17.ª en el alfabeto griego (teniendo en cuenta que en el sexto puesto ha de incluirse la letra ς). Simbólicamente se puede, pues, escribir

$$\pi \equiv 8 \ (\text{mód.}\ i), \qquad \text{porque es}, \qquad 17 \equiv 8 \ (\text{mód.}\ 9).$$

Por consiguiente, si en la igualdad $i:\pi=7:18$ se sustituye i por (9), y π por (8), se deduce, como anteriormente

$$7 \cdot (8) = 18 \cdot (9),$$

y pasando los números al sistema binario, resulta el anagrama de Gauss.

EJERCICIOS RESUELTOS

152. *En la ecuación* $x^4 - 3\,(m+4)\,x^2 + (m+1)^2 = 0$, *determinar un valor entero para* m *que haga que sus cuatro raíces estén en progresión aritmética.*

Solucion.—Por ser nulo el coeficiente de x^3 la suma de las raíces tiene que ser nula, por lo que serán de la forma $-3h$, $-h$, h, $3h$. Por consiguiente, la ecuación dada tiene que ser idéntica a la

$$(x+3\,h)\,(x+h)\,(x-h)\,(x-3\,h)=0, \qquad x^4-10\,h^2\,x^2+9\,h^4=0;$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{r} 3\,(m+4)=10\,h^2 \\ (m+1)^2=9\,h^4 \end{array}\right\} \quad \frac{3\,(m+4)}{m+1}=\pm\frac{10}{3},$$

lo cual da lugar a las dos ecuaciones

$$9\,m+36=10\,m+10, \qquad 9\,m+36=-10\,m-10;$$

la primera tiene la raíz entera $m=26$; la segunda no tiene raíz entera; por consiguiente, la solución del problema es $m=26$, siendo las raíces de la ecuación -9, -3, 3, 9.

Jose M.ª Arredondo

159. *Se considera un sistema de vectores cuyas coordenadas plückerianas son* X, Y, Z, L M, N. *Hallar el lugar de los puntos* O′ *tales que el mo-*

mento resultante O'G' esté en un plano dado, y determinar la envolvente de este vector.

Solucion.—Sean $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ tres vectores unitarios situados sobre tres ejes trirrectangulares.

La resultante general del sistema de vectores es:

$$\overrightarrow{R} = X\,\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\,\overrightarrow{k}.$$

El momento resultante con relación al origen es:

$$\overrightarrow{O\,G} = L\,\overrightarrow{i} + M\overrightarrow{j} + N\,\overrightarrow{k}.$$

Por el teorema del cambio del origen de momentos sabemos que:

$$\overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{R} = (L - yZ + Yz)\,\overrightarrow{i} + (M + xZ - Xz)\,\overrightarrow{j} + (N - xY + yX)\,\overrightarrow{k} \quad (1)$$

siendo x y z las coordenadas de O'.

Sea π $(x_1\ y_1\ z_1)$ un punto cualquiera del plano dado; su ecuación será:

$$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) + C\,(z - z_1) = 0 \qquad ($$

Por estar G' en él será perpendicular $\pi G'$ a la normal a dicho plano. Luego el producto escalar:

$$(A\,\overrightarrow{i} + B\,\overrightarrow{j} + C\,\overrightarrow{k})\,.\,\overrightarrow{\pi\,G'} = (A\,\overrightarrow{i} + B\,\overrightarrow{j} + C\,\overrightarrow{k})\,.\,(\overrightarrow{\pi\,O'} + \overrightarrow{O'G'})$$

será nulo; es decir,

$$A\,(x - x_1 + L + Yz - Zy) + B\,(y - y_1 + M + Zx - Xz) + C\,(z - z_1 + N + Xy - Yx) = 0,$$

y teniendo en cuenta la ecuación (2) obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} A\,L + B\,M + C\,N + \begin{vmatrix} A & B & C \\ X & Y & Z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \\ A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) + C\,(z - z_1) = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

como recta lugar de O'

La ecuación de la recta soporte del vector $\overrightarrow{O'G'}$ es

$$\frac{\xi - x}{L - yZ + Yz} = \frac{\eta - y}{M + xZ - Xz} = \frac{\zeta - z}{N - xY + yX} \qquad (4)$$

Deduciendo de (3) x e y en función lineal de z y sustituyéndolas en la primera de las ecuaciones (4) obtenemos una ecuación en ξ, η, z, cuya envolvente es una ecuación de 2.º grado en ξ, η.

Por lo tanto, la envolvente $\overrightarrow{O'G'}$ es una cónica situada en el plano considerado.

HACAR

172. *Dadas en el plano tres cónicas* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *que tienen los dos puntos comunes reales o imaginarios* A *y* B, *hallar una cuarta cónica* φ_4 *que pase por los puntos* A *y* B *y que las cuerdas comunes distintas de la* AB, φ_2 *y* φ_3 *pasen respectivamente por puntos prefijados* P_1, P_2 *y* P_3.

P. DROCH

SOLUCION.—Imaginemos una cuádrica Φ y un punto de ella O, desde el cual las cónicas φ_1, φ_2, φ_3, y φ_4 si existe, sean proyecciones estereográficas desde O de sendas cónicas $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \varphi_4^*$ y sean π_1, π_2, π_3, π_4 sus planos respectivos, para lo que bastará elegir Φ y O de modo que el plano tangente a Φ en O pase por la recta AB y la involución de tangentes conjugadas en O sea cortada por la recta AB en la definidora del par de puntos reales o conjugados A-B. Por las condiciones del enunciado, las rectas $\pi_4 \times \pi_i$ y OP_i ($i=1, 2, 3$) han de ser incidentes, luego el plano π_4 estará determinado por los tres puntos $OP_i \times \pi_i$. Recíprocamente el plano determinado por estos tres puntos da una cónica $\varphi_4{}^*$ de Φ que se proyecta desde O según la φ_4 pedida. Las construcciones a que el problema da lugar, todas de la geometría proyectiva elemental, no presentan dificultad alguna, simplificándodose notablemente en el caso de ser A y B reales y por tanto Φ reglada de generatrices OA y OB.

P. DARREZ

Otra solución.

Si los puntos A y B son imaginarios, hagamos una transformación homográfica tal que los puntos cíclicos sean los homólogos de A y B; las cuatro cónicas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, se transformarán en circunferencias, C_1, C_2, C_3, C_4. Los puntos P_1, P_2, P_3, en Q_1, Q_2, Q_3 respectivamente. El problema queda reducido a encontrar una circunferencia C_4 que corte a otras tres según cuerdas que pasen por tres puntos fijos. Sean O_i, R_i el centro y el radio de C_j El punto Q_i tiene la misma potencia respecto C_4 y C_i. Por lo tanto

$$\left.\begin{aligned}\overline{O_4 Q_1}^2 - R_4^2 = \overline{Q_1 O_1}^2 - R_1^2 \\ \overline{O_4 Q_2}^2 - R_4^2 = \overline{Q_2 O_2}^2 - R_2^2\end{aligned}\right\};$$

restando miembro a miembro:

$$\overline{O_4 Q_1}^2 - \overline{O_4 Q_2}^2 = k^2;$$

luego O_4 está en una recta perpendicular a $Q_1 Q_2$ y que puede hallarse con facilidad gráficamente. Haciendo lo mismo con C_1 y C_3 obtenemos otra recta. La intersección con la anterior da el punto O_4. Una vez hallado O_4, R_4 se determina sabiendo que

$$R_4^2 = -\overline{Q_i O_i}^2 + \overline{Q_i O_4}^2 + R_i^2, \quad i = 1 \text{ ó } 2 \text{ ó } 3.$$

HACAR

244. *De todos los números que se pueden formar con las nueve cifras significativas empleándolas todas sin repetir ninguna, averiguar cuántos son divisibles por* 11 ; *y, de éstos, determinar cuál es el menor, cuál es el mayor y cuánto vale la suma de todos ellos.*

SOLUCION.—Los 9 ! números que se pueden formar con las nueve cifras, sin ninguna repetición, se pueden agrupar de forma que los de cada grupo tengan las mismas cuatro cifras en los lugares pares, aunque en distinto orden, teniendo como consecuencia las otras cinco en los lugares impares.

