instancia de 45 nodos y 59 arcos y de nuevo 3 variaciones. Lo anterior se realizó principalmente para medir los tiempos de ejecución y pertinencia de las Fronteras de Pareto en casos de duplicación y triplicación de los nodos del problema original.

En la Tabla 13. se resumen los resultados de las 12 instancias, probadas para las configuraciones 2 y 5: Inserción de Nodos - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas y el de Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de Rutas - Movimiento de Arcos.

Los resultados fueron:

Se genera un total de 12 instancias y se comparan entre sí con el fin principal de verificar tiempos de ejecución y pertinencia de las Fronteras de Pareto. Se encuentra que los tiempos de ejecución no aumentan de manera exponencial cuando se duplican y triplican la cantidad de nodos en el grafo. Para una misma cantidad de nodos los tiempos son estables, en sus valores máximo promedio y desviación.

Cuando aumenta la cantidad de nodos, duplicándolos se tiene un au-

mento máximo de 42 segundos, que representa el 24 % del tiempo original. Cuando aumenta la cantidad de nodos, triplicándose se tiene un aumento máximo de 118 segundos, que representa el 67 % del tiempo del problema original.

Se encuentran valores del hipervolumen muy similares en cada tamaño de grafo, con promedios de 0.63, 0.68 y 0.68 respectivamente para 15, 30 y 45 nodos. El valor más alto se encuentra en la frontera de la mañana de la configuración 2 con un valor 0.91 con 30 nodos, muy cercado al idea. El valor más bajo es de 0.41 para la configuración 5 con 0.41 para 15 nodos.

Se consideran rangos aceptables para tiempos de ejecución al comprobar que el modelo permite aumentar la cantidad de nodos y arcos sin afectar exponencialmente los tiempos, sino con aumentos razonables. Los hipervolumenes son variados, la desviación más alta es de 0.11 para instancias de 15 nodos; sin embargo, se encuentra que el modelo está en capacidad de generar fronteras muy promisoras, con valores mayores a 0.7 en el hipervolumen. Cuando los hipervolumenes son altos, significa que el área de soluciones generadas mayor, por lo que los escenarios donde los hipervolumenes son mayores han sido resaltadas a lo largo del trabajo.

Tabla 12: Medidas de desempeño del modelo con demanda variable

Configuración	Resultados demanda estática		Resultados demanda multiperiodos					
	Jornada		Mañana		Tarde		Noche	
1. Equilibrio de Rutas- Inserción de Nodos- Cruce de Rutas	ATT	9.212	ATT	7.71	ATT	9.59	ATT	9.05
	Z1	254.1	Z1	227.94	Z1	241.55	Z1	265.62
	Z2	7	Z2	7	Z2	8	Z2	5
2. Inserción de Nodos - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas	ATT	9,061	ATT	9.08	ATT	9.12	ATT	9.15
	Z1	273.26	Z1	289.64	Z1	296.06	Z1	297.07
	Z2	6	Z2	5	Z2	5	Z2	5
3. Inserción de Nodos - Duplicación de arcos - Movimiento de arcos	ATT	11,451	ATT	12.8	ATT	13.49	ATT	12.99
	Z1	270.01	Z1	249.32	Z1	312.06	Z1	304.98
	Z2	10	Z2	12	Z2	8	Z2	8
4. Cruce de Rutas - Inserción de Nodos - Duplicación de Arcos - Movimiento de Arcos	ATT	8.89	ATT	8.4	ATT	9.01	ATT	8.02
	Z1	316.6	Z1	311	Z1	317.43	Z1	264.98
	Z2	4	Z2	4	Z2	4	Z2	4
5. Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de Rutas - Movimiento de Arcos	ATT	8.46	ATT	8.84	ATT	9.74	ATT	8.91
	Z1	252.66	Z1	261.07	Z1	315.25	Z1	262.01
	Z2	6	Z2	5	Z2	5	Z2	5
6. Inserción de Nodos - Duplicación de Rutas - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas	ATT	9.34	ATT	8.95	ATT	9.05	ATT	9.03
	Z1	273.25	Z1	310.34	Z1	305.59	Z1	306.14
	Z2	6	Z2	5	Z2	5	Z2	5
7. Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de rutas - Movimiento de Arcos - Duplicación de Arcos	ATT	9.44	ATT	8.59	ATT	9.39	ATT	9.16
	Z1	323.56	Z1	280.57	Z1	307.96	Z1	280.78
	Z2	5	Z2	5	Z2	5	Z2	5

