EL ESTUDIO DE LAS GEOMETRIAS NO EUCLIDEAS A COMIENZOS DEL SIGLO XX EN ESPAÑA. LA OBRA DE JOSE MARIA BARTRINA Y CAPELLA (1861-1946)

José Llombart Palet
Facultad de Ciencias.
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea
Lejona (Vizcaya)
Antonio Bernalte Millares
Facultad de Ciencias
UNED. Madrid

Viene siendo comúnmente aceptado el hecho de que la instauración en 1845 de una sección especial dedicada a las Ciencias físico-matemáticas dentro de la Facultad de Filosofía y Letras marca en nuestro país el inicio de la actividad científica, tal como hoy en día la entendemos, en estas disciplinas. La fundación, en 1847, de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid y la creación de la Facultad de Ciencias, con una Sección de Ciencias Exactas, auspiciada por la ley de Moyano (1857), determinan su afianzamiento. Rey Pastor, en su conocido discurso pronunciado en el Congreso de la AEPC en Valladolid (1915)[1], precisa, que "para la Matemática española, el siglo XIX comienza en 1865, y comienza con Echegaray", afirmando que durante los 25 años que transcurren desde esta fecha hasta 1890 tiene lugar "... un pujante

1. Rey Pastor, J. (1915): *Conferencia inaugural de la Sección de Ciencias Matemáticas del Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, 1, pp. 7-25.

renacimiento, (...) toda una renovación profunda" de la matemática española, debida a "... hombres educados antes de la Restauración, ávidos de cultura, que de la nada tuvieron que crearlo todo". Más adelante considera el período que va desde 1890 hasta 1915 como momento de anquilosamiento, de consolidación, pero no de progreso esencial en la ciencia matemática. Estas consideraciones de Rey Pastor, que han influido poderosamente en los historiadores de la Ciencia española, han sido puestas en tela de juicio, recientemente, por diversos autores[2].

Parece oportuno hoy, desde una perspectiva no tan inmediata como la de Rey Pastor, examinar con atención e interés la labor de quienes aportaron su contribución a la difusión de la cultura matemática europea en España, preparando los avances que se producirían en los años posteriores a aquel famoso discurso inaugural.

Nuestras recientes investigaciones en algunos aspectos de la matemática española de esta época creemos que conducirán una versión más matizada de las opiniones citadas, en concreto las referidas al papel de algunos matemáticos periféricos a los que no se ha venido prestando demasiada atención hasta ahora. No podemos dejar de citar un caso específico, el de la Geometría proyectiva, designada otras veces como pura, superior, moderna, sintética, de posición, de transversales,... la cual, según Klein, es la más importante entre las teorías geométricas dadas a conocer durante dicho siglo. Puede considerarse que José de Echegaray (1838-1916), con sus obras publicadas entre 1857 y 1865 siguiendo la línea de Chasles, fue el introductor en España de esta rama de la Geometría, que tuvo en Zoel García de Galdeano (1846-1924) uno de sus cultivadores más distinguidos. En Barcelona esta disciplina fue instaurada por Santiago Mundí y Giró (1840-1915), que siguió la ideas de Staudt inducido por el coronel Angel del Romero Walsh, publicando en 1883 los "Apuntes autografiados de geometría de posición". El más significado impulsor de esta teoría geométrica fue sin duda Eduardo Torroja y Caballé (1847-1918), siendo su obra más destacada el "Tratado de Geometría de la Posición y sus Aplicaciones a la Geometría de la Medida" (1884). Puede decirse que desde su cátedra de la Universidad de Madrid estableció una verdadera escuela en esta especialidad, siendo M. Vegas, Rey Pastor, Alvarez Ude y su propio hijo Antonio Torroja y Miret, los miembros más significativos de la misma. Según Rey Pastor[3], Torroja "continua la labor de Echegaray, adoptando el sistema geométrico de Chasles, y en 1884 lo sustituye por el de Staudt, introduciendo así en España la geometría y proyectiva sintética". Este hecho, tal como han señalado algunas autores, iba a incidir extraordinariamente en el proceso de modernización de la matemática española y, en particular, en la obra geométrica de Rey Pastor. El párrafo transcrito pone de manifiesto el sorprendente olvido hacia el papel desempeñado por Mundí como introductor en

2. Ausejo, E. y Hormigón, M. (1985): *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, IER, Logroño, pp. 163-174.
3. Ver, *La polémica de la ciencia española*, 1970, Alianza Ed., p. 468.

Barcelona de esta disciplina, lo que ha supuesto que ciertos historiadores posteriores hayan mantenido esta omisión.

