GOTTLOB FREGE

GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK

FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA
(PARTE III, 1, SEÇÃO B)

Tradução, introdução e notas de Anderson Luis Nakano
Universidade Federal de São Carlos

Natal (RN), v. 21, n. 35
Janeiro/Junho de 2014, p. 493-516

Princípios
Revista de filosofia
E-ISSN: 1983-2109

Introdução. A Seção (b) da parte III.1 do segundo volume dos *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege, que ocupa os parágrafos §§ 68-85, é dedicada a uma crítica da teoria de Cantor dos números irracionais. Frege utiliza, em sua crítica, dois textos de Cantor: *Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre* (1883) e *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der trigonometrischen Reihen* (1882), além de uma breve resposta de Cantor a objeções de Illigens à sua teoria: *Bemerkung mit bezug auf den Aufsatz : «Zur Weierstrass-Cantorschen Théorie der Irrationalzahlen»* (1889).

Esta Seção se situa na parte da obra destinada à revisão das doutrinas dos números reais à época, servindo de preparação para a introdução da doutrina própria de Frege. O filósofo alemão realiza, assim, um movimento semelhante àquele feito por ele nos *Grundlagen der Arithmetik*, quando considera a opinião de diversos autores sobre o conceito de número (cardinal) e as dificuldades que emergem destas opiniões ao mesmo tempo em que apresenta sua teoria como aquela que visa a superar estas dificuldades.

A Seção (b), em particular, possui o mérito de conduzir, através da crítica à teoria de Cantor, a uma primeira abordagem de como o próprio Frege pretende introduzir os números reais, a saber, como razões entre grandezas. Crítico das "definições modernas" dos números reais, assentada sobre séries, sequências ou conjuntos de racionais (segundo as definições de Cantor, Weierstrass e Dedekind), Frege procura preservar aquilo que a "definição clássica" (de Eudoxo, de Newton) possuía de fundamental, sem introduzir com isso elementos alheios à aritmética, como segmentos ou pontos geométricos. Nesse sentido, a crítica da teoria de Cantor é parte importante da "revisão bibliográfica" que Frege realiza das teorias mais difundidas dos números reais, pois nela se encontram as razões pelas quais ele não pode aceitar o modelo segundo o qual o processo de "aritmetização da análise" vinha sendo conduzido pelos matemáticos de seu tempo.

Ainda que a teoria de Frege dos números reais seja amplamente ignorada tanto pelos matemáticos quanto pelos comentadores de sua obra – fato que tem, como um de seus sintomas, a escassez ou inexistência de traduções destes textos mesmo em línguas como o inglês ou o francês –, ela é um dos lugares em que mais se pode observar, dentre seus escritos, características reconhecidas de sua filosofia da matemática, como, p. ex., a importância dada à aplicabilidade da matemática, bem como elementos e ferramentas de seu modo de filosofar, que influenciariam autores do quilate de um Wittgenstein. Outrossim, a teoria tem um valor histórico inestimável na medida em que permite ver claramente as preocupações e interesses de um grande filósofo, em contraste com o desenvolvimento histórico da disciplina a que ele dedicou todo o seu esforço intelectual.

Anderson Luis Nakano

Fundamentos da Aritmética
(Parte III, 1)

b) A doutrina de Cantor sobre os números irracionais.

§ 68. G. Cantor[1] define inicialmente sua série fundamental: “Toda sequência[2] (a_ν) que pode ser caracterizada por satisfazer $Lim_{\nu=\infty}\ (a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0$ (para toda constante μ arbitrária), eu denomino uma série fundamental e associo a ela o número b por ela definido”.

É uma pena que a palavra “número” nas mãos dos matemáticos seja utilizada de modo tão vacilante! Às vezes denota o signo numérico, outras o próprio número significado. Cada matemático que utiliza a palavra “número” deveria especificar como ele a pensa[3]. Assim, estamos aqui também em dúvida sobre o sentido da proposição de Cantor. Se pela palavra “número” se pretende dizer “signo numérico” (*Zahlzeichen*), a proposição deve aparentemente ser entendida como: para cada série fundamental eu dou um certo signo » *b* «, pelo qual a série é designada. Então diferentes séries fundamentais devem receber signos diferentes. Mas então duas séries fundamentais são diferentes sempre que houver um número que pertence a uma das duas, e que não pertence à outra. Na verdade, esta atribuição de signos é totalmente irrelevante; pois eu devo de algum modo já ter denotado uma série para poder dizer:

---

1 Math. Annalen XXI, p. 567.
2 Sequência de números racionais.
3 Optamos pela segunda denotação.

para essa série fundamental particular eu dou o signo » *b* «. Agora se eu quero falar sobre esta série, tanto faz o uso do signo » *b* « ou da designação original. No máximo, a nova designação pode ser mais conveniente por sua maior simplicidade.

§ 69. Posteriormente Cantor diz: “Tal série fundamental apresenta ... três casos: ou são seus termos (a_ν), para valores (*Werthe*) suficientemente grandes de ν, menores em valor (*Betrage*) absoluto que um dado número [racional] arbitrário; ou tais termos, para um valor de ν, são maiores que um número racional [positivo] particular ϱ; ou tais termos são, para um valor particular de ν, menores que uma grandeza racional negativa $-\varrho$. No primeiro caso, digo que *b* é igual a zero; no segundo, que *b* é maior que zero ou positivo; no terceiro, que *b* é menor que zero ou negativo”.