Tabla 13: Resultados de instancias generadas

CONF.		Inserción de Nodos - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas				CONF.	Inserción de Nodos - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas				CONF.	Inserción de Nodos - Movimiento de arcos - Cruce de Rutas					
TAMAÑO	INSTANCIA	MEDIDA	MAÑANA	TARDE	NOCHE	TAMAÑO	INSTANCIA	MEDIDA	MAÑANA	TARDE	NOCHE	TAMAÑO	INSTANCIA	MEDIDA	MAÑANA	TARDE	NOCHE
15	1	HV	0.4	0.8	0.6	30	1	HV	0.9	0.5	0.62	45	1	HV	0.6	0.7	0.72
	2	HV	0.7	0.8	0.6		2	HV	0.9	0.9	0.83		2	HV	0.9	0.8	0.76
	3	HV	0.5	0.8	0.85		3	HV	0.4	0.7	0.49		3	HV	0.6	0.8	0.65
	4	HV	0.5	0.4	0.45		4	HV	0.6	0.7	0.66		4	HV	0.7	0.7	0.86
TIEMPOS		Tiempo máximo	2 min 57 seg				Tiempo máximo	3 min 39 seg					Tiempo máximo	4 min 42 seg			
		Tiempo promedio	2 min 45				Tiempo promedio	3 min 5 seg					Tiempo promedio	4 min 21 seg			
		Desviación	9 seg				Desviación	9 seg					Desviación	10 seg			
CONF.		Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de Rutas - Movimiento de Arcos				CONF.	Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de Rutas - Movimiento de Arcos				CONF.	Inserción de Nodos - Cruce de Rutas - Equilibrio de Rutas - Movimiento de Arcos					
TAMAÑO	INSTANCIA	MEDIDA	MAÑANA	TARDE	NOCHE	TAMAÑO	INSTANCIA	MEDIDA	MAÑANA	TARDE	NOCHE	TAMAÑO	INSTANCIA	MEDIDA	MAÑANA	TARDE	NOCHE
15	1	HV	0.6	0.7	0.54	30	1	HV	0.8	0.7	0.76	45	1	HV	0.5	0.8	0.83
	2	HV	0.8	0.8	0.69		2	HV	0.7	0.7	0.56		2	HV	0.6	0.6	0.55
	3	HV	0.8	0.8	0.65		3	HV	0.7	0.8	0.77		3	HV	0.4	0.5	0.76
	4	HV	0.5	0.5	0.53		4	HV	0.6	0.8	0.43		4	HV	0.7	0.5	0.85
TIEMPOS		Tiempo máximo	2 min 49 seg				Tiempo máximo	3 min 25 seg					Tiempo máximo	4 min 55 seg			
		Tiempo promedio	2 min 32 seg				Tiempo promedio	4 min 3 seg					Tiempo promedio	4 min 32 seg			
		Desviación	12 seg				Desviación	12 seg					Desviación	12 seg			