También queremos volver a insistir en otro tema[4], no sólo por habernos dedicado a él con intenciones exhaustivas sino porque creemos que es muy significativo, si llegamos a sus recovecos más profundos, para desvelar el complejo entramado del mundo académico y la sociedad en que se desenvuelve. El establecimiento de las geometrías no euclídeas marcó uno de los hitos en la historia de las matemáticas del siglo XIX. Como es sabido la llamada geometría hiperbólica fue creada independientemente por N. I. Lobachevski (1829) y por J. Bolyai (1832), mientras que la geometría elíptica fue implantada por Riemann (1854). La difusión de estas teorías tuvo lugar años más tarde, entre 1866 y 1872, a partir de las traducciones francesas, italianas y alemanas. ¿Cómo y cuándo llegan estos conocimientos a España? Según Rey Pastor[1], "la Geometría no euclidiana y la de cuatro dimensiones" fueron "importadas por su fundador y Director [de la revista "El Progreso Matemático] el benemérito Galdeano, con la colaboración de Reyes Prósper, ... ". La primera referencia escrita de la que se tiene noticia data de 1878. Se trata de una nota a un artículo publicado en la revista barcelonesa "Crónica Científica" por el catedrático del Instituto de León, y más tarde de la Universidad de Madrid, José de Castro Pulido[5], en la que, escuetamente, se dice: "El célebre Lobachewsky, partiendo del principio de que *la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos*, escribió una geometría que él y otros creyeron tan perfecta como la de Euclides". Se observa que el desfase entre la propagación de estas disciplinas en el ámbito europeo y su llegada a España no reviste caracteres de extrema gravedad. No es aventurado suponer que entraran a través de las traducciones francesas de las obras originales, especialmente las debidas al profesor de la Universidad de Burdeos, G.J. Houel. La cuestión que hace referencia a la densidad, forma, originalidad y nivel de las aportaciones escritas por los matemáticos españoles ya es harina de otro costal. Hasta el fin del siglo estas contribuciones son obra casi exclusiva de tres progatonistas: Clariana, Reyes y Prósper, y García de Galdeano[4]. El primero publicó dos artículos en la ya citada "Crónica Científica". En uno de ellos (1884)[6], siguiendo a Tilly, espera "hacer algunas aclaraciones o detallar algunas

4. Bernalte, A., Llombart, J. y Viñas, J. (1988): " Introducción de las geometrías no-euclídeas en España", *Estudios sobre Historia de la Ciencia y de la Técnica*, II, Junta de Castilla y León, Valladolid, pp. 969-977.
1. Rey Pastor, J. (1915): *Conferencia inaugural de la Sección de Ciencias Matemáticas del Congreso de Valladolid a la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, 1, pp. 7-25.
5. Castro Pulido, J. (1878): *Crónica Científica*, I, núm. 4, p. 73.
6. Clariana, L. (1884): "Nociones de trigonometría general", *Crónica Científica*, VII, pp. 193-200.

fórmulas de la teoría, para su mayor inteligencia". En el otro (1890)[7], se muestra, paradójicamente, como un belicoso detractor de dichas geometrías. Ventura Reyes y Prósper (1863-1922) cuenta con dos breves artículos originales publicados en los prestigiosos "Mathematische Annalen"[8], en 1887 y en 1888, a los que Rey Pastor califica como "ingeniosas notas elementales firmadas por nuestro colega toledano"[9]. Ni que decir tiene que se trata de las aportaciones españolas más valiosas en la materia. También publicó algunos artículos divulgativos en "El Progreso Matemático" y en el "Archivo de Matemáticas". Zoel García de Galdeano publica en sus libros "Geometría Elemental" (1888) y en su "Geometría General" (1895) los primeros textos españoles en los que se hace referencia a la estructura de dichos sistemas geométricos.

El estudio de las geometrías no euclídeas a comienzos del siglo XX

En los primeros años del siglo XX se amplia la relación de autores que, de una forma u otra, se ocupan de estas geometrías. A destacar que hasta este momento no se produce la incorporación de los matemáticos formados en el ámbito madrileño, lo que quizá sea debido al fuerte influjo ejercido por las ideas de Torroja. Un comentario de García de Galdeano[10], en el que se "lamenta de la indolencia oficial para acometar la empresa de reformar los estudios superiores", hace pensar que no se explicaban específicamente estas disciplinas en nuestras facultades. En la décima edición de su obra "Geometría", que se utiliza como libro de texto en las Academias Militares, Ortega y Sala[11] complementa el epígrafe "obervaciones sobre el paralelismo de dos rectas" con una nota informativa sobre Geometría Euclidiana y no Euclidiana, que no sólo resulta algo confusa sino que incluso contiene ciertos errores. No deja de ser, por otra parte, curioso que en el párrafo 64 mencione el método seguido por Frolov para