Se nossa suposição sobre o sentido das primeiras proposições de Cantor está certa, então isto pode ser expresso sem utilizar o signo » *b* « da seguinte maneira: “Se uma série fundamental, cujos termos a_ν, para valores suficientemente grandes de ν são menores em valor absoluto que um dado número racional arbitrário, eu digo que ela é igual a zero; se uma série fundamental, cujos termos, para um certo valor de ν, são maiores que um número racional particular [positivo] ϱ, digo que ela é maior que zero ou positiva; se uma série fundamental, cujos termos para um particular ν são menores que um número racional particular negativo $-\varrho$, digo que ela é menor que zero ou negativa”. Peguemos este texto ou o original de Cantor: em ambos os casos, temos três explicações para as expressões “igual a zero”, “maior que zero” e “menor que zero”. Estas definições são defeituosas (*fehlerhalt*), pois o termo esclarecido não é simples; ao invés disso é presumido que as palavras “maior” e “menor” devem ser conhecidas, e então elas esclarecem elas próprias – violação de nossos dois princípios de definições. Mas também deve ser presumido que as palavras “zero” e “igual” já são conhecidas e então os termos “igual a zero”, “maior que zero”, “menor que zero” são completamente conhecidos e não podem ser explicados novamente. Se não fossem, as definições anteriores seriam incompletas – violação do nosso primeiro princípio de definições.

§ 70. Illigens resume em seu artigo “Zur Weierstrass-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen”[1] [Sobre a teoria de Weierstrass e Cantor dos números irracionais] as teses de Cantor de tal forma que pelo número *b* é entendido um signo para uma lei segundo a qual a série é dada. Assim, pode parecer, à primeira vista, que o número *b* deve representar uma proposição; mas o termo posteriormente muito utilizado “signo para série numérica” (*Zahlreihezeichen*) deixa claro que Illigens entendeu as teses de Cantor como também as procuramos entender. Ocorre, contudo, que tal signo para série numérica não pode de modo algum designar, como os racionais, uma quantidade, já que as palavras “maior” e “menor” têm um sentido completamente distinto do que quando usadas com os números racionais; segue-se o mesmo para a palavra limite (*Grenze*); pelo mero uso da palavra “maior”, *b* não pode se tornar um signo de quantidade, e aos números racionais pertence o fato de eles serem usados como signos para série numérica, e isto vale também para os novos números, mas não que estes novos números designem uma quantidade. A intenção de fazer aparecer os números racionais como um tipo dos signos para série numérica é, assim, defeituosa. Seguindo Illigens, podemos também adicionar que os números racionais – nossos escritores entendem aparentemente por isso os signos numéricos – seriam ambíguos: de um lado, designariam quantidades; de outro, séries de números (séries fundamentais). Illigens diz posteriormente: “Os signos estabelecidos para as séries de números, a despeito de todas as denominações que são a eles adicionadas por diferentes definições, não podem de forma alguma se tornar conceitos de quantidade”.

Certamente! Um signo não pode nunca se tornar um conceito. Mas não precisamos assumir que Cantor confundira o signo e o que é por ele designado. Não obstante, há certamente algo de verdadeiro nesta objeção: quando se diz que as séries de números, a despeito de todas as denominações que forem acrescidas por meio de diversas definições, jamais se tornam quantidades.

[1] Math. Annalen XXXIII, p. 155 e ss.

§ 71. Além disso, segundo Illigens, se $\sqrt{2}$ fosse tomado como um mero signo para série numérica (para a série *1.4*, *1.41*, *1.414*, ...), então teríamos do lado esquerdo da equação $(\sqrt{2})^2 = 2$ apenas um signo para a série de números 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, ... Tal signo, porém, como qualquer coisa que pudesse ser escolhida e que por meio da igualdade com o número *2* designasse uma quantidade, não seria provavelmente capaz de manifestar a ninguém um sentido. Esta objeção é justificada somente se Cantor confunde o signo com o designado, o que deve ser, antes de tudo, demonstrado. Quando um signo de igualdade é posto entre outros signos, não é afirmado que o signo da esquerda » $(\sqrt{2})^2$ « é igual ao significado do signo da direita, mas que o significado do signo da esquerda é igual ao significado do signo da direita. Aqui seria algo como equacionar uma série de números com o significado do signo numérico » *2* «, i. e, o número *2*. A justificação para isto teria de ser investigada.

Pode-se, porém, acusar Cantor de ter omitido essa verificação e o que deve ser efetivamente demonstrado é estipulado através de uma pseudo-definição. A série fundamental 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, ... deve ser assumida como conhecida, o mesmo para o número *2* e o significado da palavra “igual”. Então, se aquela série fundamental é igual ao número *2*, isso não pode ser objeto de uma estipulação arbitrária, ao invés disso deve surgir como um resultado. Esta objeção, é claro, se aplica somente na condição de correção da interpretação das teses de Cantor aqui adotada. Futuramente devemos tentar uma outra interpretação.

Também segundo Illigens, Cantor, com sua teoria, não poderia dizer o que é uma reta de $\sqrt{2}$ metros de comprimento.

Há decerto muitas verdades nestas objeções; contudo tornar-se-ia mais claro se Illigens não utilizasse a palavra “número” com o significado de signo numérico e sobretudo se ele distinguisse claramente número e signo numérico. Pois quando ele fala de números racionais e chama um número maior que o outro, isso não é adequado para o significado de signo numérico. O risco de tal imprecisão no uso da palavra “número” está presente toda vez que tal palavra não é entendida como significando um signo numérico, mas como o número ele próprio; pois foi outrora estipulada a opinião, segundo a qual os objetos da aritmética são números. Então os signos numéricos, meros meios de auxílio para fazer a pesquisa aritmética destes objetos, estão sempre perto de causar uma alarmante confusão[1].

