DETERMINACION DE LOS PARES PITAGORICOS (α_n, β_n) CORRESPONDIENTES A NUMEROS DE LA FORMA

$$z = 4k + 1 = \alpha_n^2 + \beta_n^2.$$

por

MANUEL VAZQUEZ

A continuación damos, sin demostración, un procedimiento que hemos encontrado, y que estimamos verdaderamente curioso, para obtener directamente la diferencia $\alpha_n - \beta_n$ y la suma $\alpha_n + \beta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de todos los pares pitagóricos correspondientes a un número dado $z = 4k + 1$.

Formemos, para ello, las diferencias sucesivas:

$$\begin{array}{l} k - 0 = k_0 \\ k_0 - 1 = k_1 \\ k_1 - 2 = k_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ k_n - (n+1) = k_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

hasta llegar a un k_z negativo. Pueden ocurrir tres casos:

1.° Que ninguno de los k_n anteriores a k_z sea un número triangular, esto es, comprendido en la sucesión 0, 1, 3, 6, 10, ... que empieza por $t_0 = 0$ y en la que constantemente es $t_{n+1} = t_n + n + 1$. En este caso no hay par pitagórico: el número dado no admite la forma $\alpha^2 + \beta^2$. Sea, por ejemplo, el *número* $z = 21 = 4k + 1$. Se tiene $k = 5$. Y las sucesivas diferencias serán:

$$5 - 0 = k_0 = 5; \quad 5 - 1 = k_1 = 4; \quad 4 - 2 = k_2 = 2; \quad 2 - 3 = k_3 = -1 = k_z\,.$$

Ninguno de los k_n positivos es número triangular. Por tanto,

$$21 \neq \alpha^2 + \beta^2.$$

2.° Que el número de los k_n triangulares sea par. En este caso ordenaremos en sucesión creciente los índices de dichos k_n triangulares, y sea la sucesión obtenida:

$$a, b, c, \ldots\ldots, s, t, u \qquad [1]$$

Tendremos:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1 - \beta_1 = 2a + 1; & \alpha_2 - \beta_2 = 2b + 1; & \alpha_3 - \beta_3 = 2c + 1 \ldots\ldots \\ \alpha_1 + \beta_1 = 2u + 1; & \alpha_2 + \beta_2 = 2t + 1; & \alpha_3 + \beta_3 = 2s + 1 \ldots\ldots \end{array}\right\},$$

y así sucesivamente, conjugando siempre los índices equidistantes de los extremos de la sucesión. El número dado admite tantas expresiones de la forma $\alpha^2+\beta^2$ cuantos sean los pares de índices que componen la sucesión [1].

Ejemplo: sea $z=65=4k+1$. Tenemos $k=16$, y las diferencias sucesivas:

$$k_0=16-0=16;\quad k_1=16-1=15;\quad k_2=15-2=13;\quad k_3=13-3=10;$$
$$k_4=10-4=6;\quad k_5=6-5=1;\quad k_6=1-6=-5=k_z.$$

Los índices correspondientes a los k_n triangulares son:

$$1,\ 3,\ 4,\ 5,$$

que escritos en este mismo orden, constituyen la sucesión [1].

Tendremos, pues,

$$\alpha_1-\beta_1=2\cdot 1+1=3;\quad \alpha_1+\beta_1=2\cdot 5+1=11;$$
$$\alpha_2-\beta_2=2\cdot 3+1=7;\quad \alpha_2+\beta_2=2\cdot 4+1=\ 9.$$

Por tanto,

$$65=\alpha_1^2+\beta_1^2=7^2+4^2=\alpha_2^2+\beta_2^2=8^2+1^2.$$

3.° Que el número de los k_n triangulares sea impar. Entonces la sucesión [1] presenta la forma

$$a,\ b,\ \ldots\ i\ \ldots,\ t,\ u \qquad [2]$$

Asóciense, como en el caso anterior, a con u, b con t, etc., quedando el término central i. Si asociamos éste consigo mismo, resulta

$$\alpha_i-\beta_i=2i+1=\alpha_i+\beta_i,\quad \text{o sea:}\ \beta_i=0.$$

El número admite, por tanto, la forma $z=\alpha_i^2$, aparte de las $\alpha_n^2+\beta_n^2$ correspondientes a los $2n$ índices restantes. Se trata, pues, de un z cuadrado.