7. Clariana, L. (1890): "Sobre el espíritu de las Matemáticas en los tiempos modernos", *Crónica Científica*, XIII, pp. 53-62.
8. Reyes y Prósper, V. (1886): "Sur la géometrie no-euclidienne", *Mathematische Annalen*, XXIX, pp. 154-156. (1888): "Sur les propietés graphiques des figures centriques", *Mathematische Annalen*, XXII, pp. 157-158.
9. Del Val, J.A. (1966): "Un lógico y matemático español del siglo XIX: Ventura Reyes y Prósper", *Revista de Occidente*, 35, pp. 252-261 y (1973): "Los escritos lógicos de Ventura Reyes y Prósper (1863-1922)", *Teorema, III*, 2-3, pp. 315-354.
10. García de Galdeano, Z. (1903): "Observaciones acerca de la carta abierta al Sr. Octavio de Toledo". *Gaceta de Matemáticas elementales (GME)*, I, pp. 76-78
11. Ortega y Sala, M. (1903):*Geometría, I*, 10ª ed., Madrid (1ª ed., 1885), pp. 26-27.

demostrar el postulado de Euclides, al que también se refirió A. Bozal[12] en un escrito publicado en 1905. Algunos autores, como Jiménez Rueda[13], el propio Bozal[14] y Thibinger[15], se refirieron de forma muy superficial a estas geometrías en determinadas publicaciones. Otro apartado está integrado por las reseñas de libros que tratan específicamente de este tema. Podemos incluir en este capítulo las recensiones de S. Moliné[16] al libro "Essai philosophique sur les géometries non euclidiennes" de L.J. Delaporte; de M. Vegas[17] a la obra "L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri, S.J."de G. Boccardini; y de J.A. Pérez del Pulgar[18] a la Memoria "Tratado didáctico de las Geometrías no ecuclídeas" de J.M. Bartrina, de cuyo contenido nos ocupamos más adelante. También J.J. Durán Lóriga[19] dedica breves párrafos a las geometrías no eculídeas en alguno de sus escritos. Sin olvidar una de las aportaciones de Doménech y Estapá, así como otra anterior de Mundí, que se inscriben dentro del marco de la polémica habida en Barcelona entre quienes defienden las nuevas ideas y quienes se oponen o se resisten a aceptarlas[20].

Un comentario especial merece el trabajo de Pérez del Pulgar[21] titulado "Nota sobre las geometrías analíticas no euclidianas". Consta de 46 páginas y se publicó como un apéndice solamente en la 2ª edición del libro "Tratado de

12. Bozal, A. (1905): Se trata de una referencia a una nota presentada en el Congreso de Grenoble de 1904 por el general Frolov titulada "Reflexión sur les hipothesis non-euclidiennes" *GME*, III, p. 98.
13. Jiménez Rueda, C.(1903): "Sobre los postulados en Geometría", *GME*, I, pp. 14-16.
14. Bozal, A. (1903)" Breve nota en la que hace referencia a la comunicación de M.M. Freycinet a la Ac. de Ciencias de París acerca de su libro "De l'experience en Géometrie", *GME, I*, p. 80 (1906): Biografía de P. Barbarin, *GME*, IV, pp. 1-3.
15. Thibinger, A. (1904): "La inversión en el triángulo rectángulo", *GME*, II, p. 173.
16. Moliné, S. (1903): "Las geometrías no euclidianas". *Revista de Aragón*, IV, p. 42.
17. Vegas, M. (1904): Recensión del libro "L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri, S.J.", Milán, 1904, *GME*, II, pp. 183-184.
18. Pérez del Pulgar, J.A. (1913): Nota bibliográfica de la Memoria de la RACAB titulada "Tratado didáctico de las Geometrías no euclídeas" de J. M. Bartrina, *Rev. de la Real Sociedad Matemática Española*, II, pp. 193-200.
19. Durán Lóriga, J.J. (1906): Repercusión del libro "Elementos de Geometría", Zaragoza, 1905, de F. Correa, *GME, IV*, pp. 29-32. Nota necrológica dedicada al teniente general belga J.M. Tilly, *GME, IV*, p. 161-162.
20. Viñas, J. (1987)" "El zero i l'infinit: la Geometría a Barcelona a tombant de segle", *50 anys de Ciencia i Técnica a Catalunya: en torn a l'activitat cientifica d'E Terrades (1883-1950)*, IEC, Barcelona, pp. 135-148.
21. Peréz del Pulgar, J. A. (1907): "Nota sobre las Geometrías analíticas no euclidianas", publicado en M. Vegas. *Tratado de Geometría Analítica*, II, 2ª ed. pp. 657-658.