Em segundo lugar, parece-me questionável, ao menos no entendimento errôneo acima exposto, que os signos de quantidade de Illigens para os números racionais e o que ele diz deles, designem quantidades. De acordo com o uso da linguagem, nomeiam-se quantidades: comprimentos, áreas, ângulos, períodos de tempo, massas e forças. É certo dizer que o número $\frac{2}{3}$ ou o signo numérico » $\frac{2}{3}$ « designa um certo comprimento, ou um certo ângulo ou mesmo ambos?

§ 72. Segundo A. Pringsheim[2], os números racionais aparecem como signos que *podem* muito bem representar quantidades determinadas, mas não *devem*. Evidentemente, este escritor também entende por número racional um pouco de tinta em um papel, ou figuras nele impressas. Agora: se estas figuras são para a aritmética nada mais que figuras, então é irrelevante para a ciência quais representações uma pessoa poderia vincular a elas, já que a aritmética nos impele a ignorar tais representações. Estas representações seriam tão irrelevantes para a aritmética quanto seria, para a geometria, se alguém vinculasse a uma figura triangular um elefante. Alguém pode então dizer: “um triângulo pode certamente representar um elefante, mas não deve”; uma

[1] Na verdade, há também uma opinião, segundo a qual os números não são nem signos que significam algo, nem significados não-sensíveis (*unsinnliche*) de tais signos, mas figuras que são manipuladas de acordo com certas regras, como peças de xadrez. Nesse sentido, os números não são nem ferramentas de pesquisa, nem objetos de inspeção, mas objetos de manuseio. Esta opinião será considerada posteriormente.

[2] Encyklopädie der math. Wissenschaften [Enciclopédia da ciência matemática] I A 3, p. 55.

inspeção na essência da geometria ou do triângulo dificilmente seria promissora. Ou então as figuras de Pringsheim para os números racionais são signos de algo que servem para expressar pensamentos (*Gedanken*) aritméticos, assim como o signo » ♃ « é utilizado pelos astrônomos para designar Júpiter. Que estranho seria então dizer que o signo poderia designar Júpiter, mas não deveria! O astrônomo simplesmente diria: “eu designo com o signo » ♃ « o planeta Júpiter”, e então as coisas estariam resolvidas; tudo que posteriormente viesse a ser dito a respeito desse signo seria supérfluo. Portanto: ou é essencial para a aritmética que os signos numéricos signifiquem algo, então o que eles significam, o ponto principal, é o que é objeto de inspeção e os signos são, eles próprios, somente ferramentas das quais não se pode dizer muito; ou os signos numéricos são eles próprios os objetos da aritmética, e então é irrelevante se tal ou tal significado é a eles vinculado, e a aritmética não precisa de um discurso sobre tais significados para existir. No primeiro caso, os signos numéricos simplesmente designam algo, a saber, números; no segundo caso eles, pelo menos com relação à aritmética, não denotam nada. Em nenhum caso, porém, algo decisivo ou elucidativo é encontrado na proposição segundo a qual signos numéricos podem, mas não devem, representar quantidades.

§ 73. O que é então essencial na alegação de que os signos numéricos designam quantidades? Olhemos para a aplicação das leis aritméticas na geometria, na astronomia e na física! Aqui números de fato ocorrem em conexão com grandezas, como comprimentos, massas, intensidades de iluminação e cargas elétricas; e, com base em um consideração superficial, poder-se-ia pensar que o mesmo signo numérico significa ora um comprimento, ora uma massa, ora uma intensidade de iluminação, e isto pareceria suportar a alegação de Pringsheim, que entre os signos numéricos e as quantidades há uma certa conexão, mas apenas uma conexão fraca. Examinemos isto mais exatamente. A que realmente recorremos quando fazemos uso de uma proposição aritmética? Ao som das palavras? A grupos de figuras peculiares, que consistem em tinta de impressora? Ou recorremos a um conteúdo de pensamento que vinculamos a estas palavras ou estas figuras? O que provamos, quando provamos uma proposição aritmética? Aquele som? Aquelas figuras? Ou aquele conteúdo de pensamento? Claro que é este último! Muito bem, então devemos ter um pensamento determinado nestas proposições, o que não teríamos se os signos numéricos e palavras numéricas que nela ocorrem designassem ora isto, ora aquilo.

Se atentarmos com mais cuidado, perceberemos que um signo numérico não pode somente por si mesmo designar um comprimento, uma força e assim por diante, mas somente em conexão com a designação de uma medida, uma unidade, como o metro, o grama, etc. O que designa então o signo numérico sozinho? Claramente uma razão entre grandezas (*Grössenverhältnis*). E isto é tão evidente que não é surpreendente que já o tenham descoberto[1]. Se, então, entendemos por “número” o significado de um signo numérico, um *número real* é o mesmo que razão entre grandezas. E então o que ganhamos ao definir *número real* como razão entre grandezas? De imediato parece apenas que uma expressão foi substituída por outra. E, no entanto, um passo a frente foi dado. Pois, primeiramente, ninguém irá confundir uma razão entre grandezas com um signo escrito ou impresso; e com isso uma fonte de incontáveis desentendimentos e erros é obstruída. Em segundo lugar, a expressão “razão entre grandezas” ou “razão entre uma grandeza e outra grandeza” serve para indicar o modo pelo qual números reais são ligados a grandezas. O ponto principal ainda permanece por fazer. Temos inicialmente somente palavras que nos indicam apenas aproximadamente a direção em que a solução deve ser procurada. O significado de tais palavras deve ainda ser mais precisamente fixado. Contudo nós não diremos mais que um número ou signo numérico designa ora um comprimento, ora uma massa, ora uma intensidade de iluminação. Ao invés disso, diremos que um comprimento pode ter, com relação a outro comprimento, a mesma razão que uma massa tem com relação a outra massa, ou uma intensidade de iluminação tem com relação a outra intensidade

[1] Cf. Baumann, Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik [A doutrina do tempo, espaço e matemática I] I, p. 475.

de iluminação[1]; e esta mesma razão é o mesmo número e pode ser designado pelo mesmo signo numérico.