El número de estos grupos es

$$C_9^4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!} = 126,$$

habiendo en cada grupo $P_4 . P_5 = 4 ! \; 5 ! = 2880$ números, tales que cuando uno de ellos es indivisible por 11 lo son los 2880 del grupo, ya que la suma de sus cifras de lugar impar y de lugar par, tienen, respectivamente, el mismo valor.

Si designamos por i la suma de las cifras de lugar impar y por p las de lugar par, tiene que ser $i - p = \dot{\overline{11}}$. Pero como cuatro cifas significativas distintas suman a lo sumo 35, en cuyo caso las otras cuatro suman 10, la mayor diferencia $i - p$ vale 25.

Análogamente, como cinco cifras significativas distintas suman por lo menos 15, en cuyo caso las otras cuatro suman 30, el valor mínimo de $i - p$ es -15.

Siendo siempre $i + p = 45$ y teniendo que ser i y p números enteros positivos y tales que su diferencia sea un múltiplo de 11 comprendido entre -15 y $+25$ tenemos que resolver los sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} i + p = 45 \\ i - p = 22 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} i + p = 45 \\ i - p = 11 \end{array}\right\} \; [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} i + p = 45 \\ i - p = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} i + p = 45 \\ i - p = -11 \end{array}\right\} \; [2]$$

y aceptar las soluciones enteras y positivas.

Los únicos sistemas que dan soluciones aceptables son el [1] y el [2], cuyas soluciones son :

$$\left.\begin{array}{l} i = 28 \\ p = 17 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} i = 17 \\ p = 28 \end{array}\right\}.$$

Tenemos, pues, que descomponer los números 17 y 28 en cuatro sumandos de una sola cifra, de manera que todos sean distintos, y éstos serán las cifras que ocupen los lugares pares en cualquier orden. Por cada descomposición tendremos 2880 múltiplos de 11.

17 se descompone de las nueve maneras siguientes:

$$9 + 5 + 2 + 1 = 17$$
$$9 + 4 + 3 + 1 = 17$$
$$8 + 6 + 2 + 1 = 17$$
$$8 + 5 + 3 + 1 = 17$$
$$8 + 4 + 3 + 2 = 17 \quad (a)$$
$$7 + 6 + 3 + 1 = 17$$
$$7 + 5 + 4 + 1 = 17$$
$$7 + 5 + 3 + 2 = 17$$
$$6 + 5 + 4 + 2 = 17 \quad (b)$$

28 se descompone de las dos formas siguientes

$$9 + 8 + 7 + 4 = 28$$
$$9 + 8 + 6 + 5 = 28$$

Estos once grupos dan lugar a

$$2880 \times 11 = 31680$$

múltiplos de 11

De todos los números formados con las nueve cifras, sin repetir, el menor de todos es el que las tiene en el orden natural. Por consiguiente, para formar el menor de los que son múltiplos de once, tomamos como primeras cifras los números 1, 2, 3 y 4 en orden natural. Los grupos anteriores que contienen el 2 y el 4 son el (*a*) y el (*b*); el (*a*) no sirve por contener un 3 que ya está tomado; el (*b*) tiene como cifra menor (aparte del 2 y del 4) el 5 que será la que ocupe el 6.º lugar teniendo que ocupar, como consecuencia, el lugar octavo el número 6; las otras cifras que quedan las ponemos en los lugares impares de menor a mayor.

El múltiplo pedido es, por lo tanto:

123475869.

El mayor, por un razonamiento análogo, es el

987652413.

Para formar la suma de todos los múltiplos pedidos, supongamos los 31680 sumandos colocados en disposición de sumarlos y calculamos la suma de las columnas que ocupan el lugar par y luego las de lugar impar.

De los once grupos de cuatro cifras, que pueden ocupar los lugares pares, entra el 1 en 6 grupos; como cada grupo tiene 2880 múltiplos de 11, el número 1 ocupa el mismo lugar en $\frac{2880}{4} = 720$ múltiplos, de cada grupo. Luego en total, en toda columna de lugar par hay:

$6 \times 720 = 4320$	números	1	que suman	4320
$5 \times 720 = 3600$	»	2	»	7200
$5 \times 720 = 3600$	»	3	»	10800
$5 \times 720 = 3600$	»	4	»	14400
$6 \times 720 = 4320$	»	5	»	21600
$4 \times 720 = 2880$	»	6	»	17280
$4 \times 720 = 2880$	»	7	»	20160
$5 \times 720 = 3600$	»	8	»	28800
$4 \times 720 = 2880$	»	9	»	25920
Los 31680	sumandos de las columnas pares suman			150480

Para sumar las columnas de lugar impar tendremos en cuenta que como son 11 los grupos formados, si un número entra en m grupos de lugar par, entrará en $11-m$ grupos de lugar impar; y como cada grupo de cifras que entran en lugar impar tiene cinco, entrará cada una en $\frac{2880}{5} = 576$ mútiples de cada grupo.

Por consiguiente, en cada columna de lugar impar hay

$5 \times 576 = 2880$	números	1	que suman	2880
$6 \times 576 = 3456$	»	2	»	6912
$6 \times 576 = 3456$	»	3	»	10368
$6 \times 576 = 3456$	»	4	»	13824
$5 \times 576 = 2880$	»	5	»	14400
$7 \times 576 = 4032$	»	6	»	24192
$7 \times 576 = 4032$	»	7	»	28224
$6 \times 576 = 3456$	»	8	»	27648
$7 \times 576 = 4032$	»	9	»	36288
Los 31680	sumandos de las columnas impares suman			164736

Luego la suma total es:

```
        164736
       150480
      164736
     150480
    164736
   150480
  164736
 150480
164736
--------------
18159999983136
```

JOSE M.ª ARREDONDO

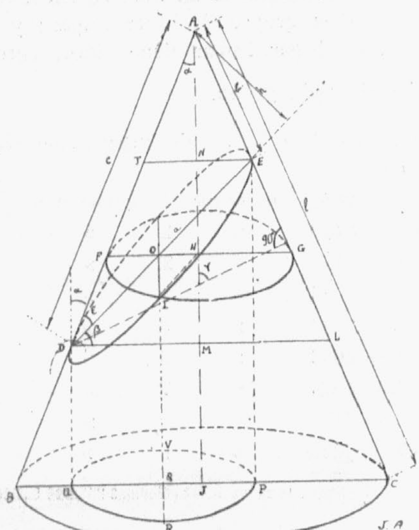
245. *Una superficie cónica de revolución, de vértice* A *es cortada por dos planos* π *y* σ. *El plano* π *es perpendicular al eje, el* σ *no. En el plano meridiano perpendicular a* σ, *este plano y las generatrices de la superficie cónica, definen un triángulo de lados* a, b *y* c *el plano* π *y las generatrices un triángulo isósceles de lados* 2r, 1 *y* 1 (1>b, 1>c).

1.° *Hallar el volumen y las áreas lateral y total del tronco de cono (de bases no paralelas) limitado por el cono y los planos* σ *y* π.