Geometría Analítica" de Miguel Vegas. El texto se compone de los seis apartados siguientes: valor representativo del análisis, definiciones y postulados; definición de la geometría analítica como rama del análisis; espacios de dos dimensiones; espacios de tres dimensiones; y la interpretación espacial de la geometría analítica numérica. El autor se refiere a "los esfuerzos, más o menos felices, de los geómetras de todos los tiempos por dar a la analítica una base sólida"[22]. La formulación de cuestiones tales como"¿cuántas geometrías son posibles?, ¿cuál es el valor representativo de sus distintas proposiciones y expresiones algebraicas?, ¿por qué no han de ser todas ellas fecundas en aplicaciones prácticas o especulativas?"[22] le permite plantear el problema sobre el que da "en esta nota algunas ligeras indicaciones que hagan al lector formarse una idea del estado actual de este estudio, dándole, a la par, una síntesis general y comprensiva de las teorías desarrolladas en el cuerpo de la obra y útil para precisar la naturaleza y límites de la *geometría analítica*"[22].

Notas biográficas de J.M. Bartrina

No cabe la menor duda acerca de quién fue el autor más prolífico y constante en esta materia. Se trata de José María Bartrina y Capella, a cuya vida y obra se dedica fundamentalmente este trabajo. Nació en Valencia en 1861 donde se licencia en Ciencias Físico-Matemáticas en 1882. Durante el curso 1889-90 fue Profesor auxiliar de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia. En 1889 obtuvo por oposición la cátedra de Matemáticas del Instituto General y técnico de Tapia de Casariego (Asturias). Entre 1890 y 1894 lo encontramos desempeñando dicha cátedra en la Instituto de Gerona, pasando al de Barcelona en 1894, donde permanece hasta la fecha de su jubilación, acaecida en 1931. Fue Director de este último Instituto entre 1921-1931, siendo nombrado Director Honorario en 1932. En 1926 fue promovido al rango de Officer de l'Instructión Publique. Elegido el 23 de junio de 1913 Académico numerario de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, toma posesión el 14 de junio de 1914 y es adscrito a la Comisión de Matemáticas. Durante el bienio 1926-1928 fue Director de la Sección 1ª de dicha institución. El 24 de noviembre de 1946 falleció en Barcelona.

La obra de J.M. Bartrina

Fue autor de diferentes publicaciones, que se pueden dividir en dos apartados: los libros dedicados a los alumnos de 2ª Enseñanza y las Memorias presentadas a la RACAB. Entre las primeras, se tiene: "Tablas de logaritmos a cinco decimales

22. Pérez del Pulgar, ib. pp. 657-658.
22. Pérez del Pulgar, ib. pp. 657-658.

para los 10.800 primeros números y para los senos, tangentes, cotangentes y cosenos de un minuto en un minuto, seguidos de diferentes tablillas útiles y de una colección de fórmulas usuales" (1896); "Elementos de la Geometría Pura y de Trigonometría rectilínea" (1898); "Epítome de Geometría" (1900); "Nociones de Cosmografía y Geografía física" (1900); "Nociones de Aritmética universal" (1903); "Rudimentos de Geometría" (1903); "Aritmética para el primer año de Bachillerato" (1913); "Aritmética para el segundo año de Bachillerato" y "Trigonometría". De la mayoría de estos textos se hicieron varias ediciones. En la 3ª edición, de los "Elementos de Geometría Pura" (1905) se refiere -en una nota al enunciado del Postulado de las paralelas- a las Geometrías no euclídeas, tanto a la denominada *hiperbólica o pseudo-esférica*, como a la llamada *elíptica o esférica*. Es uno de los escasos textos de la época dirigidos a alumnos de Bachillerato en que se mencionan tales geometrías. Lo más interesante son, sin embargo, las Memorias presentadas a la RACAB entre las que figuran -aparte de las que se titulan: "Las construcciones geométricas" (1914), que es el discurso de recepción a la misma; "Poliedros de Arquímedes, convexos y estrellados" (1916); y "Sobre una cuestión de óptica" - los trabajos dedicados al estudio de las geometrías no euclídeas que pasamos a comentar.

