LA GEOMETRIA PROYECTIVA EN LA PRIMERA MITAD DEL SIGLO XIX: SIGNIFICACION DEL PRINCIPIO DE DUALIDAD.

Mario H.Otero García
U N A M

Creemos que se imponen dos constataciones :

Los hitos del proceso de transformación de la geometría, en el siglo XIX no han sido esclarecidos suficientemente todavía. Por más que el Hilbert de 1899 sea paradigmático (se trata de una hipótesis apoyada por elementos de prueba indudables), la concepción de la geometría correspondiente no estaba todavía impuesta en ese momento o por lo menos no lo estaba en el pensamiento de destacados filósofos de la geometría (y destacadísimos científicos), como lo fueron,Frege y Russell. Pues el Kantismo sobrevivía a sus mismas cenizas. Es cierto que podría pensarse al respecto en un decalage entre geometría y filosofía de la geometría, y afirmar un retraso de la segunda respecto al desarrollo de la primera. Nos inclinaremos en ese sentido.Pero de todos modos es necesario tener clara la diferencia entre esos dos tipós de dominancia, para con pleno sentido poder indicar cuándo en uno y otro aspecto se produce un giro fundamental o giros significativos. En geometría, aunque no necesariamente en la filosofía que de ella se difunde, estaría pues ya en Hilbert-99 "sancionada oficialmente"(Lolli) la transformación de la geometría, y esta es nuestra primera hipótesis.

2.3.Una segunda hipótesis sobre el proceso que se cumple a lo largo del siglo XIX, la de que se dan una serie de hitos muy significativos que es necesario elucidar,podría parecer trivial. Sin embargo ella se opone a la idea de una evolución más o menos contínua y también a la de un único momento crucial en que se cumpliría, de golpe, el proceso a que estamos refiriendo.

Vamos a proponer un esquema extremadamente general que nos sirva de base para concretar esa segunda hipótesis, aunque todavía sin referencias temporales ni nominales. El cambio de una geometría física, de contenido, que presupone al espacio o la extensión como objeto de la disciplina, hacia otra o la extensión como objeto de la disciplina, hacia otra en la cual las estructuras adquieren calidad temática, cambio en el cual los pasos deductivos en la construcción de la geometría logran preponderáncia sobre los momentos intuitivos, sería la línea básica del esquema.

Ese proceso que podría llamarse abstracción creciente (a saltos) "lleva más tarde hacia" Hilbert-99, a través de una especial elaboración en tres aspectos: a) el rigor (bien claro en el desarrollo del análisis y del álgebra pero también señalable en geometría), b) la fundamentación interteórica (entre ramas "distintas" de las matemáticas), y c) la axiomatización, con sus correlatos, comienzo de formacilzación por un lado, y aparición de elementos de análisis matemático, por otro. Cómo se dieron históricamente es otra historia. Si bien esta visión es esquemática, y algo ingenua, sobre todo visto el desarrollo reciente de la historiografía, de todos modos nos puede servir de base como esquema plausible para considerar el tema específico del aporte de la geometría proyectiva de comienzos del siglo XIX al proceso total de desarrollo de la matemática.

3. El período principal que nos interesa se extiende desde 1822, fecha de publicación del Tratado de Poncelet (es decir la fecha del acabamiento de la primer fase de la geometría proyectiva) hasta 1847, que marca el momento en que von Staud produce una geometría no-métrica cual era la vocación de los desarrollos anteriores. Pero nos interesan también los períodos comprendidos entre esa fecha y 1867, el de 1867-1872, y en menor medida el subsiguiente hasta Hilbert, a efectos comparativos.

Y dentro de ellos se dan fenómenos que podríamos llamar de producción inicial, de difusión, de trabajo elaborativo y de integración, a los que subyace la aludida transformación en el objeto de la geometría, que en definitiva queremos ver en qué consiste.