2.° *Supuestos* b=5 *cms.,* c=10 *cms.,* $a = 5\sqrt{3}$ *cms.,* l=12 *cms. dibujar el desarrollo lateral de dicho tronco.*

Solucion.—El volumen del tronco lo hallamos como diferencia entre el volumen del cono total y el del cono deficiente:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \overline{AJ} - \frac{1}{3}\pi \frac{a}{2} \cdot \overline{OI} \cdot h,$$



$$r = l \operatorname{sen} \alpha = l \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \text{siendo} \quad p = \frac{a+b+c}{2},$$

$$\overline{AJ} = \sqrt{l^2 - r^2} = l \sqrt{\frac{bc - (p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\overline{OI} = \sqrt{\overline{HI}^2 - \overline{OH}^2} \begin{cases} \overline{HI} + \overline{OH} = \overline{GH} + \overline{OH} = \overline{OG} = \dfrac{\overline{DL}}{2} = \overline{DM}, \\[2ex] \overline{HI} - \overline{OH} = \overline{HF} - \overline{OH} = \overline{OF} = \dfrac{\overline{TE}}{2} = \overline{TN}, \end{cases}$$

$$\overline{HI}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{DM} \times \overline{TN} = cb \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad \overline{OI} = \sqrt{bc} \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{(p-b)(p-c)},$$

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

de donde

$$V = \frac{\pi}{3}(p-b)(p-c)\left[\frac{l^3\sqrt{bc-(p-b)(p-c)}}{bc\sqrt{bc}} - \sqrt{p(p-a)}\right].$$

Un elemento del área lateral del tronco es igual al área de su proyección sobre el plano π, dividida por el coseno que la normal a la superficie forma con el eje del cono. Este coseno es el mismo para todos los elementos de superficie, siendo, por consiguiente, el área lateral del cono igual a la de su proyección dividida por $\cos\gamma$. El área de la proyección es la diferencia entre la del círculo de diámetro BC y la de la elipse $URPV$.

$$\text{Area del círculo} = \pi r^2 = \pi l^2 \frac{(p-b)(p-c)}{bc},$$

$$\overline{UQ} = \frac{a}{2}\cos\beta, \quad \cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\varepsilon) = \operatorname{sen}\alpha\cos\varepsilon + \cos\alpha\operatorname{sen}\varepsilon,$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \quad \cos\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},$$

$$\operatorname{sen}\varepsilon = 2\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2} = \frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\cos\varepsilon = \cos^2\frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{p(p-b)-(p-a)(p-c)}{ac};$$

sustituyendo tenemos:

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{ac\sqrt{bc}}[p(p-b)+(p-a)(p+c)],$$

de donde

$$UQ = \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{2c\sqrt{bc}}[p(p-b)+(p-a)(p+c)],$$

$\overline{QR} = \overline{OI}$, calculado anteriormente.
Luego el área de la elipse $URPV$ es:

$$\pi\,\overline{UQ}\,.\,\overline{QR} = \pi\frac{(p-b)(p-c)}{2c\sqrt{bc}}[p(p-b)+(p-a)(p+c)].$$

como el ángulo γ es complementario del α es

$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

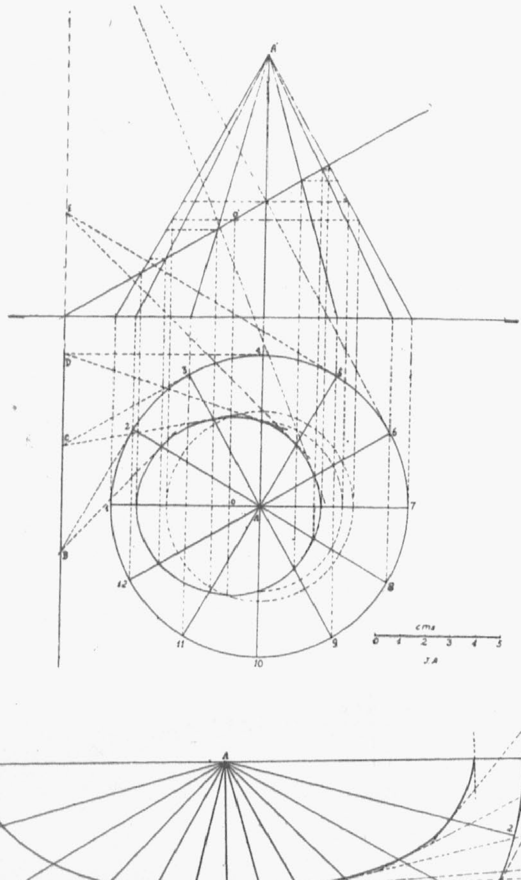
de donde el área lateral del tronco es:

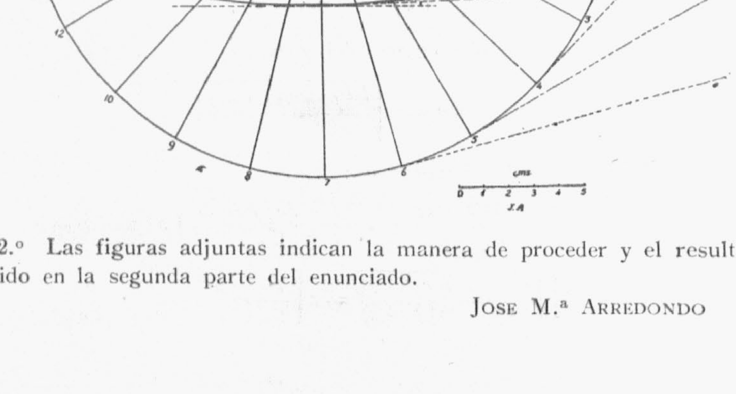
$$S = \left[\pi l^2\frac{(p-b)(p-c)}{bc} - \pi\frac{(p-b)(p-c)}{2c\sqrt{bc}}[p(p-b)+\right.$$

$$\left.+(p-a)(p+c)]\right]\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}} = \pi\left[\frac{l^2}{bc} - \frac{p(p-b)+(p-a)(p+c)}{2c}\right]$$

y sumándole el área del círculo base y la de la elipse DIE obtenemos el área total del tronco

$$S_1 = \pi\left[\frac{l^2}{\sqrt{b\,c}} - \frac{p\,(p-b)+(p-a)\,(p+c)}{2\,c} + l^2\,\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c} + \frac{a\sqrt{(p-b)\,(p-c)}}{2}\right]$$





2.° Las figuras adjuntas indican la manera de proceder y el resultado pedido en la segunda parte del enunciado.

JOSE M.ª ARREDONDO

247. *Dado un punto* A *y una recta* a *que no pasa por* A, *se consideran los triángulos que tienen por vértice el punto* A *y dos puntos* B *y* C *variables situados en la recta* a, *siendo constante el ángulo* α *correspondiente al vértice* A. *Se pide determinar el lugar de los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos* A B C, *la envolvente de estas circunferencias y las de las alturas correspondientes a los vértices* B *y* C.

Solucion.—Llamando O al centro del círculo circunscrito y D al pie de la perpendicular bajada desde O a (a) se tiene:

$$\frac{O\,A}{O\,D} = \frac{R}{R\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} > 1$$

Por lo tanto, el punto O pertenece a una hipérbola que tiene como foco A, como directriz (a) y como excentricidad $e = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Si unimos D con el otro foco A de la hipérbola cortará esta recta en M a la circunferencia circunscrita en virtud de la propiedad fundamental de la hipérbola, se tiene:

$$A'\,O - A\,O = 2\,a = \text{const.} \quad [A'\,M + R] - R = A'\,M = 2\,a.$$

Por lo tanto, el punto M pertenece al círculo director relativo al foco A' envolvente de todas las circunferencias circunscritas a ABC. Si llamamos C' el pie de la altura relativa a C, se tiene que $\dfrac{C'\,A}{C\,A} = \cos\alpha$ y $\sphericalangle C'A\,C = \alpha$; como C describe (a), el punto C' describirá la recta homotética de la de (a) con razón de homotecia cos α y girada en el sentido CC' un ángulo α; de aquí se deduce que la envolvente de CC' es una parábola que tiene como foco A y como tangente en el vértice la recta lugar geométrico de C'.