Apliquemos lo expuesto al número $z=25=4k+1$. Siendo $k=6$, tendremos:

$$6-0=k_0=6;\quad 6-1=k_1=5;\quad 5-2=k_2=3;$$
$$3-3=k_3=0,\quad 0-4=k_n=-4=k_z.$$

La sucesión [2] será en este caso:

$$0,\ 2,\ 3.$$

Y, en virtud de todo lo precedente, resulta:

$$25=\alpha_1^2+\beta_1^2=4^2+3^2=\alpha_2^2+\beta_2^2=5^2+0^2=5^2.$$

Finalmente, en el caso particular en que la sucesión [2] quede reducida al término i, el número dado es cuadrado, y sólo existe un par pitagórico, una de cuyas componentes es nula. Puede servir como ejemplo el número 9.

N. del A.—La demostración puede servir de ejercicio.

Otra.—Podría parecer, a primera vista, que el procedimiento que acabamos de detallar no ofrece ventaja alguna sobre el *directo*, consistente en ir restando de z sucesivamente los cuadrados 0, 1, 4, 9, etc., con lo que, cada vez que la diferencia fuese un cuadrado, tendríamos un par pitagórico. Mas vamos a demostrar que no es así.

Sea t_n el mayor número triangular menor que k. Podremos escribir:

$$\frac{z-1}{4} = k > t_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad [3]$$

El número h que cuenta los números triangulares menores que k (excluyendo $t_0=0$) es evidentemente $h_t=n$.

Multipliquemos por 4 la expresión [3] y añadamos 1 a los diversos miembros. Resulta:

$$z = 4k+1 > 2n(n+1)+1 \qquad [4]$$

Para $z \longrightarrow \infty$, el tercer miembro de [4] es del orden de magnitud de $2n^2$. Luego el orden del número h_c que cuenta los cuadrados menores que z (excluyendo el 0^2) será $n\sqrt{2}$.

Por tanto:

$$\lim_{z\longrightarrow\infty} \frac{h_t}{h_c} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{n\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Y la misma relación subsiste entre los números triangulares y los cuadrados respectivamente comprendidos en cada una de los dos mitades de k y sus homólogas de z.

Así, pues, el número de operaciones que nuestro procedimiento exige es siempre menor que en el procedimiento *directo*, ya que si en éste podemos limitarnos a explorar uno de los dos intervalos $\left(0, \frac{z}{2}\right)$, $\left(\frac{z}{2}, z\right)$, en aquél podemos obtener sólo las diferencias $\alpha_n - \beta_n$, o sólo las sumas $\alpha_n + \beta_n$, y combinando aquéllas o éstas con la ecuación $z = \alpha_n^2 + \beta_n^2$, determinar, para cada valor de n, una solución.

Ahora bien, por un razonamiento análogo al que acabamos de emplear se demuestra que el número de números triangulares comprendidos entre $\frac{k}{2}$ y k está con el de los comprendidos entre 0 y $\frac{k}{2}$ en la relación $\sqrt{2}-1 \sim 0{,}414$, por lo que la máxima ventaja del algor'tmo que nos ocupa se obtiene determinando las sumas $\alpha_n + \beta_n$: y para ello conviene operar del siguiente modo:

Dispóngase de una tabla de números triangulares, señalados con sus índices respectivos. Sea t_n el menor número triangular igual o mayor que $\frac{k}{2^3}$ y formemos las sucesivas diferencias

$$\left.\begin{array}{l} k - t_n = k_n \\ k_n - (n+1) = k_{n+1} \\ k_{n+1} - (n+2) = k_{n+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad [5]$$

hasta llegar a un k_t negativo. Cada vez que el segundo miembro de una de las igualdades [5] sea un número triangular, si al duplo del respectivo índice se agrega la unidad, tendremos una suma $\alpha+\beta$. Aplicando este algoritmo así abreviado al número 65, por ejemplo, se verá que bastan dos sustracciones para la determinación de sus dos pares pitagóricos, mientras que con el algoritmo completo fueron precisas seis. Y para $k=276$, dichos números de sustracciones están ya en la relación de 7 a 24.

— ·•· —