Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 31, No. 2, 2013, pág. 147–152

Estimativos L^2 para una clase de operadores pseudodiferenciales definidos en el toro

Duván Cardona*

Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, A.A 25360, Cali, Colombia.

Resumen. En este trabajo se establecen estimativos L^2 para operadores pseudodiferenciales definidos en el toro. Los operadores considerados surgen del estudio de operadores entre grupos abelianos localmente compactos.
Palabras claves: Operadores pseudo-diferenciales, continuidad en L^2, grupos localmente compactos.
MSC2010: 47G30, 65R10.

L^2-Estimates for a class of pseudo-differential operators defined on the torus

Abstract. In this work we establish L^2 estimates from pseudo-differential operators defined on the torus. Such operators arise from the study of operators on locally compact abelian groups.
Keywords: Pseudo-differential operators, L^2-boundedness, locally compact groups.

1. Introducción

La teoría de operadores sobre grupos abelianos localmente compactos es de reciente intéres debido a sus aplicaciones a problemas diferenciales periodicos, (es decir, ecuaciones diferenciales que relacionan funciones periodicas) y se ha desarrollado ampliamente durante los últimos 10 años. La cuantización de operadores definidos en el toro unidimensional se atribuye a Mikhail S. Agranovich (véase [1]). En trabajos recientes, M. Ruzhansky y V. Turunen, han definido operadores pseudo-diferenciales en el toro $n-$dimensional $\mathbb{T}^n$ (véase [6], y [7]) y han desarrollado un cálculo simbólico de tales operadores desde un marco general orientado al cálculo de diferencias finitas. M.W. Wong y S. Molajajloo han establecido estimativos L^p para operadores pseudodiferenciales definidos en $\mathbb{S}^1$, (véase [5]). La teoría de operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{R}^n$ con símbolos en las clases de Hörmander $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ es una conocida herramienta para estudiar problemas de

* *E-mail*: duvanc306@gmail.com.
Recibido: 20 de agosto de 2013, Aceptado: 19 de noviembre de 2013.

ecuaciones en derivadas parciales (véase [8]). M. Ruzhansky y V. Turunen definen operadores con símbolos toroidales en las clases $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ (véase [6]); la idea de considerar símbolos definidos en $\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n$ se debe a que el grupo dual del toro $n-$dimensional puede ser identificado con $\mathbb{Z}^n$. Hacia los años 70, A. Calderón y R. Vaillancourt ([3]) demostraron la continuidad L^2 de operadores con símbolos en la clase $S^0_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, luego, L. Hörmander y C. Fefferman comprobaron la continuidad de tales operadores sobre L^p con $1<p<\infty$, (véase [2]). En cuanto a operadores toroidales con símbolos en las clases de Hörmander $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$, J. Delgado ha dado un acento definitivo al demostrar la continuidad L^p, $1<p<\infty$, para $m<0$ y continuidad L^2 para el caso $m=0$, (véase [4]). En este trabajo se construye una prueba alternativa del resultado establecido por J. Delgado [4] sobre la continuidad L^2 de operadores con símbolos en $S^0_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$; para esto, se emplea un método que permite extraer información de la transformada de Fourier del símbolo y utilizar la finitud de la medida de Lebesgue sobre el toro. A diferencia de operadores en $\mathbb{R}^n$, la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ no es finita; esto no fue problema para L. Hörmander y C. Fefferman, pues el método que emplearon consiste de estimativos sobre el núcleo aplicando la teoría de operadores integrales singulares de Calderón-Zigmund.

2. Preliminares

Una función ϕ definida en $\mathbb{Z}^n$ con valores complejos pertenece a la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, si para todo entero positivo N existe $C_N>0$ tal que $|\phi(\xi)|\leq C_N\langle\xi\rangle^{-N}$ para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$, donde $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$. La transformada de Fourier de una función $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ viene dada por

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{T}^n}e^{-i2\pi x\xi}f(x)dx,\ \ \xi\in\mathbb{Z}^n. \tag{1}$$

La transformada de Fourier es una biyección continua de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ sobre $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Una función f sobre la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ puede reconstruirse a partir de la transformada de Fourier por medio de la fórmula de inversión, la cual establece que

$$f(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}e^{i2\pi x\xi}\widehat{f}(\xi),\ \ x\in\mathbb{T}^n. \tag{2}$$

Dado $s\in\mathbb{R}$, se define el espacio de Sobolev de orden s, $H^s(\mathbb{T}^n)$ como el conjunto de funciones f definidas en $\mathbb{T}^n$ tales que $\langle\xi\rangle^s\widehat{f}\in L^2(\mathbb{Z}^n)$. Cada $H^s(\mathbb{T}^n)$ es un espacio de Hilbert dotado del producto interno $\langle f,h\rangle_{H^s(\mathbb{T}^n)}=\langle\langle\xi\rangle^{2s}\widehat{f},\widehat{h}\,\rangle_{L^2(\mathbb{Z}^n)}$.