Durante el período que va desde 1829 hasta 1867 (la obra de Lobatchevski es de 1829 y la de Bolyai de 1832) las geometrías no euclidianas han sido constituidas inicialmente pero no han producido efectos significativos. Es bien sabido que la sifusión de esas geometrías comienza alrededor de 1867 y difusión quiere decir consitución de una tradición sostenida de trabajo en las mismas. Las traducciones alemana, francesa (Houel),italiana e inglesa, y el trabajo capital en ese sentido de Beltrami, se sitúan recién en ese momento, es decir casi cuarenta años después de la producción original, por causas que son hoy bastante bien conocidas y que resulta innecesario repetir. Si bien es cierto que posteriormente aparecen los trabajos fundamentales de Tiemann sólo la obra de difusión y elaboración de Helmholtz y los textos anteriores señalados inician la tradición indicada. El trabajo propiamente dicho comienza recién entonces (1867). Pero, apenas unos cinco años después, Klein en su programa de Erlangen (sobre la base del trabajo de 1859 de Cayley) produce ya la integración de las geometrías no-euclídeas con la geometría proyectiva, de modo que ambos tipos de geometría ya no poseerán desde ese momento desarrollos teóricamente independientes (por más que esto posea limitaciones en sus efectos). De modo que, como base plausible de comparación entre el trabajo independiente de la geometría proyectiva y el de las no euclidianas, deberían tomarse, con exclusión del trabajo de Riemann (que posee también efectos diferidos), lo producido en casi cuarenta años por un lado frente a apenas unos cinco por el otro. Esto que podría aparecer grueso se da sin embargo en sus grandes líneas así, por efecto de los fenómenos de difusión científica y de las condiciones de ésta. Entonces, con el fin de ver en qué medida la geometría proyectiva de la priemra mitad del siglo contribuyó a la transformación de la matemática y en qué medida lo hicieron las geometrías no euclidianas, sería válido en principio considerar cuál fue el resultado de la producción geométrica en la primera durante justamente el casi medio siglo que va de 1822 a 1867; es decir qué resultados logró, qué métodos utilizó, y cómo varió, en las propias obras científicas, la concepción de la geometría.

Si se pudiera constatar que en ese período se produce un cambio(o cambios) muy significativos (s), habría que explicar, entre otras cosas, por qué la geometría proyectiva no tuvo sus beocios como los anunció Gauss, con visión predictiva adecuada,para las geometrías no-euclídeas. Los beocios no sólo actuaron como elemento de resistencia -extra-científica, filosófica, fundamentalmente-,sino que contribuyeron en no poca medida a poner a las geometrías no euclídeas en el centro de la consideración epistemológica. Por otra parte Lotze y otros beocios sólo comenzaron a protestar tardíamente. Pero habría que ver además por qué entonces la geometría proyectiva no apareció como revolucionaria. Ver en especial si los elementos que ya habrán estallado en Hilbert-99 aparecen de un modo u otro en aquella geometría proyectiva. Y si esto parece exagerado, sería cuestión de ver cuáles de los elementos, aunque necesariamente no todos , de los que constituyen la gran transformación referida, se encuentran en forma implícita o patente en la geometría proyectiva del segundo cuarto del siglo entre Poncelet y Staudt. Pues resulta por demás curioso que la tradición espistemológica haya privilegiado retrospectivamente un momento del desarrollo de la geometría en detrimento de otro cuya significación se nos aparece hoy bajo nueva luz.

4. No voy a trazar aquí la historia de la geometría proyectiva en algunas líneas ni en muchas. Ello está bien hecho ya en sus aspectos fundamentales, aunque falta una puesta al día reciente: Desargues y Pascal, Monge y Brianchon, entre algunos otros han aportado decisivamente, los elementos de base en dos períodos distintos. Voy a dar por supuesto también que Poncelet, con su Tratado, que marca el principio del período que nos interesa (sobre todo 1822-1847), ha presentado magníficamente la disciplina en su conjunto. Voy en cambio a referirme puntualmente a algunos aspectos que resultan

pertinentes para el tema del título. Los principales a mi entender son: el gradual surgimiento de métodos, en geometría, el uso de un nuevo lenguaje con su creatividad propia, la introducción del principio de dualidad y el carácter básicamente no-métrico de la geometría proyectiva. Vayamos por partes.