Se Illigens entende, pela palavra “quantidades”, razões entre grandezas, ou, o que vemos como sinônimos, números reais, e se ele quer dizer que o signo para a série numérica não designa, na teoria de Cantor, razões entre grandezas, então ele está certo. Na definição de Cantor há apenas a série fundamental e o número *b*, e o último é o signo para a série numérica. Nada é dito aqui com relação à razão entre grandezas. O signo para a série numérica simplesmente designa a série fundamental e com isso não deveria designar também uma razão entre quantidades, pois senão ele seria ambíguo.

§ 74. Infelizmente, a resposta de Cantor[2] às objeções de Illigens é breve e obscura. Não sabemos ao certo se Illigens está certo ao pressupor que os números *b*, *b'* e assim por diante são signos, e se eles designam séries fundamentais, o que é fundamental para esclarecer o assunto. Mas ao invés disso, o que se tem é uma confusão entre signo e designado. Cantor escreve:

“Mas não foi nunca afirmado nem por mim nem por outros que os signos *b*, *b'*, *b''*, ... são grandezas *concretas* no sentido próprio da palavra. Enquanto coisas abstratas de pensamento (*abstracte Gedankendinge*), eles só são grandezas no sentido impróprio ou figurado da palavra”. Aqui, porém, *b*, *b'* e assim por diante são chamados de signos e ao mesmo tempo de coisas de pensamento abstratas. É realmente uma forte crença tomar os signos, os quais são escritos com giz em um quadro ou com tinta no papel, e que podem ser vistos pelos olhos corpóreos, por objetos de pensamento abstratos; é a tal crença que move montanhas e cria os números irracionais. Provavelmente Cantor quer dizer que os signos *b*, *b'*, etc. devem denotar objetos de pensamento abstratos. Podemos distinguir objetos físicos e lógicos, o que certamente não deve fornecer uma classificação exaustiva. Aqueles são reais, no sentido

[1] Gostaria de banir o termo “número denotado”, já que ele só causa confusão.

[2] Math. Annalen XXXIII, p. 476.

preciso da palavra; estes não o são, no entanto não são menos objetivos. Eles não podem afetar nossos sentidos, mas são reconhecidos por nossas faculdades lógicas. Tais objetos lógicos são nossos números cardinais, e é bem provável que os outros números também estejam nesta mesma categoria. Agora, se com o termo "objeto abstrato de pensamento", Cantor quer dizer o que chamamos de objeto lógico, parece que existe uma boa concordância entre nós. Que pena então que tais objetos abstratos de pensamento não ocorrem em sua explicação! Temos séries fundamentais e signos *b*, *b'*, etc. Estes, não podemos nem com boa vontade tomar por objetos abstratos de pensamento, e as séries fundamentais também não são por tal termo denotadas. Portanto, se as coisas abstratas de pensamento é o ponto principal, então falta precisamente o ponto principal na definição de Cantor. Qual objeto abstrato de pensamento deve ser designado pelo signo » $\sqrt{2}$ «? Não sabemos. Caímos em superficialidades não essenciais e deixamos escapar o ponto central.

§ 75. Para concluir, é explicado no trabalho de Cantor que, com a ajuda destas grandezas abstratas *b*, *b' b''* ..., somos capazes de determinar exatamente grandezas concretas autênticas como, por exemplo, a de segmentos geométricos. Longe de ser um mero complemento agradável, a aplicação à geometria é decisiva. Mas se tal constatação é decisiva, ela depõe contra a teoria de Cantor, por que ela não ocorre na definição de grandeza numérica (*Zahlgrösse*) exposta. Somente depois que os *b*, *b' b''* ... são introduzidos é que a determinação de distâncias por meio das grandezas numéricas é fornecida[1]. Tal introdução de grandezas numéricas é puramente aritmética, porém não contém o fator decisivo; esta informação, a saber, como distâncias podem ser determinadas por meio de grandezas numéricas, contém o fator decisivo, porém não é puramente aritmética. E com isso certamente o alvo, colocado pelo próprio Cantor, é perdido. Naquela definição, de um lado temos as séries fundamentais e de outro lado os signos *b*, *b'*, *b''* ..., nada além disso. O caso seria diferente se tivéssemos uma definição puramente

[1] Math. Annalen V, p. 127.

aritmética ou lógica de razão (*Verhältnis*)[1], da qual concluiríamos que há razões, e, entre elas, razões irracionais. Então o fator decisivo estaria nesta definição, e a determinação de uma distância por meio de uma unidade e uma razão (número real) teria somente o estatuto de um exemplo ilustrativo, que poderia ser dispensado.

E então nos encontramos mais perto de saber como estas determinações quantitativas de grandezas concretas devem, segundo Cantor, tomar o lugar de grandezas abstratas! É assumido que se conhece como uma distância é determinada por meio de um número racional. Cada termo de uma série fundamental então corresponde a uma certa distância e com isso a um certo ponto, o qual, em uma certa linha reta, é distante de um certo ponto inicial para um certo lado. Na sequência, os pontos que correspondem aos termos da série fundamental se aproximam no limite de um ponto, que é precisamente determinado por meio de tal limite. Então, lê-se:

"Expressamos isto dizendo: *a distância do ponto o ao ponto determinado é igual a b*, onde *b* é a série (1)[2,3] ...de grandezas numéricas correspondentes".