La envolvente de la altura BB' es la parábola simétrica de la anterior respecto a la altura AA'.

E. Feltrer

261. *Dado el sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} x + x\,y^2 &= 2 + 2\,x^2\,y^2 \\ y - y\,x^2 &= 3 + 3\,x^2\,y^2 \end{aligned}\right\},$$

cuya resultante en x *es* R$=$0 *se pide*:

1.º *Reducir* R *a ecuación de cuarto grado con el coeficiente del primer término igual a la unidad, sin término en* x^3 *y que carezca de la raíz* x$=$—1.

2.º *Substituir en esta ecuación el coeficiente del término de primer grado en* x *por* m *y el término independiente por* n. *Suponiendo que el punto* (m, n) *puede ocupar todas las posiciones en el plano, limitar en este plano las regiones correspondientes a la distinta naturaleza de las raíces de la ecuación: reales (desiguales e iguales) e imaginarias.*

(E. E. de Agr., 1935).

SOLUCION.—1.° Las ecuaciones dadas pueden escribirse así:

$$\left.\begin{array}{l}(2x^2-x)y^2-x+2=0\\ 3x^2y^2+(x^2-1)y+3=0\end{array}\right\},$$

y en este sistema de ecuaciones de segundo grado en y la resultante de Bezout es:

$$R=[(2x^2-x)(x^2-1)][-(2-x)(x^2-1)]-[(2x^2-x)3-(2-x)3x^2]^2=0,$$

que desarrollada es:

$$2x^7-14x^6-2x^5+28x^4-2x^3-14x^2+2x=0.$$

Esta ecuación tiene la raíz $x=0$ y la raíz doble $x=-1$, eliminándolas por división por $x(x-1)^2$ queda reducida a $x^4-9x^3+16x^2-9x+1=0$; para que desaparezca el término en x^3 basta poner $x=x'+\dfrac{9}{4}$, con lo cual, después de hacer operaciones y de quitar el acento a la x', queda en la forma:

$$x^4-\frac{115}{8}x^2-\frac{225}{8}x-\frac{3875}{256}=0,$$

que es la pedida:

$$2.^{\circ}\qquad x^4-\frac{115}{8}x^2+mx+n=0.$$

Llamemos t a la incógnita:

$$t^4-\frac{115}{8}t^2+mt+n=0 \qquad [1]$$

si hacemos

$$\left\{\begin{array}{l}v=t^4-\dfrac{115}{8}t^2\\ u=t\end{array}\right\}\ [2];\qquad \left.\begin{array}{l}x=m\\ y=n\end{array}\right\}\ [3]$$

la ecuación (1) se puede poner en la forma $v+ux+y=0$, que nos dice que la tangente a la curva (2) (en coordenadas tangenciales) pasa por el punto (3).

Por consiguiente, para un cierto par de valores de m y n, las raíces de (1) vienen dadas por los valores de t, que corresponden a las tangentes a la curva (2) trazadas por el punto (m, n).

Para obtener la curva (2) en coordenadas puntuales paramétricas resolvemos el sistema formado por el haz tangencial

$$t^4-\frac{115}{8}t^2+xt+y=0,$$

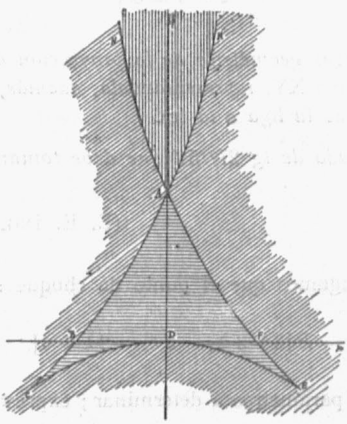
y su derivada respecto a t,

$$4\,t^3 - \frac{230}{8}\,t + x = 0;$$

es decir, la curva (2) es

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{115}{4}\,t - 4\,t^3 \\ y &= 3\,t^4 - \frac{115}{8}\,t^2 \end{aligned}\right\}.$$

Esta curva es de la forma de la figura adjunta, y según el número de tangentes que desde cada punto se le pueden trazar, queda dividido el plano en las siguientes regiones: En el rayado vertical hay cuatro raíces ima-



ginarias; en el horizontal, cuatro reales y distintas y en el inclinado dos reales distintas y dos imaginarias conjugadas. Sobre la curva, en el trozo $A\ B\ C\ D\ E\ F\ A$, hay dos raíces iguales y dos reales distintas. En el punto A hay dos raíces dobles y en C y E cuatro raíces reales iguales: en los trozos AM y AN hay dos raíces reales iguales y otras dos imaginarias conjugadas.

NOTA.—La figura es un croquis; no está a escala por las dificultades del dibujo.

JOSE M.ª ARREDONDO

282. *En un sistema cartesiano rectangular el vector* $\bar{a}$ *de módulo* $\sqrt{10}$ *tiene por recta de posición la definida por el punto* A (0, 0, −2) *y los parámetros directores*

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{40}},\quad \frac{3}{\sqrt{40}},\quad \frac{1}{\sqrt{10}},$$

hallándose el origen de $\bar{a}$ *en* A.

Supóngase lanzado el vector a modo de flecha, según su línea de acción y sentido positivo hasta chocar con la superficie de ecuación

$$x^2 + y^2 - 2z - 20 = 0 \quad (S).$$

Considerada ésta como impenetrable, al chocar el vector $\overline{a}$ *desliza en contacto con ella, conservándose paralelo a sí mismo, en el plano conteniendo el eje Z y definido por la posición inicial del vector y en sentido positivo de dicho eje coordenado, hasta aquella posición en que forma con la normal a la superficie* (S) *un ángulo de* 27° 54′. *Inmovilizado en esta posición, tómense momentos de él respecto de los puntos de la curva* (c) *de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{r} xy - 4 = 0 \\ z - 4 = 0 \end{array}\right\} \qquad (c)$$

y hállese la curva lugar geométrico de la proyección del extremo del vector momento sobre el plano XY, representándola, además, gráficamente, y analizando la relación que la liga a la (c).

El valor aproximado de tg 27° 54′ *que debe tomarse es* $\frac{9}{17}$.

(E. E. Ing. Agr., oct. 1935)

Solucion.—Supongamos que el punto de choque sea

$$P[3\sqrt{3}\,\lambda, \quad 3\lambda, \quad 2\lambda + \alpha],$$

en el que λ y α son parámetros a determinar; expresando que P está sobre (S) se tiene:

$$18\lambda^2 - 2\lambda - (\alpha + 10) = 0 \qquad (1)$$

Expresando que la normal y el vector $\overline{a}$ forman un ángulo de 27° 54′, se tiene:

$\cos(27^0, 54') \sim \frac{17}{\sqrt{370}}$, parámetros directores de $\overline{a}$, $[3\sqrt{3}, 3, 2]$

» » de la normal, $[6\sqrt{3}\,\lambda, 6\lambda, -2]$

$$\frac{17}{\sqrt{370}} = \frac{18\lambda - 1}{\sqrt{10(36\lambda^2 + 1)}}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$44\lambda^2 - 37\lambda - 7 = 0$$

$$\lambda = \frac{37 \pm \sqrt{2601}}{88} = \frac{37 \pm 51}{88} = \begin{cases} +1 \\ -\frac{7}{44} \end{cases}.$$

Tomando el valor $h = +1$, puesto que resulta el punto de choque en la dirección positiva de Z, sustituyendo este valor en (1), resulta $\alpha = 6$, de donde:

$$P[3\sqrt{3},\quad 3,\quad 8].$$

Las coordenadas del origen del vector son:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 3\sqrt{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ y_0 = 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2} \\ z_0 = 8 - 1 = 7 \end{array}\right\}.$$