4.1. Como es bien sabido, el período inicial, con Desargues como figura central, es sucedido por un siglo vacio. El dominio de la geometría analítica durante ese siglo es prácticamente total. Cuando la geometría proyectiva se constituye en disciplina, es la geometría sintética que renace, pero los procedimientos utilizados para ello son a veces analíticos, a veces sintéticos, a menudo mixtos, como los llamara luego Chasles . Aún la presentación fundamentalmente sintética de las meditaciones de Saratov recubren un conjunto de búsquedas analíticas, lo que no se revelaba en el Tratado, como bien surge de los Cuadernos de Poncelet, publicados con mucho retraso. Pero sea una u otra la vía de construcción lo que predomina, lo que sucede es la búsqueda de métodos para la geometría sintética que superen el camino azaroso de descubrimientos típico de la geometría griega y tradicional, y que produzcan resultados de la manera en que justamente son producidos en geometría analítica.

Los métodos que van a utilizarse son variados, a veces muy discutidos como el principio de continuidad, o usados generalizadamente como el de polos y polares. De ese modo se trata más que de enunciar teoremas aislados de generar demostraciones de los mismos o de los que la tradición transmite; se trata de encontrar vías para hacerlo de una manera menos fortuita dentro de una disciplina que en principio poseía otros paradigmas. Y no sólo se da en el caso de la racionalidad euclídea, de los métodos que hoy sabemos que tuvieron sus frutos y su trasmisión en el trabajo continuado, sino aún en otros que quedaron de lado por diferentes motivos; es el caso de los de la escuela napolitana de geometría y en especial de los métodos de Fergola.

En la geometría sintética, o de vocación sintética (recordemos a Steiner forzando la recontrucción sintética pura), esta búsqueda de métodos de trabajo no es independiente de otras características determinantes. Es de por sí, como vemos, un síntoma de la influencia del modelo de construcción de la geometría analítica sobre una geometría que avanzaba de modo totalmente distinto.

4.2.El segundo aspecto a señalar posee una más larga historia. El uso de puntos impropios y de otros elementos impropios, historia (cuyas vicisitudes han sido estudiadas en su detalle), implica llamar "punto" a algo diferente a lo que designaba con anterioridad esa palabra. La creación de lenguaje que ello importa, la generalidad que introduce y las consecuencias a que da lugar son facetas de la revolución incruenta, tranquila, poco espectacular, que toda la geometría proyectiva en su conjunto conlleva.

Ya la geometría analítica, geometría física si las hay, llamaba punto a un par ordenado de números, algo poco tradicional, y al hacerlo tenía consecuencias inesperadas. La ecuación de la recta permitía encarar intersecciones de rectas (mediante la solución de un sistema de ecuaciones), pero a la vez considerar otras cosas: rectas paralelas (por la solución imposible del sistema de ecuaciones correspondiente) y rectas coincidentes. El lenguaje así creado respondía por un lado a los nuevos conceptos introducidos pero, por otro, dió lugar a consecuencias no tradicionales, con sus efectos correspondientes.

De mismo modo, los elementos impropios dan lugar, en la geometría proyectiva, a un lenguaje nuevo con un rendimiento teórico distinto al del lenguaje y al de los conceptos anteriores. Esto, que podría parecer trivial, constituye una característica determinante de las nuevas geometrías. En la geometría proyectiva todas las rectas se cortan en el plano, todos los planos se cortan en el espacio. Se trata de una geometría distinta, radicalmente distinta a la anterior. Por qué no apareció como revolucionaria, es un hecho a explicar. Sin embargo no todas las consecuencias de la nueva conceptuación y del nuevo lenguaje aparecen explícitas desde el comienzo. Avancemos desde ya la afirmación de que se trata en principio de una geometría no física (que ella tenga que ver con la perspectiva y sus leyes es otra historia): tanto la geometría de los Elementos euclídeos como la cartesiana eran físicas, y toda la geometría -salvo justamente la proyectiva- lo va a ser por un buen período.

4.3. El aspecto central que queremos nuevamente aquí es el de la dualidad y sus consecuencias. Hay por lo menos tres temas de interés a su respecto que se podría encarar : 1) el del descubrimiento , 2) el de la demostración de un enunciado de la "ley" de dualidad, 3) el de su sentido. Me limitaré al tercero. Si bien por un lado la polémica entre Poncelet, Gergonne y Plücker es todo un tema (de precedencia en el descubrimiento), no lo voy a enfrentar aquí (Nuvoli). Si bien el tema de la demostración ha dado lugar a un conjunto de desarrollos bien interesantes, tampoco es ese nuestro objeto.