"Tratado didáctico de las geometrías no euclídeas" (1908)[23]

Con esta obra el autor ganó en 1907 el premio Agell, instituído por la RACAB. En 1908 fue publicada en las "Memorias" de dicha Academia. El texto consta de 273 páginas y contiene 335 figuras. Se inicia con un prólogo, seguido de una introducción y está dividida en dos partes. El prólogo se subtitula "Ojeada histórica" y en el mismo se describen los hitos más significativos en el proceso de creación de las geometrías no euclídeas. Se hace una somera referencia a las tentativas habidas a lo largo de la historia para demostrar el *Postulado de Euclides*, poniendo de manifiesto como en el siglo XVIII Saccheri, Lambert y Legendre descubrieron "leyes y consecuencias que son los gérmenes de una geometría no-euclídea"[24]. Después de indicar que Gauss "desde 1792 estudiaba el trascendental problema y poseía ya en 1819 una geometría fundada en la negación del Postulado"[25] , da cuenta del importante papel desempeñado en la resolución del problema por las publicaciones *Ciencia absoluta del espacio* (1835), de Juan Bolyai y *Geometría imaginaria* (1835 y 1838), en la que Lobachevski daba a conocer sus investigaciones que "fueron expuestas, primero en 1826 en una lectura pública"[25]. Señala que estos trabajos pasaron inadvertidos hasta que, a la muerte de Gauss, se hizo pública la correspondencia mantenida

23. Bartrina, J.M. (1908): "Tratado didáctico de las geometrías no-euclídeas", *Memorias de la RACA de Barcelona*, 3ª época, VII, núm, 2, pp. 17-290.
24. Bartrina, ib. p. 18.
25. Bartrina, ib. p..19.
25. Bartrina, ib. p. 19.

entre éste y Schumacher. Más adelante describe como Riemann en su memoria *Sobre las hipótesis que sirven a base a la geometría* (1854) "descubrió otra importante fase del problema"[25]. Existen, por lo tanto, tres geometrías teóricamente posibles, que reciben las siguientes denominaciones: "una *vulgar, euclídea o parabólica*, que es la clásica o usual; y otras dos *no euclídeas o antieuclideas, la hiperbólica o pseudo-esférica*... y la *elíptica o esférica*"[26]. Expone como ninguna de ellas" ha sido desmentida hasta hoy por la experiencia", por lo que no es posible saber cual de las tres es la verdadera. Se refiere a la aversión que algunos matemáticos sienten hacia las Geometrías no euclídeas, advirtiendo que "esta repugnancia no cesa hasta que, avanzando en el estudio, la armonía que se descubre entre las diversas leyes, nos hace abandonar el lastre de falsos prejuicios sobre el espacio[26]. Se señala la existencia de detractores de estas teorías, aunque sus "objeciones son fácilmente refutables"[27]. Quizás lo más interesante del prólogo sean los párrafos que corresponden tanto a la justificación que el autor hace de su obra como a los objetivos que con la misma pretende alcanzar: "... resulta que las nuevas geometrías, aunque cuentan ya con una rica literatura, carecen de verdaderas obras didácticas; y, sobre todo, se nota la falta de un tratado elemental, en el que, sin apelar a grandes recursos de cálculo, se expongan las primeras nociones de la ciencia, haciéndolas así fácilmente asimilables, y preparando el acceso a las obras de los maestros".... "he puesto principal empeño en limitar los cálculos a los más sencillos, sin recurrir al manejo de integrales ni de otros poderosos instrumentos del análisis"... "estoy bien convencido de que el andamiaje que propongo para la construcción de los edificios anti-euclídeos, no estará exento de objeciones. ¿Cómo no ha de estarlo, tratándose de un ensayo en que no he tenido modelos que imitar? "[27].

La introducción contiene 15 páginas y lleva por título "Leyes independientes del Axioma XI de Euclides". El objeto de la misma reside en "exponer las más elementales leyes geométricas, que, siendo verdaderas independientemente de la verdad o falsedad del Axioma XI de Euclides, y constituyendo, por lo tanto, un cuerpo de doctrina indiscutible, han de servirnos de fundamento para penetrar en el campo de la Geometría no-euclidiana, denominada hiperbólica"[28]. Se advierte en una nota que casi todas las leyes que se recogen" "son también verdaderas en la hipótesis de Riemann"[28]. Se enuncian 99 leyes, que se agrupan bajo los siguientes apartados: leyes fundamentales, primeras nociones sobre los ángulos formados por dos rectas con una tercera, algunas propiedades del cuadrilátero convexo, condiciones de igualdad de dos triángulos y aplicaciones, relaciones entre los tres lados del triángulo y aplicaciones, comparación de los lados de un triángulo con los dos ángulos

26. Bartrina, ib, p. 20.
27. Bartrina, ib. p. 21.

28. Bartrina, ib. p. 24.

opuestos, triángulos con elementos comunes, algunas propiedades del círculo, de la normal al plano, del ángulo diedro, de la simetría, figuras de revolución, esférica, y del ángulo sólido. Se demuestran únicamente 9 proposiciones, que corresponden a aquellas que "no obstante ser independientes del Postulado euclídeo, suelen fundarlas en él los tratadistas"[28] y a las que no se prueban en los manuales de uso corriente.