El vector está definido

$$\left.\begin{array}{l} \text{origen, } \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\quad \dfrac{3}{2},\quad 7\right) \\ a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,\bar{x} + \dfrac{3}{2}\,\bar{y} + \bar{z} \end{array}\right\}.$$

Hallado el momento de $\bar{a}$ respecto a $M\left(\mu,\ \dfrac{4}{\mu},\ 4\right)$ situado en (c).

$$\left|\begin{array}{ccc} L & M & N \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \mu & \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{\mu} & 7 - 4 \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} & \dfrac{3}{2} & 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} L = -\dfrac{4}{\mu} + 3 \\ M = \mu + 3\sqrt{3}\,. \end{array}$$

Llamando X e Y a las coordenadas del extremo del vector momento:

$$\left.\begin{array}{l} X = \mu - 3 - \dfrac{4}{\mu} \\ Y = \mu + 3\sqrt{3} + \dfrac{4}{\mu} \end{array}\right\}.$$

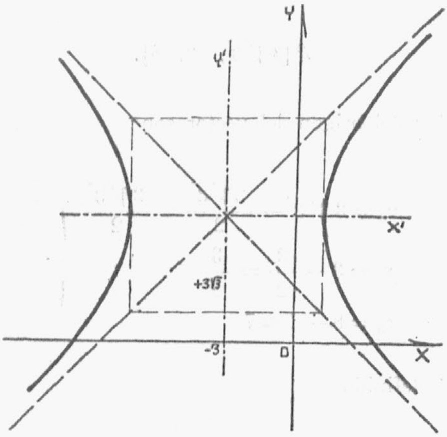
Eliminando el parámetro μ obtenemos la ecuación del lugar.

$$\underline{X^2 - Y^2 + 6X + 6\sqrt{3}\,Y - 2 = 0}$$

Hipérbola — equilátera

Centro $(-3,\ 3\sqrt{3})$.

Ecuación reducida a su centro: $X^2 - Y^2 - 16 = 0$.



Esta hipérbola es la homotética de la (c) razón de la homotecia $\sqrt{2}$ girada un ángulo (+45°) y trasladada $(-3,\ 3\sqrt{3},\ -4)$ cada uno de sus puntos.

FELTRER

287. *Construir las curvas*:

$$\pm \frac{Lx}{Ly} \pm \frac{Ly}{Lx} = 2xy.$$

SOLUCION.—Sea $C_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$ la curva:

$$\varepsilon \frac{Lx}{Ly} + \varepsilon' \frac{Ly}{Lx} = 2xy;$$

representando

$$\left.\begin{matrix} \varepsilon = \pm 1 \\ \varepsilon' = \pm 1 \end{matrix}\right\}.$$

Efectuemos el cambio de variables:

$$X = Lx, \quad Y = Ly,$$

la curva $C_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$ se transforma entonces en la

$$\Gamma_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \equiv \frac{\varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2}{XY} - 2e^{X+Y} = 0.$$

Para pasarlos a paramétricas nos conviene llamar t al cociente $\dfrac{Y}{X}$ y fácilmente se deduce:

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon' t^2}{2t} = e^{X(1+t)}.$$

$$X = \frac{1}{1+t}\, L\frac{\varepsilon + \varepsilon' t^2}{2t}, \quad Y = \frac{t}{1+t}\, L\frac{\varepsilon + \varepsilon' t^2}{2t}.$$

Trazado de las curvas:

Cada una de las C_1^1, C_{-1}^{-1} es simétrica respecto a la primera bisectriz $y-x=0$; la curva C_{-1}^1 es simétrica de la C_1^{-1}, también respecto de la $y-x=0$, correspondiendo los puntos simétricos a los valores inversos de t.

Derivando las expresiones $X=X(t)$ e $Y=Y(t)$ obtenemos:

$$X'_t = \frac{Z}{(1+t)^2}, \qquad Z = \frac{t+1}{t}\,\frac{\varepsilon t^2-\varepsilon}{\varepsilon' t^2+\varepsilon} - L\,\frac{\varepsilon+\varepsilon t^2}{2t},$$

$$Z'_t = \frac{-(t+1)(t^4-4\varepsilon\varepsilon' t^2-1)}{t^2(t^2+\varepsilon\varepsilon')^2},$$

$$Y'_t = \frac{u}{(1+t)^2}, \qquad u = \frac{\varepsilon' t^2-\varepsilon}{\varepsilon' t^2+\varepsilon}(t+1) + L\,\frac{\varepsilon+\varepsilon' t^2}{2t},$$

$$u'_t = \frac{(t+1)(t^4+4\varepsilon\varepsilon' t^2-1)}{(t^2+\varepsilon\varepsilon')^2\, t}.$$

Damos valores a ε y ε':

1.° $\varepsilon=\varepsilon'=1$, $t>0$. Tracemos al arco $0<t<1$

$$X = \frac{1}{1+t}\,L\,\frac{1+t^2}{2t}$$

decrece desde $+\infty$ a 0, siendo cada uno de los factores positivo decreciente

t	0		t_1		1
u'_t		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	min.	$\nearrow$	0

$$Y'_t = \frac{u}{(1+t)^2},$$

$$u = \frac{t^2-1}{t^2+1}(t+1) + L\,\frac{1+t^2}{2t},$$

$$u'_t = \frac{(t+1)(t^4+4t^2-1)}{t(t^2+1)^2}.$$

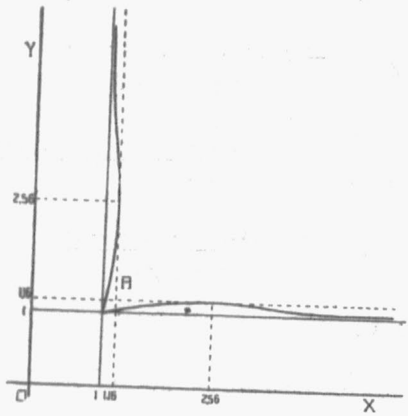
u'_t se anula para $t_1 = \sqrt{\sqrt{5}-2}$;
u se anula para un valor único entre 0 y 1,

$$\alpha \doteq 0{,}17, \qquad X(\alpha) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \doteq 0{,}94,$$

$$Y(\alpha) \doteq 0{,}16, \qquad x(\alpha) \doteq 2{,}56, \qquad y(\alpha) \doteq 1{,}17.$$

Se puede construir ya la curva atendiendo al siguiente cuadro:

t	0		α		1
X	$+\infty$	$\searrow$	$0{,}94$	$\searrow$	0
x	$+\infty$	$\searrow$	$2{,}56$	$\searrow$	1
y	1	$\nearrow$	$1{,}17$	$\searrow$	1
Y	0	$\nearrow$	$0{,}16$	$\searrow$	0
Y'		$+$	0	$-$	



Para precisar la tangente en A (1, 1) se observa que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{Y}\,dY}{e^{X}\,dX} = e^{Y-X}\,\frac{dY}{dX}.$$

En el punto (1, 1)

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{e^{Y}-1}{e^{X}-1} \sim \frac{Y}{X} = t \longrightarrow 1.$$

Luego la tangente en A es OA.