Vamos a dar por supuesto que Poncelet hace uso de la dualidad a propósito de un conjunto de propiedades, en base a la relación entre polos y polares (es decir en una forma particular de relaciones); que Gergonne enuncia un principio de dualidad de modo general (introduciendo la escritura de columnas paralelas), atribuyéndole al principio un status a priori, y sin preocuparse por la demostración de sus propuestas generales.

La gradual introducción de elementos impropios, el uso de la polaridad, la relativa prescindencia de aspectos métricos y el estudio de los poliedros (la discusión de la propiedad de Euler) dan lugar a la aparición entre 1810 y 1830 del concepto de dualidad en la geometría proyectiva moderna. Me parece determinante de esta introducción lo que hemos llamado nueva conceptuación y por consiguiente, la creación de un nuevo lenguaje. El rendimiento teórico de ambos se expresa entonces en la dualidad de la geometría proyectiva y en sus consecuencias.

4.3.1.El principio de dualidad, como "verdad absoluta", encierra dos proposiciones.

"En géometrie plane, lorsqu'un theorème independant de toutes relations métriques d'angles et de longueurs se trouve demontré, on peut conclure inmediatement, et sans qu'il soit besoin de demonstration, un autre theorème, dans lequel les points du premier seront remplacés par des droites et les droites par des points. En géometrie a trois dimensions, lorsqu'un theorème independant de toutes relations metriques d'angles et de longueurs se trouve demontré, on peut en conclure inmediatement, et sans qu'il soit besoin de demonstration, un autre theorème, dans lequel les points du premier seront remplacés para des plans et les plans par de points, les droites restant en meme nombre dans les deux theorèmes".

En Gergonne es bien claro que el principio está determinado por la independencia de propiedades métricas e implícitamente por la introducción de elementos impropios.

Debemos con todo señalar otros dos aspectos que ya están en Gergonne. En primer lugar la creciente importancia de la deducción en el uso del principio, por más que sea remota aún una presentación axiomática que permita dar a la dualidad su lugar sistemático. Si bien en sus escritos metodológicos (1809) ya daba una idea clara de la construcción de los sistemas deductivos, Gergonne no se molesta en disponer sus proposiciones en geometría proyectiva, de una manera sistemática estricta de acuerdo con ellos. Con todo, en sus Considerations... Gergonne procede a partir de "Nociones primitivas" hacia teoremas de cierto grado de complicación . Gergonne ve bien claro -cosa acorde con el ideal metódico de Poncelet-,que no se trata de lograr una cosecha de teoremas aislados; el principio de dualidad da entonces una herramienta metódica.

En segundo lugar, y esto es ya claro desde Gergonne, pero se van a acentuar en las sucesivas versiones de la dualidad que fueron apareciendo por lo menos hasta el fin del siglo, los enunciados que se dan del principio incluyen, nada veladamente, consideraciones matemáticas, u otras que adquieren, en algunos casos, un carácter metamatemático indudable.

Sabemos bien que sólo a partir de cierto momento y especialmente a partir de sistemas axiomáticos de tendencia formalizante se plantean problemas metamatemáticos en forma rigurosa y generalizada, en especial los de consistencia y completitud. Pero ya algunas formas de enunciar el principio de dualidad se refieren a conjuntos de teoremas como tema : "si es demostrable el conjunto C de teoremas, es demostrable el conjunto C´de duales de los de C; si A es un axioma, su dual también lo es; si se pone una demostración de un teorema T, conformada por un conjunto de pasos, la demostración del dual T´estará formado por pasos que son respectivamente los duales de aquellos".

Todo esto está dicho ya en Gergonne y si su "metamatemática" es apenas un esbozo respecto a las que conocemos hoy, de todas maneras no se limita a la utilización de términos en el metalenguaje sino que procede a considerar la deducción en su conjunto, y en sus pasos, de ese modo. El carácter metamatemático pre-axiomático está bien definido y da todo lo que puede dar en esa etapa.

Pero es necesario ver además en qué sentido el principio de dualidad marca el abandono de una geometría física, dentro de un proceso complejo pero indudable hacia la contrucción de una geometría abastracta.