La primera parte está dedicada a la "Geometría hiperbólica, pseudo-esférica, o de Gauss, Lobatschewsky y Bolyai" y se desarrolla a lo largo de 165 páginas. Se divide en dos capítulos. El primero se refiere a la "Geometría Pura", consta de 93 fragmentos, en los que figuran las definiciones y las proposiciones con sus correspondientes demostraciones, que se agrupan en los 13 apartados siguientes: teoría general de las paralelas; leyes descriptivas fundamentales de la Geometría hiperbólica; del ángulo de paralelismo; suma de los ángulos de un polígono; de los triángulos iguales, y de los que tienen 1, 2, ó 3 vértices infinitamente lejanos; relaciones entre las áreas de los polígonos y sus defectos; de la normal común a dos rectas o dos planos, que no se cortan ni son paralelos; de las ordenadas de una recta con relación a otra; elementos en el infinito de ideales; mediatrices de los lados, y bisectrices de los ángulos, en el triángulo; círculo, horiciclo o hiperciclo; esfera, horisfera e hiperesfera; y geometría de las figuras horisféricas. El segundo capítulo se titula "Trigonometría". Contiene 66 artículos distribuidos en 14 apartados: las funciones circulares y el imaginarismo; trigonometría de las figuras horisféricas; relaciones trigonométricas en el triángulo esférico rectángulo; relaciones trigonométricas, en un triángulo esférico cualquiera; las funciones hiperbólicas; dignando de una distancia, metro natural; expresiones diversas del ángulo de paralelismo; distancias y ángulos imaginarios; de los triángulos ideales; relaciones trigonométricas en el triángulo rectilíneo y rectángulo; relaciones trigonométricas en un triángulo rectilíneo cualquiera; longitud de un arco de ciclo; áreas; volúmenes.

La parte segunda se destina a estudiar la "Geometría elíptica esférica o de Riemann". Se divide en dos capítulos, que se titulan de la misma forma que los de la primera parte y se compone de 77 páginas. La "Geometría pura" comprende 69 artículos repartidos en 16 apartados, que son: conceptos fundamentales; distancia entre dos puntos, y ángulo de dos rectas; polígonos convexos, igualdad de triángulos, aplicaciones; de la normal al plano y de los ángulos diedros; círculo y esfera; polos de una recta y un plano; rectas recíprocas; hiperciclo, hiperesfera y pseudo-cilindro; de la normal común a dos rectas, que se cortan, o a dos planos; algunas propiedades riemannianas del diedro y del ángulo sólido; condiciones de igualdad de los triángulos rectángulos, aplicaciones; relaciones entre los lados de un polígono; relaciones entre los ángulos de un polígono; comparación de dos lados de un triángulo con los dos ángulos opuestos; algunas propiedades del cuadrilátero; y leyes comunes de las tres geometrías parabólica, hiperbólica y elíptica. La "Trigonometría" incluye 31 fragmentos agrupados en 5 apartados: teoría de las funciones circulares; relaciones trigonométricas en los triángulos esféricos y rectilíneos; metro natural, longitud de un arco de círculo; áreas; y volúmenes.

Para tener una idea del alcance y limitaciones de la obra resulta sumamente interesante examinar la recensión de la misma debida a Pérez del Pulgar[18], según la cual, dentro del marco de una exposición elemental que el autor ha escogido para desarrollar tales geometrías, "el orden es riguroso, la argumentación precisa, y aunque no falta alguna que otra demostración laboriosa, la claridad es grande en general y la obra resulta accesible a todo el que posea las nociones elementales de la geometría vulgar"[29]. Más adelante, afirma que "esta obra pone a nuestra disposición el primer tratado de este género que existe en castellano. Y, aunque en el extranjero existen ya numerosos tratados elementales de Metageometría, ninguno, que yo sepa, trata el problema tan lata y minucionamente"[29]. Esta declaración es tanto más notable en cuanto el comentarista es, como se ha indicado anteriormente, autor de un extenso ensayo sobre la geometría analítica no euclídea. Independientemente de la valoración positiva que el texto le merece, el articulista formula ciertas objeciones al mismo. En primer lugar, lamenta que Bartrina "se haya circunscrito a un marco tan reducido y no haya hecho al menos vislumbrar a sus lectores la amplitud inmensa y la fecundidad del campo de las geometrías transcendentes"[29]. Seguidamente, critica que sólo se utilicen en las demostraciones "los procedimientos elementalísimos de superposición, reducción al absurdo, etc."[30], considerando que el empleo del "cálculo (infinitesimal) y de la Geometría analítica que hoy puede considerarse como elemental, hubiese quizá abreviado y robustecido notablemente la exposición..."[31]. Finalmente, se opone a la interpretación que da el autor a las geometrías no euclídeas, "a pesar de ser la tradicional y clásica en la escuela de Lobatschewskij..."[31].