2.° Sean, ahora, $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, $t < 0$, tracemos el arco $-1 < t < 0$.

$$X = \frac{1}{1+t}\,L\,\frac{1+t^2}{-2t}, \qquad Y = \frac{1}{1+t}\,L\,\frac{1+t^2}{-2t},$$

$$X'_t = \frac{z}{(1+t)^2}, \qquad z = \frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{t+1}{t} - L\,\frac{1+t^2}{-2t},$$

t	-1		0
z'_t	0	$+$	
z	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$z'_t = -\frac{(t+1)(t^4-4t^2-1)}{t^2(t^2+1)^2},$$

$$Y'_t = \frac{u}{(1+t)^2}, \qquad u = \frac{t^2-1}{t^2+1}(t+1) + L\frac{1+t^2}{-2t},$$

$$u'_t = \frac{(t+1)(t^4+4t^2-1)}{t(t^2+1)^2},$$

z'_t no se anula para ningún valor comprendido entre 0 y —1. z no se anula para ningún valor entre —1 y 0.

u'_t se anula para $t_2 = -\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

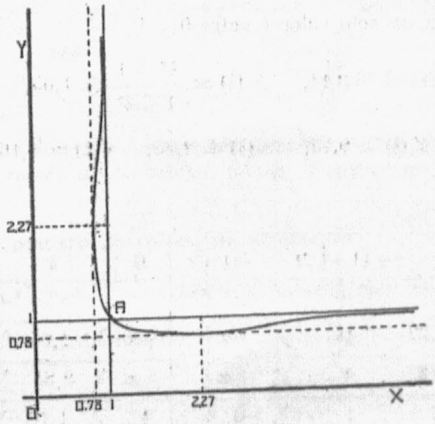
t	-1		t_2		0
u'_t	0	—	0	+	
u	0	↘	mín.	↗	$+\infty$

u se anula para un solo valor β entre —1 y 0.

$$\beta \# -0{,}31, \qquad X(\beta) = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \# 0{,}82,$$

$$Y(\beta) \# -0{,}25,$$

t	-1		β		0
X'			+		
X	0	↗	0,82	↗	$+\infty$
x	1	↗	2,27	↗	$+\infty$
y	1	↘	0,78	↗	1
Y	0	↘	—0,25	↗	0
Y'		—	0	+	



En el punto A (—1, —1), se tiene:

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{e^Y-1}{e^X-1} \sim \frac{X}{Y} = t \to -1;$$

luego la tangente en A es perpendicular a OA

$$3.^{\text{o}} \quad \varepsilon = +1, \qquad \varepsilon' = -1, \qquad X = \frac{1}{1+t}\, L\, \frac{1-t^2}{2t}\,, \qquad Y = X\,t,$$

$$0 < t < 1 \quad \text{y} \quad t < -1\,.$$

$$X'_t = \frac{z}{(1+t)^2}\,, \qquad z = \frac{t^2+1}{t\,(t-1)} - L\,\frac{1-t^2}{2t}\,.$$

$$z'_t = -\,\frac{(t^4+4\,t^2-1)}{t^2\,(t-1)^2\,(t+1)}\,, \qquad Y'_t = \frac{u}{(1+t)^2}\,.$$

$$u = \frac{t^2+1}{t-1} + L\,\frac{1-t^2}{2t}\,, \qquad u'_t = \frac{t^4-4\,t^2-1}{t\,(t-1)^2\,(t+1)}\,,$$

z'_t es nulo para $t_3 = +\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ entre 0 y 1 ; con los datos apuntados podremos establecer el cuadro de valores :

t	$-\infty$		-1	0		t_3		1
z'_t		$+$			$+$	0	$-$	
z	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\nearrow$	máx. <0	$\searrow$	$-\infty$

z se anula para un solo valor γ inferior a -1,

$$\gamma \;\#\; -5, \qquad X(\gamma) = -\frac{\gamma^2+1}{\gamma\,(\gamma^2-1)} \;\#\; -0{,}22,$$

$$Y(\gamma) \;\#\; +1{,}1, \qquad x(\gamma) \;\#\; 0{,}8, \qquad (\gamma) \;\#\; 3;$$

u'_t se anula para un solo valor δ entre 0 y 1

$$\delta \;\#\; 0{,}14, \qquad X(\delta) = \frac{\delta^2+1}{1-\delta^2} \;\#\; 1{,}05,$$

$$Y(\delta) \;\#\; 0{,}15, \qquad x(\delta) \;\#\; 2{,}85, \qquad y(\delta) \;\#\; 1{,}16\,.$$

Resumiendo :

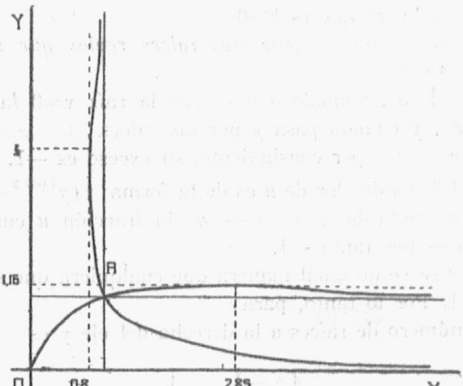
t	$-\infty$		γ	$-(1+\sqrt{2})$		-1	0		δ		$(\sqrt{2}-1)$		1
X'_t		$-$	0	$+$						$-$			
X	0	$\searrow$	$-0{,}22$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$1{,}05$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
x	1	$\searrow$	$0{,}8$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$2{,}85$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
y	$+\infty$	$\searrow$	3	1	$\searrow$	0	1	$\nearrow$	$1{,}16$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
Y	$+\infty$	$\searrow$		0	$\searrow$	$-\infty$	0	$\nearrow$	$0{,}15$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Y'_t		$-$					$+$		0		0	$-$	

En el punto A $(-1, -1)$ se cumple:

para $t = -(1+\sqrt{2})$, $\quad \dfrac{y-1}{x-1} \longrightarrow -(1+\sqrt{2})$ y

para $t = \sqrt{2}-1$, $\quad \dfrac{y-1}{x-1} \longrightarrow \sqrt{2}-1.$

Las tangentes a los dos arcos son, pues, perpendiculares.



En el punto 0 $(t=1)$ la tangente tiene por coeficiente angular

$$\text{lím}\,\frac{y}{x} = \text{lím}\,e^{Y-X},$$

$$Y - X = \frac{t-1}{t+1}\,\alpha\,\frac{1-t^2}{2t} \longrightarrow 0, \qquad \frac{y}{x} \longrightarrow 1,$$

luego la tangente es OA

J. Gallego Diaz

291. *Siendo* a *y* b *reales, demostrar que la ecuación* $z^{4p-1} + az + b = 0$ *tiene* 2p *o* 2p—1 *raices a la derecha del eje* Y *según que* b *sea positivo o negativo.*

Solucion.—El número de raíces, de la ecuación

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

de coeficientes reales, contenidas en el semiplano $x > 0$ es

$$r = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\,\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{E}}}\,\frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)},$$

siendo

$$\varphi_1(y) = a_1 y^{n-1} - a_3 y^{n-3} + a_5 y^{n-5} - \ldots\ldots$$

$$\varphi(y) = a_0 y^n - a_2 y^{n-2} + a_4 y^{n-4} - \ldots\ldots$$

En el caso propuesto es $\varphi_1(y) = -b$, $\varphi(y) = y^{4p-1} - a\,y$; es decir,

$$r = \frac{4p-1}{2} - \frac{1}{2} \mathop{\mathrm{E}}_{-\infty}^{+\infty} \frac{-b}{y^{4p-1} - a\,y}.$$

Calculemos el exceso directamente, por la definición. El denominador de la fracción $a = \dfrac{-b}{y^{4p-1} - a\,y}$ puede escribirse en la forma $y\;(y^{4p-2} - a)$.

Supongamos primero que es $b > 0$

Si $a > 0$, el denominador tiene tres raíces reales que son $y = 0$, $y = \pm\alpha$, siendo $|\alpha| = \sqrt[4p-2]{a}$. Cuando y pasa por la raíz $y=0$ la fracción u pasa de $-\infty$ a $+\infty$, y cuando pasa y por las raíces $y = \pm\alpha$, pasa la fracción de $+\infty$ a $-\infty$; por consiguiente, su exceso es -1.

Si es $a < 0$ el denominador de u es de la forma $y\,(y^{4p-2} + a)$ con la única raíz real $y=0$ pasando de $+\infty$ a $-\infty$ la fracción u cuando y pasa por ella. El exceso es por tanto -1.