Em primeiro lugar, o erro aqui a ser notado é que a unidade não é mencionada em nenhum lugar na expressão definida, embora seja necessária para a determinação. Disto pode surgir a aparência ilusória segundo a qual *b*, *b'*, *b''* ... são distâncias, enquanto que eles só podem ser razões; e tais razões podem ocorrer também como forças de corrente elétrica, como quantidades de trabalho mecânico, etc. Todavia este problema poderia ser facilmente retificado. Mas qual expressão deve ser realmente explicada? Deve-se assumir como conhecido o que é a distância de um ponto a outro; a tal grandeza numérica *(b)* já foi introduzida; e a palavra "igual" deve também já ser conhecida. Então tudo na expressão explicativa é conhecido, e, se tudo estivesse em ordem, o sentido da proposição "A distância do

[1] Obviamente, as razões (Verhältnisse) inúteis para a aritmética não são consideradas.

[2] A série fundamental.

[3] N. do T.: Frege faz referência, aqui, à série fundamental definida por Cantor no trabalho citado e indexada pelo número (1).

ponto *o* ao ponto a ser determinado é igual a *b*” teria que ser igualmente conhecida, de forma que uma explicação seria no mínimo supérflua, e portanto errônea.

Se o que é *b* é desconhecido, o que talvez corresponda à verdade, mas não à intenção de Cantor, então temos algo capaz de ser explicado, mas tal explicação não é puramente aritmética. Seria aceitável se, ao invés de “distância”, Cantor tivesse dito “razão entre distância e unidade de comprimento”. O que é uma razão de distâncias é certamente desconhecido e, portanto, capaz de explicação – e é aí que se encontra o núcleo da questão –; porém mesmo assim surgiriam dificuldades.

§ 76. Mas nos movamos para o ponto principal! Evidentemente, as grandezas numéricas *b*, *b'*, ... de Cantor, sejam elas apenas signos ou objetos abstratos de pensamento ou ambas coisas ao mesmo tempo, são totalmente supérfluas para a determinação de distâncias. Com efeito, a inserção destes signos só torna as coisas mais complicadas, sem nenhuma utilidade. Deixando totalmente de lado as grandezas numéricas, percebe-se que as séries fundamentais já são o bastante para o propósito, sejam elas associadas a um signo *b* ou não.

Sem as determinações de distâncias providenciadas, temos somente séries fundamentais de um lado e signos de outro, e falta o ponto principal. Como os signos *b*, *b'*, ... não são essenciais, tem-se, de fato, somente as séries fundamentais. Estas séries podem servir para determinar razões, mas somente depois que aprendemos o que é uma razão de grandezas: e é precisamente isto o que falta.

Suponha que conhecemos alguns espectros lineares (*Linienspectren*), mas nenhum metal. É-nos útil o fato de associarmos a um destes espectros o signo » *K* «, um outro » *Na* «, um terceiro » *Fe* «? Muito pouco! É-nos útil chamarmos estes signos de metais? Seria útil talvez para disfarçar nossa ignorância; nada seria acrescido ao nosso conhecimento dos verdadeiros metais. Primeiramente, deveríamos conhecer os metais; então poderíamos descobrir como determiná-los pelos seus espectros. E assim temos o que realmente importa para nós, e aquela associação de signos não nos ajuda em nada para isso. Antes de termos os metais eles próprios, aqueles signos são somente cascas vazias inúteis, e acreditamos em vão que elas querem se preencher sozinhas com um novo conteúdo.

Aqui também. Primeiramente, teríamos que conhecer as razões entre grandezas, os números reais; assim, poderíamos descobrir como podemos determinar as razões por meio de séries fundamentais. É estranho conferir à associação de signos *b*, *b'*, *b"* ... algum poder criador[1]. A introdução da geometria é portanto decisiva, já que com isso é repassado o esforço de trazer à tona o conteúdo. Porém, com isso, o que é crucial pertence à geometria, e a teoria de Cantor não é de modo algum puramente aritmética.

§ 77. Mas então está realmente correta a interpretação segundo a qual os tais números que Cantor associou às suas séries fundamentais são signos? Embora o próprio Cantor tolere esta interpretação, é devido a grandes dificuldades associadas a ela que ele prefere uma outra. Suspeito de algo como o seguinte: a cada série fundamental é associado um certo número que não tem nenhuma necessidade de ser racional. Tais números são, portanto, em parte novos, até então não considerados, e eles devem justamente ser determinados pelas séries fundamentais às quais eles se encontram vinculados. O signo » *b* « não designa então a série fundamental, mas o número que a ela está vinculado. Este número não é portanto de modo algum um signo, mas sem dúvida o que Cantor chama de uma coisa abstrata de pensamento[2].

---

[1] Para a peculiar concepção dos signos e do que eles têm de efetuar, e que é caracterizada por muitos novos matemáticos como de fundamental importância, tais ações são atributivas (*beigelegt*); eles deviam cercá-las, pois, com uma cerimônia especial!

[2] Então, a expressão de Cantor acima mencionada, segundo a qual o signo » *b* « ele próprio deveria ser uma coisa abstrata de pensamento, seria imprecisa e seria então entendido que » *b* « designa uma tal coisa de pensamento. Tais imprecisões parecem gozar de grande popularidade, porém não são por isso mais aceitáveis.