"Las Leyes gráficas en los espacios no euclídeos": (1922)[32]

Esta monografía se compone de 31 páginas, se ilustra con 28 figuras y su contenido se distribuye en estos once apartados: introducción; del paralelismo; elementos en el infinito; elementos ideales; elementos de las figuras planas y radiadas y de las series y haces de planos; condiciones que determinan una recta; condiciones que determinan un plano o un punto, orden y sucesión continua en los elementos de las figuras fundamentales; teorema de Desargues, cuadrilátero

18. Pérez del Pulgar, J.A. (1913): Nota bibliográfica de la Memoria de la RACAB titulada "Tratado didáctico de las Geometrías no euclídeas" de J. M. Bartrina, *Rev. de la Real Sociedad Matemática Española,* II, pp. 193-200.
29. Op. cit. en [18], p. 196.
30. Op. cit. en [18], p. 197.
31. Op. cit. en [18], p. 198.
32. Bartrina, J.M. (1922): "Las leyes gráficas en los espacios no-euclídeos", Memorias de la RACA de Barcelona, 3ª época, XVII, núm. 9, pp. 231-262.

completo, serie armónica; y las geometrías no euclídeas de la posición. El autor pretende "dejar sentado que, con ciertos convenios de lenguaje, coinciden en unos mismos enunciados las leyes gráficas de las tres geometrías parabólica, hiperbólica y elíptica"[33]. Las diferencias que existen entre dichas geometrías residen, esencialmente, en el problema de la "continuidad entre los elementos correspondientes de dos formas proyectivas"[33]. Para solventar este escollo se recurre no sólo a los elementos en el infinito, sino también al "ingenioso y fecundo artificio de los *puntos ideales*"[33], que fueron introducidos primero por Battaglini y que, posteriormente, fueron generalizados por Pasch y Klein entre otros. La mayor parte de la memoria se dedica a desarrollar la Geometría de la posición hiperbólica siguiendo el camino señalado por Staudt para la euclídea. A pesar de indicar que los puntos, rectas y planos ideales se pueden definir a través de conceptos estrictamente gráficos, tal como hizo Pasch, Bartrina considera "más ventajoso hacer intervenir en definiciones y razonamientos los elementos reales polares de los ideales, pues aunque con esto se admite una noción métrica (la noción de ortogonalidad), se facilita la exposición y se adquiere una imagen clarísima del espacio proyectivo"[34]. Se justifica que tanto la *línea del infinito* como la *superficie del infinito* son "curvas" en la geometría hiperbólica, mientras que *el punto del infinito* tiene el mismo significado en esta geometría y en euclídea. Con el objetivo de evitar confusiones en el momento de definir los elementos *ideales*, llama *no-geométricos, impropios o ficticios* tanto a éstos como a los infinitamente lejanos, mientras que los verdaderos elementos reciben el nombre de *geométricos, propios o reales*. Se introducen los conceptos de *punto ideal, polo, polar, recta lineal, plano ideal, plano polar, línea ideal, superficie ideal, ángulo completo, ángulos adyacentes, diedro*,..., que se complementan con diferentes propiedades y proposiciones. A la Geometría de Riemann se le dedica menor atención, ya que son aplicables a ellas las leyes gráficas de la Geometría euclídea. Con el objeto de alcanzar una mayor claridad, el autor propone sustituir "en los enunciados euclídeos la palabra *punto* por la de *bipunto*, entendiendo por tal el punto de que se trata y su opuesto"[35]. La memoria concluye con unas reflexiones que ponen de manifiesto la naturaleza de los cambios que es preciso efectuar en la Geometría de la posición, establecida a partir del método de Staudt, para adecuarla a las hipótesis no euclídeas.