Si fuese $b < 0$ se ve de igual manera que cualquiera que sea el signo de a el exceso es $+1$. Por lo tanto, para

$b > 0$ el número de raíces a la derecha del eje y es

$$r = \frac{4p-1}{2} + \frac{1}{2} = 2p,$$

y para $b < 0$ el número de raíces a la derecha del eje y es

$$r = \frac{4p-1}{2} - \frac{1}{2} = 2p - 1.$$

JOSE M.ª ARREDONDO

322. *¿Existe un punto tal que sus proyecciones sobre las generatrices de un mismo sistema de un paraboloide, estén alineados?*

SOLUCION.—Sea el paraboloide hiperbólico:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x,$$

cuyos dos sistemas de generatrices son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= \frac{1}{K} \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= 2Kx \end{aligned}\right\}\ (1) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= \frac{2x}{m} \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= m. \end{aligned}\right\}\ (2)$$

Sea $P\,(\alpha, \beta, \gamma)$ el punto buscado, si el sistema escogido es (1) una de las generatrices del sistema (2) será la recta sobre la cual estén alineados todos los pies de las perpendiculares trazadas por P; las coordenadas de este pie son:

$$x_1 = \frac{m}{2K}, \quad y_1 = \frac{(1+Km)\,b}{2K}, \quad z_1 = \frac{(1-Km)\,c}{2K}.$$

Expresando que es el punto de corte de las generatrices del sistema (1) con el plano ortogonal a las mismas trazado por P:

$$\frac{1}{2K}(x-\alpha) + \frac{b}{2}(y-\beta) - \frac{c}{2}(z-\gamma) = 0,$$

se tiene:

$$\frac{1}{2K}\left(\frac{m}{2K} - \alpha\right) + \frac{b}{2}\left[\frac{(1+Km)\,b}{2K} - \beta\right] - \frac{c}{2}\left[\frac{(1-Km)\,c}{2K} - \gamma\right] = 0,$$

o sea quitando denominadores y ordenando:

$$[(b^2+c^2)\,m - 2\,(c\,\gamma - b\,\beta)]\,K^2 - [b^2 - 2\,\alpha - c^2]\,K + m = 0.$$

Como es un polinomio idénticamente nulo en K, igualando a cero los coeficientes se tiene:

$$(b^2+c^2)\,m - 2\,(c\,\gamma - b\,\beta) = 0,$$

$$b^2 - 2\,\alpha - c^2 = 0,$$

$$m = 0;$$

por la tanto, llamando X, Y, Z a la coordenadas del lugar, éste es:

$$\text{Recta} \begin{cases} c\,Z - b\,Y = 0, \\ b^2 - 2\,X - c^2 = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación es el plano de Monge.

E. Feltrer

Otra solucion.—Sean g_i las generatrices del sistema considerado, π plano director de este sistema, X un punto que suponemos es solución de la cuestión, X' su proyección ortogonal sobre π. Si una recta l, necesariamente generatriz del otro sistema, es lugar de puntos G_i pies de las perpendiculares por X a las generatrices g_i las proyecciones ortogonales G'_i sobre π de los puntos G_i serán puntos de una recta l' podaria de X' respecto de la parábola φ que envuelve las proyecciones g'_i sobre π de las generatrices. Pero la podaria se reduce a una recta sólo cuando el punto X' es foco de una parábola φ, siendo entonces la podaria l' la tangente en el vértice de φ, luego sólo pueden ser soluciones los puntos X situados en la recta perpendicular al plano director trazada por el foco de la parábola de contorno. Recíprocamente, todo punto X de esta recta r es solución de la cuestión, pues el plano ortogonal a π trazado por la tangente l' en el vértice de la parábola φ, contiene una generatriz l del paraboloide que corta a las g_i en puntos G_i, que unidos con uno X de r dan rectas ortogonales a las g_i, por ser $X'G'_i$ ortogonal a g'_i y las g_i y g'_i son paralelas.

P. Droch

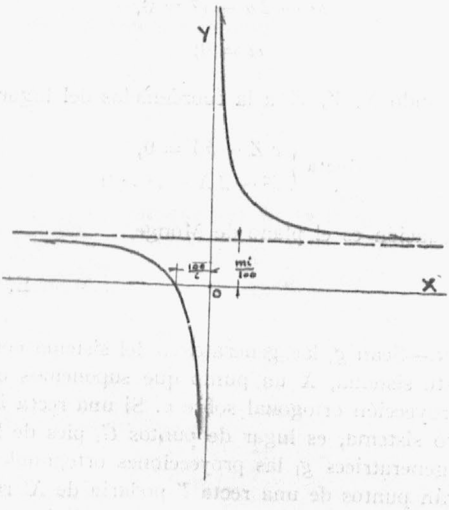
326. *Un capitalista presta una cierta cantidad para reintegrar en cuotas anuales cada una de las cuales es la* p*—sima parte del capital, más sus intereses simples totales en los* p *años al tanto por ciento* i. *Cada cuota recibida la coloca en las mismas condiciones, y así indefinidamente. Calcular el capital acumulado al cabo de* n *años y el tanto por ciento efectivo que obtiene de renta. Estudiar la variación de ésta en función de* p.

Solucion.—Cada cuota anual vale:

$$\frac{c}{p}\left(1+\frac{p\,i}{100}\right);$$

la suma total de todas las anualidades más sus intereses es:

$$A=\frac{c}{p}\left(1+\frac{p\,i}{100}\right)\left[n+\frac{n\,(n-1)}{200}\,i\right].$$



El tanto por ciento efectivo, supuesto el capital colocado a interés simple:

$$A=c\left(1+\frac{n\,Y}{100}\right);$$

de donde:

$$Y=\frac{100}{c\,n}\,(A-c).$$

Estudiando la variación de Y en función de P, llamando m a la cantidad determinada,

$$\left[\frac{100}{n}(n-1)+\frac{i(n-1)}{2}\right]=m,$$

$$Y=\frac{m(100+p\,i)}{100\,p}.$$

Que representa una hipérbola equilátera.

E Feltrer

327. *Dadas las curvas* $y=x-be^{\frac{x}{a}}$, *considérese la figura limitada por las dos ordenadas correspondientes a las abcisas* x *y* x+h *la curva, y el eje* x. *¿ Para qué valor de* x *será máxima el área de esta figura?* (h *es un valor constante.*

Solucion.—El área llamando z a la variable de integración es

$$A=\int_x^{x+h}\left(z-b\,e^{\frac{z}{a}}\right)dz; \text{ de donde: } A'=z-b\,e^{\frac{z}{a}}\Big|_x^{x+h}=h+b\,e^{\frac{x}{a}}\left(1-e^{\frac{h}{a}}\right)=0;$$

o sea,

$$h=b\left(e^{\frac{h}{a}}-1\right)e^{\frac{x}{a}}; \text{ de donde: } e^{\frac{x}{a}}=\frac{h}{b\left(e^{\frac{h}{a}}-1\right)},$$

luego $x=l\dfrac{h^a}{b^a\left(e^{\frac{z}{a}}-1\right)^a}$ se trata de un máximo, pues

$$A''=-\frac{b}{a^2}\int_x^{x+h}e^{\frac{z}{a}}\,dz=-\frac{b}{a}\,e^{\frac{x}{a}}\left(e^{\frac{h}{a}}-1\right)$$

es evidentemente negativa

Jose M.ª Arredondo

Otras soluciones de los Sres. Feltrer, Miguel A. Hacar, J. García Rives y A. G. M.

329. *Sumar la serie* $\sum_1^\infty \dfrac{1}{n(n+1)^2}$.