Reconhece-se então melhor o penhasco em que tal tentativa deve cair. Não sabemos nada sobre o tipo de conexão que deve unir o número à série fundamental. Porém, através de uma relação completamente desconhecida algo desconhecido não pode ser determinado. O erro é que a associação a uma série fundamental e a definição dos novos números são contraídas em uma única operação. Podemos certamente associar uma série fundamental a um número definido, mas não a um número a ser definido, o qual ainda não temos[1]. Consideremos a metáfora novamente! Imaginemo-nos voltando à posição em que não conhecemos nenhum metal, mas sim espectros lineares! Agora dizemos: deste modo associamos a tais espectros o metal Sódio a definir. Mas como chegamos ao metal? Não por esta associação, que não pode nos fornecer nada que ainda não temos. Conhecemos apenas alguns espectros, porém não sabemos nada de análise espectral, não temos, portanto, nenhuma ideia sobre a relação particular na qual os espectros estão associados aos metais, os quais ainda são desconhecidos para nós. O nome “Sódio” ainda flutua no ar. Assim como flutua no ar também inicialmente o signo » *b* « de Cantor; ainda não temos nada que podemos por meio dele designar. Quando é nomeado na passagem citada

“No primeiro caso, digo que *b* é igual a zero; no segundo, que *b* é maior que zero ou positivo; no terceiro, que *b* é menor que zero ou negativo”, o signo » *b* « é usado aqui prontamente como designando algo, enquanto que ainda não foi fixado que algo poderia ser encontrado, o que seria a intenção de associá-los às séries fundamentais. Pois inicialmente apenas uma intenção é expressa; se ela é atingível permanece uma questão não respondida.

§ 78. Considerando-se somente as sentenças citadas acima, é nelas indicado quando uma série numérica é associada (ou atribuída?) ao número igual a zero, maior que zero ou menor que zero. Perguntamos: com isso algo é definido? ou algo é associado? ou qual é o propósito destas proposições? Cantor escreve:

“No primeiro caso, digo que *b* é igual a zero”.

[1] De modo similar, poder-se-ia dizer: “Eles enforcam o ladrão a ser pego”.

Primeiramente, perguntamos: o "igual" é entendido aqui no sentido de "coincidente com"? Isto é provável, pois caso contrário seriam aceitos números que, embora todos iguais a zero, seriam diferentes uns dos outros. Então não estaria determinado quais destes números seria associado à série fundamental no primeiro caso. Porém, se "*a* é igual a *b*" quer dizer que "*a* coincide com *b*", então há somente um número que é igual a zero, a saber, o número zero ele próprio, e o sentido é então: quando o primeiro caso é presente, eu associo a série fundamental ao número zero. Aqui não temos evidentemente nenhuma definição, mas uma associação de um número já conhecido. Contra isto não há nada a dizer, a não ser pelo fato de que com isso não ganhamos nenhum número novo.

Então Cantor diz posteriormente que no segundo caso *b* é maior que zero ou positivo. Aqui essencialmente devem ser completamente definidos e assumidos conhecidos a relação de grandeza bem como o zero e o que é positivo. Embora seja improvável que Cantor tenha tais definições, as quais se pode prontamente encontrar aplicações nos novos números, gostaríamos primeiramente de retomá-las novamente. Se o número *b* já fosse também definido, então nada mais seria estabelecido; ao invés disso seria fácil investigar se *b* é maior que zero. Certamente *b* não está ainda definido; ainda não o conhecemos. Então, aqui se encontra apenas uma pista para a associação: quando o segundo caso é presente, associa-se uma série fundamental a um número que é maior que zero. Qual dos muitos números positivos se deve tomar, porém, permanece totalmente incerto. Quando Cantor diz que no terceiro caso *b* é menor que zero ou negativo, temos também aqui apenas uma dica para o que seja a associação.

Até agora associamos um número já conhecido a uma certa série fundamental e temos pistas para futuras associações a serem (mas que ainda não estão) definidas.

§ 79. Cantor continua:

"E então seguimos com as operações elementares. Sejam (a_ν) e (a'_ν) duas *séries fundamentais*, por meio das quais são determinados os números *b* e *b'*. Então, pode-se mostrar que $(a_\nu \pm a'_\nu)$ e $(a_\nu \cdot a'_\nu)$

são séries fundamentais, as quais, por sua vez, determinam três novos números, os quais servem como definição para a soma e diferença $b \pm b'$ e para o produto $b \cdot b'$." Esta proposição é muito defeituosa. Até então, pode-se dizer apenas do Zero que ele é determinado por uma certa série fundamental. Assim, devemos tomar por *b* bem como por *b'* o Zero. Mas então, que $(a_\nu \pm a'_\nu)$ determina o Zero é um teorema e, portanto, não é uma definição. A proposição pode ser provada, portanto tudo que há nela deve ser conhecido. De acordo com isso, não há lugar aqui para uma definição. Então, é uma felicidade que o que pode ser provado coincide com o que a aparente definição diz. Mas pelos princípios de definição seguidos por Cantor, ou melhor, pela ausência aqui mostrada de qualquer princípio razoável para as definições, seria igualmente possível que algo fosse determinado por meio de uma definição, e cuja falsidade pudesse ser provada.

Se é assumido aqui que cada série fundamental determina um número, então a intenção é tomada por feita. Exceto no caso em que o Zero é associado, até então o que é dado é somente uma intenção de associação e algumas pistas para a sua execução, nada mais.

Além disso, as palavras "soma", "diferença", "produto" são esclarecidas por elas próprias; elas são até então apenas parcialmente explicadas, uma violação do nosso primeiro princípio.

Na realidade, com isso nada é realizado além de algo falsamente declarado como definição, algo que teria que ser provado como teorema.

§ 80. Deixando de lado a questão do quociente, prossigo com a apresentação de Cantor. Ele então diz:

"As operações elementares sobre um número *b* dado por uma série fundamental (a_ν) e um dado número racional *a* estão inclusas nas estipulações acima, considerando $a'_\nu = a$, $b' = a$."

Aqui temos uma inconsistência: a expressão "um número *b* obtido de uma série fundamental" implica neste contexto que um número seria dado por meio de uma série fundamental. Se isso fosse o caso, então um número seria determinado pela série fundamental onde todos os termos são *a* e então não haveria mais lugar para a atribuição deste número como sendo *a*; ao invés disso deveria ser investigado qual número seria dado por tal série fundamental, uma investigação que não pode nos levar a nenhum resultado, pois na verdade somente a intenção de associar, por meio de uma certa regra, uma série fundamental a um número é conhecida. Pela última atribuição, esta proposição é certamente algo a ser levado a cabo, mas sem que, por meio disso, novos números sejam trazidos à tona. Portanto, fundamentalmente não nos aproximamos dos nossos objetivos.