4.4.1. La tendencia a buscar métodos aún en geometría sintética, la creación de conceptos (elementos impropios) y de un lenguaje también nuevo, con sus virtualidades, la utilización de un principio, entre otros, de dualidad, con las características señaladas, son aspectos complementarios por el desarrollo no-métrico, por parte de von Staudt, de una geometría proyectiva que ha sido llamado purista; todo ello en el período que se cierra en 1847, y configura en su conjunto una producción matemática notable. Además, si como hemos dicho, la geometría proyectiva tenía una vocación no-métrica, y de hecho recogía las propiedades no-métricas, sin embargo la intervención de la relación armónica iba en contra de esa tendencia. Por ello cuando van Staudt da un procedimiento exclusivamente sintético, por medio de coordenadas homogéneas, de construir "la quarta", se valida, de hecho, hacia atrás, toda la tendencia indicada. No hay de todos modos necesidad de atribuir a la geometría proyectiva anterior a von Staudt el carácter purista que con él adquiere, porque los otros elementos que le pertenecen configuran ya un logro de magnitud insoslayable. Entonces , de 1822 a 1847 se asiste a un desarrollo de la geometría proyectiva, algunos de cuyos elementos hemos apuntado, que no tiene igual.

Se ha afirmado (Lolli) que, con los Grundlagen der Geometrie, Hilbert dió, por lo menos para la geometría, la sanción oficial a la transformación de la matemática en lo que ha sido entonces. Démoslo por supuesto.

Por otra parte, es un lugar común el afirmar la centralidad de las geometrías no euclidianas en el proceso de esa transformación. Como consecuencia de las exageraciones en este sentido se ha llegado a decir, con toda razón, que las geometrías no euclidianas son la tate à la crème des epistemologues.

Lejos de desconocer el aporte singular que ellas presentan, argumentamos aquí en contra de esa centralidad.

5. Los caracteres que hemos señalado para la geometría proyectiva en el período considerado (preferencia por un enfoque metódico aun en su faz sintética, introducción elaborada de elementos impropios, estudio de propiedades no-métricas, uso amplio de la dualidad) la sitúan en un lugar destacado del desarrollo de la geometría que

tos complementarios por el desarrollo no-métrico, por parte de von Staudt, de una geometría proyectiva que ha sido llamado purista; todo ello en el período que se cierra en 1847, y configura en su conjunto una producción matemática notable. Además, si como hemos dicho, la geometría proyectiva tenía una vocación no-métrica, y de hecho recogía las propiedades no-métricas, sin embargo la intervención de la relación armónica iba en contra de esa tendencia. Por ello cuando van Staudt da un procedimiento exclusivamente sintético, por medio de coordenadas homogéneas, de construir "la quarta", se valida, de hecho, hacia atrás, toda la tendencia indicada. No hay de todos modos necesidad de atribuir a la geometría proyectiva anterior a von Staudt el carácter purista que con él adquiere, porque los otros elementos que le pertenecen configuran ya un logro de magnitud insoslayable. Entonces , de 1822 a 1847 se asiste a un desarrollo de la geometría proyectiva, algunos de cuyos elementos hemos apuntado, que no tiene igual.

Se ha afirmado (Lolli) que, con los Grundlagen der Geometrie, Hilbert dió, por lo menos para la geometría, la sanción oficial a la transformación de la matemática en lo que ha sido entonces. Démoslo por supuesto.

Por otra parte, es un lugar común el afirmar la centralidad de las geometrías no euclidianas en el proceso de esa transformación. Como consecuencia de las exageraciones en este sentido se ha llegado a decir, con toda razón, que las geometrías no euclidianas son la tate à la crème des epistemologues.

Lejos de desconocer el aporte singular que ellas presentan, argumentamos aquí en contra de esa centralidad.

5.Los caracteres que hemos señalado para la geometría proyectiva en el período considerado (preferencia por un enfoque metódico aún en su faz sintética, introducción elaborada de elementos impropios, estudio de propiedades no-métricas, uso amplio de la dualidad) la sitúan en un lugar destacado del desarrollo de la geometría que culminaría con Hilbert-99. Si bien la geometría proyectiva pertenece al período pre-axiomático (por más que M.Pasch haya formulado para ella, luego, una de las primeras axiomáticas modernas),se esbozan en su elaboración formas de producir geometría totalmente originales. Esto se produce de manera temprana y con una continuidad que no se da en otros casos.