33. Bartrina, ib. p. 231.
34. Bartrina, ib. p. 232.
35. Bartrina, ib. p. 255.

"La métrica de las figuras ficticias en la Geometría Pseudo-esférica" (1932)[36]

Este ensayo está compuesto por 49 páginas y tiene 59 figuras. Está dividido en los 15 apartados siguientes: objeto de esta Memoria; puntos, rectas y planos límites o ideales; distancia entre dos puntos; ángulos de dos rectas, situadas en un plano real; àngulo de dos planos y de una recta con un plano; distancias de un punto de una recta y a un plano; fórmulas trigonométicas fundamentales; triángulos opuestos asociados, ortométricos y polares; la Trigonometría en el plano real; la Trigonometría del triedro de vértice real, ideal o límite; resumen de la Trigonometría; y aplicaciones. Este trabajo complementa la memoria anterior, en la que se estudian las figuras *ficticias*, que son las que poseen elementos *ideales* o *límites*, desde un punto de vista meramente descriptivo, mientras que aquí se tratan bajo su aspecto métrico. Se demuestra que "las relaciones trigonométricas de los triángulos y triedros, propiamente dichos, subsisten para los ficticios o sus opuestos, con los mismos vértices o aristas, mediante una adecuada interpretación de los valores que deben atribuirse a sus distancias y ángulos impropios"[37]. El autor pone de manifiesto la importancia de esta generalización, ya que "entraña, a su vez, la referente a otras figuras, cuyas leyes métricas dependen en último término de las que rigen a triángulos y triedros. Además, facilita las investigaciones, al permitir la aplicación de los mismos principios a las diversas variedades de una figura; descubre la verdadera significación de ciertos enunciados geométricos en diversos casos en que no se cumplen o carecen de sentido; y, por último, posibilita la institución de una Analítica general, pseudo-esférica, cuyas ecuaciones y fórmulas quedarían sujetas a ciertas restricciones, si no viniera en su auxilio el ingenioso artificio de los elementos límites e ideales"[37].

"Estudios de Geometría analítica no-euclídea" (1940)[38]

Esta memoria fue leída en 1936 pero, por razones obvias, no vió la luz hasta el año 1940. Abarca 69 páginas, contiene 39 figuras y está dividida en los 16 apartados siguientes: preliminares; elementos ficticios del espacio gaussiano; del cuadrilátero que posee 2 ó 3 ángulos rectos; coordenadas; transformación de coordenadas; ecuaciones de la recta; distancias y ángulos; puntos y rectas condicionados; tangente y normal a una curva; puntos límites e ideales, asíntotas; círculo, horiciclo e hiperciclo; elipse, hipérbola y parábola, con focos

36. Bartrina, J.M. (1932): "La métrica de las figuras ficticias en la Geometría Pseudoesférica", Memorias de la RACA de Barcelona, 3ª época, XXII, núm. 5, pp. 123-172.
37. Bartrina, ib. p. 123.
38. Bartrina, J.M. (1940): "Estudios de Geometría Analítica no-euclídea", Memorias de la RACA de Barcelona, 3ª época, XXV, núm. 17, pp. 379-447.

reales; variedades de la hipérbola en la Geometría pseudo-esférica; longitud de un arco; áreas. Tal como su propio título deja entender en este trabajo se expone la Geometría analítica correspondiente a las geometrías de Lobachevski y Riemann. Los problemas estudiados se tratan simultáneamente o sucesivamente. Los procedimientos que se emplean en ambas son análogos. Los cálculos que son válidos para una de ellas subsisten para la otra gracias a una simple transformación, que obedece al siguiente supuesto: "toda ley métrica entre las distancias a, b, c,... de una figura, sea o no plana, instituida en uno de los dos supuestos no-euclídeos, subsiste para el otro, como asimismo su demostración, para las distancias -ai, -bi, -ci,..., con tal que las deducciones resulten exclusivamente de cálculos efectuados con ecuaciones trigonométricas de triedros y triángulos o de otras figuras que posean la misma propiedad correlativa de aquéllos"[39]. Esta reciprocidad se observa más claramente utilizando los denominados elementos *impropios (límites o ideales)*. Estos conceptos se definen, tal como se expone en la memoria anterior, con independencia de todo sistema de coordenadas, lo que conduce al importante resultado ya comentado: "los triángulos ficticios (o sus opuestos con los mismos vértices) se rigen por la misma Trigonometría que los geométricos"[40].

Es conocido el escaso interés manifestado por la mayoría de los autores españoles de la época por dar a conocer las fuentes en las que se inspiraban sus trabajos. Dejando a un lado las referencias obligadas hacia los creadores de estas geometrías y a sus precursores, que figuran en la introducción histórica de su "Tratado didáctico", lo cierto es que en el conjunto de los textos mencionados Bartrina sólo cita específicamente a Battaglini, a Gérard, y a Barbarin, nombrando de paso a Legendre, Klein, Pasch y Staudt. Al comparar las obras anteriormente citadas con los diferentes textos extranjeros a los que el autor hubiera podido tener acceso, se observa que éstos no influyeron especialmente en aquellas, dicho esto con las lógicas reservas que esta afirmación exige.

39. Bartrina, ib. p. 380.
40. Bartrina, ib. p. 381.