§ 81. Avancemos um passo adiante. Cantor escreve:

"Somente então vêm as definições de ser igual, maior ou menor entre números *b* e *b'* (dos quais *b'* também pode ser $=a$), e então é dito que $b=b'$ ou $b>b'$ ou $b<b'$ dependendo se $b-b'$ é igual, maior ou menor que zero." No que concerne o signo de igualdade, assumimos acima que ele deve denotar total coincidência. Se aceitarmos isto também aqui, embora não inteiramente em harmonia com o texto, então não temos nenhuma definição de igualdade, ao invés disso esta é conhecida. O propósito pode então somente ser a determinação um pouco mais precisa dos números que devem ser associados às séries fundamentais. É então manifestada a intenção de associar tais séries ao mesmo número, para os quais $Lim_{\nu=\infty}\ (a_{\nu+\mu} - a_\nu)=0$. Então, se uma das séries é associada a um número, o número a ser associado a outra série já está determinado. Mas até agora apenas números racionais são associados, portanto não avançamos em nada.

Porém, nossa hipótese, a de que o signo de igualdade é utilizado por Cantor como signo de identidade, parece aqui tornar-se insustentável. É expressamente dito: "Definição de ser igual, maior ou menor", do que se deveria concluir que os significados dos signos » = «, » > « e » < « aqui são assumidos como não inteiramente conhecidos. Como se assume, é claro, que sejam conhecidos apenas parcialmente, isto caracteriza uma violação do nosso primeiro princípio das definições. Esta falha causa aqui uma peculiar ilusão. Nosso campo de visual espiritual (*geistiges*) encontra-se em um estado semelhante à nossa visão corpórea no caso de rivalidade das cores: em um instante aparecem as palavras “igual”, “maior”, “menor”, “soma”, “produto” como conhecidas, imediatamente após aparecem como desconhecidas e então novamente como conhecidas. Quando, por exemplo, a palavra “maior que” é esclarecida por ela própria, ela aparece na mesma sentença parcialmente como conhecida – onde ela serve como explicação –, parcialmente como desconhecida – onde ela é explicada.

§ 82. Estas definições da soma, da diferença, do produto, de ser igual, maior e menor aparecem apenas agora essencialmente para criar os novos números eles próprios, aparecem para dar ao signo » b « o primeiro conteúdo (*Inhalt*). Pensa-se involuntariamente que o significado da palavra “maior” é conhecido, que a coisa maior é uma grandeza, seja ela abstrata ou concreta. Como as palavras “soma”, “diferença”, “igual”, “maior que” e assim por diante são explicadas ou então assumidas como explicadas, obtém-se a impressão que já se saberia o que uma soma, uma diferença, o que igual e o que maior seriam, e, por meio destes já conhecidos, confere-se então aos signos » b « » b' « e assim por diante um conteúdo de certa maneira obscura, utilizando-os em proposições como » $b>b'$ « e » » $b+b'<b''$ «. O que inicialmente se apresenta como esclarecimento dos signos » $+$ « » $>$ « e assim por diante, reivindica-se no momento seguinte como algo mais próximo para determinar o que deve ser associado às séries fundamentais segundo Cantor. Esta falácia é somente possível porque tais signos são ainda considerados novamente como conhecidos. Então tais definições alumiam em duas cores, agora definem a soma, o produto, a magnitude, etc. e logo mais devem determinar os novos números. Mas isto é irreconciliável.

Uma metáfora pode facilitar a compreensão. Quando se define “um julgamento é duro, quando neste a propriedade *duro* é concedida a uma coisa”, comete-se a falha na qual a palavra “duro” é esclarecida por meio ela própria, seu significado é considerado de uma só vez como conhecido e como desconhecido. Então poder-se-ia tomar o significado conhecido em mente de “duro”, a saber, que tudo que é duro é um corpo físico, para em seguida concluir:

também são os julgamentos, nos quais a propriedade *duro* é concedida a uma coisa, corpos físicos. Aqui o caso é parecido; também aqui as palavras “maior”, “soma”, etc. por elas mesmas explicadas, também aqui se conclui, do significado conhecido em mente destas palavras, que os novos objetos são números como os racionais e que poderiam servir para o mesmo propósito que eles. A única diferença é que ainda não temos estes novos números, que eles por isso devem ser primeiramente criados, enquanto que no outro caso já temos pelo menos aqueles julgamentos.

Não se pode definir duas coisas diferentes com uma definição: a magnitude e os números irracionais – violação do nosso segundo princípio.

§ 83. A definição por partes produz aqui a luz fraca que é necessária para o sucesso da ilusão. Isto desaparece imediatamente quando, no lugar de palavras e signos onde elas são tratadas como desconhecidas, comuta-se palavras e signos criados totalmente novos, aos quais já não é vinculado um sentido ou a aparência de um sentido. Se substituirmos

“positivo” por “albig”
“negativo” por “bebig”
“igual a” por “azig”
“maior que” por “bezig”
“menor que” por “zezig”
“zero” por “Poll”
“soma” por “Arung”
“diferença” por “Berung”
“produto” por “Asal”

os signos » > « por » 2 «,
» < « por » 2 «,
» = « por » 3 «,
» + « por » B «,
» - « por » B «,
» · « por » C «,

os esclarecimentos de Cantor passam a ser:

“Tal série fundamental apresenta três casos: ou são seus termos *(a_ν)*, para valores suficientemente grandes de ν, menores em valor absoluto que um dado número arbitrário; ou tais termos, para um valor de ν, são maiores que um dado número racional particular ϱ; ou tais termos são, para um valor particular de ν, menores que uma dada grandeza particular negativa $-\varrho$. No primeiro caso, digo que *b* é azig Poll; no segundo, que *b* é bezig Poll ou albig; no terceiro, que *b* é zezig Poll ou bebig”[1].