Solucion.

$$\frac{1}{n(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

La serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es absolutamente convergente y lo mismo la $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$, luego

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \left[\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) - 1\right] = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Nota.—La serie $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ es una serie hipergeométrica. Véase *Elementos de Análisis Algebraico,* de Rey Pastor, núm. 350.

Jose M.ª Arredondo

331. *Se considera un polígono convexo y luego, el del mismo número de lados, obtenido del precedente al unir los puntos medios de sus lados; aplicando sucesivamente este proceso, se obtiene una sucesión de polígonos. Demostrar que esta sucesión tiende a un punto.*

Solucion.—Supongamos que los vértices del polígono convexo considerado son los puntos $A_1, A_2, \ldots A_n$, afijos de los números complejos: $a_1, a_2 \ldots a_n$, respectivamente.

$B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ son los vértices del primer polígono obtenido, siendo los afijos de los complejos

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \ \ldots\ldots, \ b_n = \frac{a_n + a_1}{2}.$$

Análogamente, los vértices del polígono siguiente serán $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$, que representarán los afijos de los complejos $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$, tales que

$$c_k = \frac{b_k + b_{k+1}}{2}.$$

Vamos a demostrar que dicha sucesión tiende a un punto: el centro de distancias medias de los n vértices del polígono primitivo.

Tenemos:

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \quad c_1 = \frac{b_1 + b_2}{2}; \quad \text{o sea:} \quad c_1 = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{4};$$

o sustituyendo los exponentes por índices:

$$c_1 = \frac{a\,(1 + a)^2}{2^2}.$$

Asimismo obtenemos:

$$c_2 = \frac{a^2\,(1 + a)^2}{2^2}.$$

Admitiendo que esta ley es cierta al cabo de $p-1$ operaciones, demostraremos que también lo es para la p.

Con efecto: al ser

$$k_1 = \frac{a\,(1+a)^{p-1}}{2^{p-1}}\,, \qquad k_2 = \frac{a^2\,(1+a)^{p-1}}{2^{p-1}}\,;$$

se verificará que:

$$l_1 = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{a\,(1+a)^p}{2^p} \qquad (1)$$

y análogamente:

$$l_2 = \frac{a^2\,(1+a)^p}{2^p}\,,$$

y así sucesivamente.

Desarrollando (1)

$$l_1 = \frac{a_1 + c_p^1\,a_2 + c_p^2\,a_3 + \ldots\ldots + c_p^k\,a_{k+1} + \ldots\ldots}{2^p}\,;$$

y teniendo en cuenta que si llamamos

$$A_{n+1} = A_1\,, \quad A_{n+2} = A_2\,\ldots\ldots$$

será también

$$a_{n+1} = a_1\,, \quad a_{n+2} = a_2\,\ldots\ldots,$$

$$l_1 = \frac{a_1\,(1 + c_p^n + c_p^{2n} + \ldots\ldots) + a_2\,(c_p^1 + c_p^{n+1} + c_p^{2n+1} + \ldots\ldots) + \ldots\ldots}{2^p}\,.$$

Para calcular los paréntesis, seguiremos el procedimiento clásico, desarrollando $(1+x)^p$. Así

$$(1+x)^p \equiv 1 + c_p^1\,x + c_p^2\,x^2 + \ldots\ldots + c_p^n\,x^n + \ldots\ldots$$

y sustituyamos aquí x por una raíz cualquiera de la ecuación binomia;

$$x^n = 1, \quad \varepsilon; \quad \text{es decir,} \quad d: x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}\,.$$

$$1 + x = 2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{n}\right) = 2\cos\frac{k\pi}{n}\,e^{\frac{ipk\pi}{n}}\,,$$

y por consiguiente:

$$(1+x)^p = 2^p\cos^p\frac{k\pi}{n}\,e^{\frac{ipk\pi}{n}}\,.$$

Excepto para $K=0$, el factor de 2^p tiende a 0 cuando p crece indefinidamente. Ahora bien: si sustituimos x por todas las raíces de la ecuación binomia $x^n=1$ y sumamos todos los resultados obtenidos, tendremos:

$$n(1 + c_p^n + c_p^{2n} + \ldots\ldots) = \Sigma (1 + x)^p,$$

$$n \frac{1 + c_p^n + c_p^{2n} + \ldots\ldots}{2^p} = \frac{\Sigma (1 + x)^p}{2^p}.$$

Pero por lo que hemos dicho antes, excepto el término del 2.º miembro que corresponde a $K=0$ y que es igual a la unidad, los demás tienden a cero cuando p a infinito, y por lo tanto

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1 + c_p^n + c_p^{2n} + \ldots\ldots}{2^p} = \frac{1}{n}.$$

como análogamente se demuestra para las demás sumas resulta que el número l_1 tiene, pues, por límite $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$; es decir, el centro de distancias medias del conjunto de los vértices del polígono dado.

GALLEGO-DIAZ

Madrid, marzo 1937.

Otras soluciones de los señores Arredondo, Hacar y García Rives.

374. *Estudiar la serie*

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \ldots\ldots,$$

en la cual a cada grupo de k *términos positivos sigue otro de* k+1 *negativos, y a cada grupo de términos negativos sigue otro de positivos con el mismo número de sumandos.*

SOLUCION.—Consideremos las sumas de p sumandos

$$\sigma'_p = \frac{1}{(p-1)p} + \frac{1}{(p-1)p+1} + \frac{1}{(p-1)p+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{p^2-1};$$

$$\sigma''_p = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{2+1}} + \frac{1}{p^{2+2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{p(p+1)-1};$$

evidentemente

$$\sigma'_p > \sigma''_p \geqslant \sigma'_{p+1} > \sigma''_{p+1};$$

además

$$\sigma'_p < \frac{p}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1}, \quad \text{y,} \quad \sigma''_p > \frac{p}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1}.$$

De aquí

$$\sigma'_p - \sigma''_p < \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}.$$

La suma de los $p(p+1)-1$ primeros términos de la serie considerada, se puede expresar por

$$S_{p(p+1)-1} = S'_p = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) - \ldots\ldots - \left(\frac{1}{p(p-1)} + \ldots\ldots + \frac{1}{p^2-1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{p^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{p(p+1)-1}\right) = 1 - \sigma'_2 + \sigma''_2 - \sigma'_3 + \sigma''_3 - \ldots\ldots - \sigma'_p + \sigma''_p.$$

Sea n un número entero superior a $p(p+1)-1$; por consiguiente existe un k tal que $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$, siendo $k \geqslant p$. La serie considerada será convergente si $|S_n - S'_p|$ es tan pequeña como se quiera, tomando p suficientemente grande, cualquiera que sea $n > p(p+1)-1$. Consideremos los dos casos: n puede ser menor o mayor que $k(k+1)$.

$a)$ $$k^2 \leqq n \leqq k(k+1); \qquad d = n - k^2 \leqq k.$$

Entonces,

$$S'_p - S_n = \sigma'_{p+1} - \sigma''_{p+1} + \ldots\ldots + \sigma'_k - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots\ldots^{d)}\right) < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{2}{p},$$

cualquiera que sea n.

$b)$ $$k(k+1) < n < (k+1)^2; \qquad d = n - k(k+1) < k.$$

Entonces,

$$S'_p - S_n = \sigma'_{p+1} - \sigma''_{p+1} + \ldots\ldots + \sigma'_k - \sigma''_k + \left(\frac{1}{k(k+1)} + \ldots\ldots^{d)}\right) < \frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} +$$

$$+ \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{k} < \frac{2}{p}.$$

Luego en cualquier caso es

$$|S_r - S_{p(p+1)-1}| < \frac{2}{p},$$

cualquiera que sea $n > p^2+p-1$. La serie de que se trata es convergente.

Su suma es por defecto y con un error menor que $\frac{1}{10^5}$

$$S \simeq 0{,}58355.$$

R. Merino