6 Conclusiones

En el presente trabajo se propone solucionar el TNDP mediante la metaheurística VNS, y se prueba el modelo con el caso de Mandl [57], obteniendo resultados positivos respecto a las investigaciones anteriores (para el caso de demanda estática en una jornada). Posteriormente, se modifica el problema para cambiar la demanda a lo largo del día y acercar un poco el modelo a cómo funciona la realidad. El modelo arroja resultados muy positivos cuando se incluyen matrices diferentes de demanda, las cuales se comparan entre sí y con los resultados con demanda única. Lo anterior se consigue defendiendo siete configuraciones de los posibles vecindarios descritos. Se obtienen entonces varias configuraciones de rutas y flotas, que componen el abanico de opciones que tiene el tomador de decisiones a la hora de implementar su sistema de transporte público, dado un grafo y sus demandas. Para cada caso se resalta la ruta considerada mejor o más sobresaliente para los autores, con los datos asociados a la misma. Pese a lo anterior, las demás soluciones también se encuentran disponibles y representadas conjuntamente en la Frontera de Pareto de cada combinación, con el fin de representar las tendencias en cada una de las funciones objetivo. Se deben tener en cuenta factores adicionales a los estudiados en este modelo para determinar la conveniencia de elegir una u otra opción, como subsidios, incorporación de tecnologías que disminuyan costos, entre otros. Este modelo resulta ser conveniente de acuerdo a los resultados obtenidos, teniendo en cuenta en su modelo de asignación variables importantes como la frecuencia de los buses, la ocupación de los mismos (Flujos de pasajeros), y la posibilidad de realizar solo un trasbordo, para mejorar la satisfacción de los usuarios. Estas variables favorecen la variedad de soluciones en las Fronteras de Pareto, cuya conveniencia varía de acuerdo a las percepciones que el tomador de decisiones tiene respecto a las prioridades en el sistema de transporte público.

Es importante resaltar que la escogencia de los vecindarios y con ellos, de las configuraciones es determinante en los resultados obtenidos. En este trabajo se encontraron configuraciones, como el número 1 (Equilibrio de Rutas - Inserción de Nodos - Cruce de Rutas) que generan tiempos muy favorables para los usuarios sin aumentar de manera significativa los costos de los operadores, que es el fin último definido. De igual manera, confi-

guraciones como el número 3 (Inserción de Nodos - Duplicación de arcos - Movimiento de arcos) presentó tiempos largos para los usuarios sin que esto favorezca los costos, dado que presenta rutas muy largas pero la misma cantidad de buses.

Respecto a los resultados de tiempos de ejecución, se probó el modelo con mayores instancias y se obtuvieron resultados favorables, al comprobar que los aumentos son razonables a medida que aumenta la cantidad de nodos.

Los resultados de las soluciones multiobjetivo resultantes se evaluaron mediante la medida de desempeño del Hipervolumen, en la que se encontró que el modelo está en capacidad de generar fronteras de Pareto con valores muy altos, (cercanos a 1) lo que permite asumir que son buenas tanto en convergencia como en diversidad. Las fronteras de Pareto con menores valores estaban por debajo de 0.5 pero sin superar la barrera de 0.4. Así mismo, queda para más adelante la implementación del modelo en una ciudad como Bogotá, ya que la consecución y análisis de sus datos en sí mismo representan un trabajo complejo, para su posterior inclusión en el modelo. Este nuevo proyecto podría realizarse por fases, dado que las demandas en una ciudad como Bogotá se presentan generalmente en bucles.

En segundo lugar, se propone incorporar un aspecto de congestión en el Modelo de Asignación, que permita acercarlo más a la realidad, ya que es posible que los usuarios no utilicen un servicio que llega por su congestión, y decidan esperar uno en el que vayan más cómodos, lo que genera una cola que no es considerada en el modelo actual. Este aspecto implicaría un análisis probabilístico de las decisiones que toman los usuarios y requerirían un estudio en campo para determinar dichas probabilidades.

Por último, se propone utilizar los resultados que arroja el modelo y continuar con el análisis mediante el uso de técnicas de toma de decisiones multicriterio, que permitan incluir factores externos, inclusive cualitativos que no están contemplados por este modelo, para contribuir a la elección de la mejor opción en todos los casos, de acuerdo a las prioridades que el tomador de decisiones considere previamente.