“Sejam *(a_ν)* e *(a'_ν)* duas *séries fundamentais*, por meio das quais são determinados os números *b* e *b'*. Então, pode-se mostrar que *($a_\nu \pm a'_\nu$)* e *($a_\nu \cdot a'_\nu$)* são séries fundamentais, as quais, por sua vez, determinam três novos números, os quais servem como definição para a Arung $b \rotatebox{90}{B} b'$, para a Berung $b \rotatebox{-90}{B} b'$ e para o Asal $b \rotatebox{90}{C} b'$.”

“Somente então vem as definições de Azigdade, Bezigdade e Zezigdade entre números *b* e *b'*, e então é dito que $b \rotatebox{-90}{3} b'$ ou $b \rotatebox{-90}{2} b'$ ou $b \rotatebox{90}{2} b'$ dependendo se $b \rotatebox{-90}{B} b'$ é azig Poll ou bezig Poll ou zezig Poll”[2].

Por meio destas definições, os significados das novas palavras e signos podem ser fixados no mínimo com os mesmos direitos com os quais as anteriores e incompletas de Cantor puderam ser adicionadas. Mas, como se vê, o sentido conferido a estas novas palavras e signos não é suficiente para o presente propósito visado. Assim, desaparece toda aparência de que por meio destas definições seriam determinados de algum modo mais próximo os novos números. Com as definições de Cantor pode ser produzida tão-somente esta aparência que vai contra nosso primeiro princípio, a saber, a de que as palavras “igual” “maior”, etc. estão em uma constante oscilação entre serem conhecidas e serem desconhecidas. Aquelas explicações anteriores deixam aparentemente algo fluente nos novos números, embora eles não possam ser determinados por

[1] As expressões “azig Poll”, “bezig Poll” e “zezig Poll” devem ser consideradas como totalidades indivisíveis, de acordo com nosso segundo princípio.

[2] Como se vê, teríamos que criar para “igual”, “maior” e “menor” ainda um terceiro conjunto de expressões.

estes usos ajustados. Assim que a hesitação é removida, a ilusão desaparece. Se Illigens quis dizer isso com as palavras “Os signos construídos para as séries de números, a despeito de todas as denominações que são a eles adicionadas por diferentes definições, não podem de forma alguma ser conceitos de quantidade”, então concordamos com ele, embora tenhamos que criticar seu modo inexato de expressão.

§ 84. Façamos então um sumário dos resultados de nossa inspeção da teoria de Cantor. Nós distinguimos dois modos de compreensão: de acordo com a primeira os números, os quais Cantor associa às suas séries fundamentais, são signos; de acordo com a segunda, eles são objetos abstratos de pensamento.

No primeiro caso, temos que considerar as séries como os significados dos assim chamados números. A associação destes números não é essencial. Nós temos basicamente apenas as séries fundamentais, enquanto que o ponto principal é perdido, a saber, os próprios números, as razões entre grandezas. Cantor procura remediar esta deficiência mostrando como seus números podem ser usados para a determinação quantitativa de distâncias. Mas, em primeiro lugar, seus números são para isso inteiramente supérfluos e, em segundo lugar, com isto o que é decisivo é perdido na geometria, e a teoria cessa de ser uma teoria puramente aritmética.

No segundo caso permanece a intenção de associar novos números às séries fundamentais. Falha-se ao conceber estas ideias abstratas, e antes de tê-las, não podemos associá-las. Cantor ocasionalmente diz que suas séries fundamentais determinam números, mas contradiz-se a si próprio. Tudo o que foi alcançado é que algumas séries fundamentais são associadas a números racionais; mas não sucede nem mesmo a associar com certeza o número Um à série fundamental

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{\nu}{\nu+1}, \ldots$$

Ao invés disso, é reconhecida apenas a intenção de associá-la a um dos números iguais a Um, e “igual” aqui provavelmente não é usado no sentido de “coincidente com”. Resta questionável qual dos números iguais a Um deve ser associado à série. Pelo fato de que *soma*, *diferença*, *produto*, *igual*, *maior que*, *menor que* são definidos, contra nosso primeiro princípio, por partes, surge a falsa aparência de que aos signos numéricos é dado um significado. A teoria de Cantor não atinge de modo algum seu objetivo.

§ **85.** Acrescento aqui a consideração de uma diferente exposição que Cantor deu anteriormente[1]. Ele trata aqui das séries que ele futuramente nomearia séries fundamentais, e diz:

"Esta característica da série (1) eu expresso nas seguintes palavras: "A série (1) tem um determinado limite *b*".

Esta definição é defeituosa, pois a letra » *b* « que nela ocorre é substituída, em uma série com as mesmas características, por outro signo, por exemplo, *b'*. Por meio disto ocorre uma diferença nos termos explicados que não corresponde a nada na explicação. Se Cantor tivesse dito: "Esta característica da série (1) eu expresso nas seguintes palavras: "A Série (1) é uma série fundamental", esta objeção seria inválida; mas também seria obliterado tudo que está amarrado a este *b*. Então, as determinações que se seguem sobre a igualdade, magnitude, soma, produto de tal *b* seriam jogadas fora, e com isso tudo o que importa. Este é provavelmente o motivo pelo qual Cantor preferiu uma outra exposição mais tarde.

[1] Math. Annalen V, p. 123.