Como hemos apuntado se trata de una geometría no física en el sentido en que eran física tanto la clásica euclídea como la geometría analítica; además el principio de dualidad hace que su desarrollo estructural sea tan significativo como el de su contenido ya de por sí diferentes del de aquéllas.

De un modo peculiar, es cierto, podemos decir de la geometría proyectiva que es una geometría no ecuclídea. Y que, antes que las de Lobatchevsky, Bolyai y Riemann, rompe (de modo incruento) con una tradición milenaria. Por más que el estudio de las cónicas haya estado en sus orígenes más remotos, la geometría proyectiva alcanza luego una generalidad inusual.

La propia presentación de Lobatchevxky y su conceptualización, sin contar con la filosofía empirista que él defendía, tenían en principio un correlato físico; y su elaboración posterior se hizo en el marco de la relación entre geometría y espacio físico. La geometría proyectiva mucho antes, ya no era una teoría de la extensión ni del espacio. Aunque esto no sea explícito; debemos recordar que sólo muy tardíamente se reconoce una separación entre geometría y teoría del espacio y muchas de las discusiones de fin de siglo se producen porque muy trabajosamente se llega a este reconocimiento.

Una geometría en la que punto y recta son sustituibles por recta y punto, respectivamente, pone de hecho, aunque no explícitamente, su mirada hacia las relaciones entre entes no fijos (más aún si pensamos que en la geometría proyectiva de tres dimensiones la intercambiabilidad es otra). ¿Debemos pensar como secundaria esa intercambiabilidad?, ¿o más bien pensar que (aún con las excepciones que señalamos) no hay al comienzo una conciencia totalmente clara de ella? ¿Por qué no aparece como revolucionaria una geometría de este tipo mientras que inmediatamente aparecen como tales las geometrías no euclídeas? ¿ Por qué hay una resistencia -bien documentada- contra éstas y escasa contra la geometría proyectiva (el caso de Descartes es de tomarse en cuenta)?. La respuesta no es fácil y no haremos más que sugerir, de modo nada novedoso, algunas circunstancias, vinculadas a las características respectivas ya señaladas.

En primer lugar las geometrías no-euclídeas rompen radicalmente con una tradición geométrica (en geometría plana), consolidada y vinculada a creencias científicas, y no científicas, insertas en la concepción del mundo dominante y en filosofías también dominantes. Y rompe en forma bien localizada, respecto al postulado quinto, fácilmente focalizable aún con consecuencias más amplias. En segundo lugar esto mismo; esa focalización es factible y para nada exótica porque se trata de un tema (el del postulado V), enseñado aún en el nivel elemental, y accesible por tanto a estudiosos con relativamente escasa formación geométrica. Más aún, la ruptura es notoria porque se trata de un tema con claras implicaciones físicas. Que los beocios fueran sobre todo filósofos poco atentos al desarrollo científico real tiene algo que ver con estas características del punto de ruptura.

Por el contrario, la revolución tranquila, enmascarada, que aporta la geometría proyectiva, y cuyas características hemos tratado de esbozar, tiene que ver con ùn complejo cuerpo de doctrina, accesible, no sólo pero particularmente a especialistas. El corte con la geometría tradicional no es puntual ni siquiera localizado, como el del caso comparado, sino que involucra la construcción total de la geometría, o de amplias de sus partes; involucra también una nueva concepción de los entes geométricos a la luz de sus relaciones. El choque no es aparente, no se hace aparente, y por ello mismo el enmascaramiento de la ruptura se hace factible. Por otra parte sólo la integración, debida fundamentalmente a Klein, permite, ya en otro momento, ver con claridad relaciones interteóricas que iluminan a su vez a cada una de las geometrías puestas en relación y en particular el caso de la geometría proyectiva, de modo desfasado en el tiempo.

Hemos querido apenas esbozar algunas propuestas de explicación sin elaborarlas más . Hemos querido señalar como sintomático el hecho de que de 1822 a 1847 (y aún hasta 1867, fecha clave), la geometría proyectiva adquirió un grado de madurez y de elaboración significativos, acentuó gradualmente, de Poncelet a von Staudt,el carácter abstracto que va a dominar de modo creciente a la geometría, culminando con Hilbert.