Referencias

- [1] O. Figueroa, “Políticas de desarrollo y políticas de transporte urbano. coherencias y contradicciones. in: Carrión, f. (ed.). la ciudad construida. urbanismo en américa latina.” Quito. FLACSO – Junta de Andalucía, Tech. Rep., 2001. [Online]. Available: <http://www.flacso.org.ec/docs/sfccfigueroa.pdf> 31
- [2] I. Norambuena, “Diseño Óptimo de sistemas de transporte público urbano,” Master’s thesis, Pontificia universidad catolica de chile, 2002. [Online]. Available: http://www.academia.edu/9176445/DISE%C3%91O_%C3%93PTIMO_DE_SISTEMAS_DE_TRANSPORTE_P%C3%9ABLICO_URBANO 31
- [3] O. Figueroa, “Transporte urbano y globalización. políticas y efectos en américa latina,” *Revista EURE - Revista De Estudios Urbano Regionales*, vol. 34, no. 94, pp. 41–53, 2005. [Online]. Available: <http://www.eure.cl/index.php/eure/article/view/1337> 31
- [4] A. Gutiérrez, “Transporte público y exclusión social. reflexiones para discusión en latinoamérica tras la década del 90,” in *XIII Congreso Latinoamericano de Transporte público y urbano.*, 2005. [Online]. Available: <http://www.filo.uba.ar/contenidos/investigacion/institutos/geo/ptt/GutierrezClatpu05.pdf> 31
- [5] C. A. Coello, C. Dhaenens, and L. Jourdan, “Multi-objective combinatorial optimization: Problematic and context,” in *Advances in multi-objective nature inspired computing*. Springer, 2010, pp. 1–21. 31
- [6] C. Blum and A. Roli, “Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison,” *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 35, no. 3, pp. 268–308, 2003. 31
- [7] C. A. Martínez, “Metaheurísticas híbridas aplicadas al problema de ruteo de arcos capacitados,” Ph.D. dissertation, Universidad de Buenos Aires, 2011. [Online]. Available: http://digital.bl.fcen.uba.ar/gsd1-282/cgi-bin/library.cgi?a=d&c=tesis&d=Tesis_4979_Martinez 31
- [8] P. Hansen, N. Mladenović, and J. A. M. Pérez, “Variable neighbourhood search: methods and applications,” *Annals of Operations Research*, vol. 175, no. 1, pp. 367–407, 2010. 31
- [9] K. K. M. Karlaftis, “Transit route network design problem: Review,” *Journal of Transportation Engineering*, vol. 135, no. 8, pp. 491–505, 2009. 32

- [10] W. Fan and R. B. Machemehl, *A Tabu Search Based Heuristic Method for the Transit Route Network Design Problem*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 387–408. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-73312-6_20 32
- [11] E. Cipriani, S. Gori, and M. Petrelli, “Transit network design: A procedure and an application to a large urban area,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 20, no. 1, pp. 3 – 14, 2012, special issue on Optimization in Public Transport+ISTT2011Special issue on Optimization in Public Transport+International Symposium on Transportation and Traffic Theory (ISTTT), Berkeley, California, July 18-20, 2011. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X10001397> 32, 33
- [12] M. H. Baaj and H. S. Mahmassani, “An ai-based approach for transit route system planning and design,” *Journal of Advanced Transportation*, vol. 25, no. 2, pp. 187–209, 1991. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1002/atr.5670250205> 32, 42
- [13] A. Mauttone, H. Cancela, and M. Urquhart, “Diseño y optimización de rutas y frecuencias en el transporte colectivo urbano, modelos y algoritmos,” 2002. 32
- [14] V. Tom and S. Mohan, “Transit route network design using frequency coded genetic algorithm,” *Journal of transportation engineering*, vol. 129, no. 2, pp. 186–195, 2003. 32
- [15] F. Zhao and X. Zeng, “Simulated annealing–genetic algorithm for transit network optimization,” *Journal of Computing in Civil Engineering*, vol. 20, no. 1, pp. 57–68, 2006. 32, 33
- [16] W. Szeto and Y. Wu, “A simultaneous bus route design and frequency setting problem for tin shui wai, hong kong,” *European Journal of Operational Research*, vol. 209, no. 2, pp. 141 – 155, 2011. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710005576> 32
- [17] A. Ceder and Y. Israeli, “User and operator perspectives in transit network design,” *Transportation Research Record*, vol. 1623, pp. 3–7, 1998. 32
- [18] A. Mauttone and M. E. Urquhart, “A route set construction algorithm for the transit network design problem,” *Computers & Operations Research*, vol. 36, no. 8, pp. 2440 – 2449, 2009, constraint Programming. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054808001780> 32
- [19] L. Fan and C. L. Mumford, “A metaheuristic approach to the urban transit routing problem,” *Journal of Heuristics*, vol. 16, no. 3, pp. 353–372, 2010. 32

- [20] M. Nikolić and D. Teodorović, “Transit network design by bee colony optimization,” *Expert Systems with Applications*, vol. 40, no. 15, pp. 5945–5955, 2013. 32, 33, 40
- [21] A. B. Hosapujari and A. Verma, “Development of a hub and spoke model for bus transit route network design,” *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, vol. 104, pp. 835 – 844, 2013. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042813045692> 32, 33
- [22] M. A. Nayeem, M. K. Rahman, and M. S. Rahman, “Transit network design by genetic algorithm with elitism,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 46, pp. 30–45, 2014. 32, 33
- [23] V. Guihaire and J.-K. Hao, “Transit network design and scheduling: A global review,” *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 42, no. 10, pp. 1251–1273, 2008. 32
- [24] T. L. Magnanti and R. T. Wong, “Network design and transportation planning: Models and algorithms,” *Transportation science*, vol. 18, no. 1, pp. 1–55, 1984. 33
- [25] Z. Gao, H. Sun, and L. L. Shan, “A continuous equilibrium network design model and algorithm for transit systems,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 38, no. 3, pp. 235–250, 2004. 33
- [26] R. Borndörfer, M. Grötschel, and M. Pfetsch, “A column-generation approach to line planning in public transport,” *Transportation Science*, vol. 41, no. 1, pp. 123–132, 2007. 33
- [27] J. Guan, H. Yang, and S. Wirasinghe, “Simultaneous optimization of transit line configuration and passenger line assignment,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 40, no. 10, pp. 885 – 902, 2006. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261506000154> 33
- [28] M. Ehrgott and X. Gandibleux, “Approximative solution methods for multiobjective combinatorial optimization,” *Top*, vol. 12, no. 1, pp. 1–63, 2004. 33
- [29] D. E. Goldberg and J. H. Holland, “Genetic algorithms and machine learning,” *Machine learning*, vol. 3, no. 2, pp. 95–99, 1988. 33
- [30] S. Pattnaik, S. Mohan, and V. Tom, “Urban bus transit route network design using genetic algorithm,” *Journal of transportation engineering*, vol. 124, no. 4, pp. 368–375, 1998. 33

- [31] J. Agrawal and T. V. Mathew, “Transit route network design using parallel genetic algorithm,” *Journal of Computing in Civil Engineering*, vol. 18, no. 3, pp. 248–256, 2004. 33
- [32] M. Bielli, M. Caramia, and P. Carotenuto, “Genetic algorithms in bus network optimization,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 10, no. 1, pp. 19 – 34, 2002. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X00000486> 33
- [33] P. Chakroborty, “Genetic algorithms for optimal urban transit network design,” *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, vol. 18, no. 3, pp. 184–200, 2003. 33
- [34] K. Deb, “Multi-objective optimization using evolutionary algorithms,” 2001. 33
- [35] J. Pacheco, A. Alvarez, S. Casado, and J. L. González-Velarde, “A tabu search approach to an urban transport problem in northern spain,” *Computers & Operations Research*, vol. 36, no. 3, pp. 967–979, 2009. 33
- [36] A. Mauttone and M. E. Urquhart, “A multi-objective metaheuristic approach for the transit network design problem,” *Public Transport*, vol. 1, no. 4, pp. 253–273, 2009. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s12469-010-0016-7> 33
- [37] K. Fleszar and K. S. Hindi, “An effective vns for the capacitated p-median problem,” *European Journal of Operational Research*, vol. 191, no. 3, pp. 612–622, 2008. 33
- [38] J. Yang, J. Zhang, M. E. Aydin, and J. Y. Wu, “A novel programming model and optimisation algorithms for wcdma networks,” in *Vehicular Technology Conference, 2007. VTC2007-Spring. IEEE 65th.* IEEE, 2007, pp. 1182–1187. 33
- [39] M. P. Pérez, F. A. Rodríguez, and J. M. Moreno-Vega, “A hybrid vns–path relinking for the p-hub median problem,” *IMA Journal of Management Mathematics*, 2007. 33
- [40] J. Puchinger, G. R. Raidl, and U. Pferschy, “The core concept for the multidimensional knapsack problem,” in *European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization.* Springer, 2006, pp. 195–208. 33
- [41] J. D. Beltrán, J. E. Calderón, R. J. Cabrera, J. A. M. Pérez, and J. M. Moreno-vega, “Grasp/vns hybrid for the strip packing problem,” in *In 1st International Workshop on Hybrid Metaheuristics*, 2004, pp. 79–90. 33

- [42] F. Parreño, R. Alvarez-Valdes, J. F. Oliveira, and J. M. Tamarit, “Neighborhood structures for the container loading problem: a vns implementation,” *Journal of Heuristics*, vol. 16, no. 1, pp. 1–22, 2010. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s10732-008-9081-3> 33
- [43] S. Bock and K. Hoberg, “Detailed layout planning for irregularly-shaped machines with transportation path design,” *European Journal of Operational Research*, vol. 177, no. 2, pp. 693–718, 2007. 33
- [44] Z. Sevkli and F. Sevilgen, “Variable neighborhood search for the orienteering problem,” *Computer and Information Sciences–ISCIS 2006*, pp. 134–143, 2006. 33
- [45] C. Archetti, A. Hertz, and M. G. Speranza, “Metaheuristics for the team orienteering problem,” *Journal of Heuristics*, vol. 13, no. 1, pp. 49–76, 2007. 33
- [46] X. Wang and L. Tang, “A population-based variable neighborhood search for the single machine total weighted tardiness problem,” *Computers & Operations Research*, vol. 36, no. 6, pp. 2105–2110, 2009. 33
- [47] M. R. De Paula, M. G. Ravetti, G. R. Mateus, and P. M. Pardalos, “Solving parallel machines scheduling problems with sequence-dependent setup times using variable neighbourhood search,” *IMA Journal of Management Mathematics*, vol. 18, no. 2, pp. 101–115, 2007. 33
- [48] C. Gagné, M. Gravel, and W. L. Price, “Using metaheuristic compromise programming for the solution of multiple-objective scheduling problems,” *The Journal of the Operational Research Society*, vol. 56, no. 6, pp. 687–698, 2005. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/4102041> 33
- [49] M. Sevkli and M. E. Aydin, “A variable neighbourhood search algorithm for job shop scheduling problems,” in *European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*. Springer, 2006, pp. 261–271. 33
- [50] W. Pan Q, W. Wang, and Y. Zhu, “Somemeta-heuristics for no-wait flowshop problem,” *Computer Integrated Manufacturing System*, vol. 13, no. 5, pp. 967–970, 2007. 33
- [51] R. Kolisch and S. Hartmann, “Experimental investigation of heuristics for resource-constrained project scheduling: An update,” *European journal of operational research*, vol. 174, no. 1, pp. 23–37, 2006. 33
- [52] B. Hu and G. R. Raidl, “Effective neighborhood structures for the generalized traveling salesman problem,” in *European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*. Springer, 2008, pp. 36–47. 33

- [53] F. Carrabs, J.-F. Cordeau, and G. Laporte, “Variable neighbourhood search for the pickup and delivery traveling salesman problem with lifo loading,” *Informs Journal Computation*, vol. 19, no. 4, pp. 618–632, 2007. 33
- [54] L.-M. Rousseau, M. Gendreau, and G. Pesant, “Using constraint-based operators to solve the vehicle routing problem with time windows,” *Journal of Heuristics*, vol. 8, no. 1, pp. 43–58, 2002. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1013661617536> 33
- [55] M. Polacek, R. F. Hartl, K. Doerner, and M. Reimann, “A variable neighborhood search for the multi depot vehicle routing problem with time windows,” *Journal of Heuristics*, vol. 10, no. 6, pp. 613–627, 2004. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s10732-005-5432-5> 33
- [56] P. Hansen, N. Mladenovic, and J. Moreno, “Variable neighborhood search,” *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, vol. 7, no. 19, pp. 1–16, 2003. 39
- [57] C. E. Mandl, “Evaluation and optimization of urban public transportation networks,” *European Journal of Operational Research*, vol. 5, no. 6, pp. 396–404, 1980. 49, 62