La noción de derivada de funciones definidas en $\mathbb{Z}^n$ está ligada al operador de diferencias Δ_ξ. Así, para una funcion ϕ sobre $\mathbb{Z}^n$ y $j=1,...,n$, Δ_{ξ_j} es el operador definido por

$$\Delta_{\xi_j}\phi(\xi)=\phi(\xi+e_j)-\phi(\xi),$$

donde $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ es la base canónica usual de $\mathbb{R}^n$. Si $\alpha_i\in\mathbb{N}$, entonces $\Delta^{\alpha_i}_{\xi_j}$ es la α_i-ésima autocomposición. Para $\alpha\in\mathbb{N}^n$, se define $\Delta^\alpha_\xi=\Delta^{\alpha_1}_{\xi_1}\cdots\Delta^{\alpha_n}_{\xi_n}$.

Se introduce a continuación la clase de símbolos toroidales definidos en $\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n$.

Definición 2.1. Sea $0 \leq \rho, \delta \leq 1$. Se define la clase toroidal de símbolos $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ como el conjunto de funciones $\sigma(x,\xi)$ tales que

$$|\sigma^\alpha_\beta(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \tag{3}$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$, y $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Aquí $\sigma^\alpha_\beta = \Delta^\alpha_\xi \partial^\beta_x \sigma$.

Sea $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$; el operador pseudodiferencial asociado a σ está definido por

$$Op(\sigma)(f)(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x\xi}\sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi). \tag{4}$$

M. Ruzhansky y V. Turunen han establecido las siguientes expansiones asintóticas para el operador adjunto y la composición de operadores toroidales (véase [6, 7]).

Teorema 2.2 (Operador adjunto). *Sea $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Si $Op(\sigma)$ es un operador toroidal con símbolo en $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, entonces, el operador adjunto de $Op(\sigma)$, $Op^*(\sigma)$, es un operador pseudo-diferencial en $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, y su símbolo tiene expansión asintótica,*

$$\sigma^*(x,\xi) \approx \sum_{\gamma\geq 0} \frac{1}{\gamma!}\Delta^\alpha_\xi D^{(\gamma)}_x \overline{\sigma(x,\xi)}. \tag{5}$$

Teorema 2.3 (Composición). *Sea $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. La composición $Op(\tau) \circ Op(\sigma)$ de dos operadores pseudodiferenciales con símbolos $\tau \in S^l_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ y $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ es un operador pseudodiferencial, y su símbolo toroidal $\psi(x,\xi) \in S^{l+m}_{\rho,\delta}$ tiene expansión asintótica,*

$$\psi(x,\xi) \approx \sum_{\gamma\geq 0} \frac{1}{\gamma!}\Delta^\gamma_\xi \tau(x,\xi) \cdot D^{(\gamma)}_x \sigma(x,\xi). \tag{6}$$

3. Estimativos L^2

En [4] J. Delgado establece la continuidad $\mathtt{L}^\infty - \mathtt{BMO}$ de operadores pseudodiferenciales con símbolos en las clases $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, $m < 0$, y por interpolación real concluye la continuidad L^p, $1 < p < \infty$. En esta sección demostraremos tal resultado en L^2 empleando un método diferente; dicho método consiste en extraer información de la transformada de Fourier del símbolo. Como se observará, cuando se tiene continuidad L^2 para símbolos en las clases $S^m_{\rho,\delta}$ con m suficientemente negativo, se obtiene rápidamente el mismo resultado en las clases $S^0_{\rho,\delta}$; un detalle interesante prima en la continuidad de tales clases, pues no presenta las dificultades del resultado análogo en $\mathbb{R}^n$, para el cual la teoría de operadores integrales singulares de Calderón-Zigmund desempeña un papel decisivo. A favor se tienen un hecho bastante simple: el toro es un espacio de medida finita, considerando sobre él la medida de Lebesgue.

Presentamos a continuación un elegante estimativo debido a M. Ruzhansky y V. Turunen.

Teorema 3.1. *Sea $m \in \mathbb{R}$. Todo operador pseudodiferencial con símbolo toroidal en $S^m_{0,0}$ se extiende a un operador acotado de $H^s(\mathbb{T}^n)$ sobre $H^{s-m}(\mathbb{T}^n)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Consultar la Proposición 4.4.5 de [6]. ☑

Imponiendo condiciones sobre $m < 0$, demostramos a continuación que todo operador con símbolo en $S^m_{\rho,\delta}$ es continuo sobre $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 3.2. *Sean* $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, $q \in \mathbb{N}$, $q > n/2$ *y* $m < -\delta \cdot 2q$. *Sea* $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. *Entonces el operador pseudodiferencial* $Op(\sigma)$ *es continuo de* $L^2(\mathbb{T}^n)$ *en* $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Demostración. Tómese $q > \frac{n}{2}$ entero positivo. Denótese $\mathcal{L}_x$ al operador de Laplace en $\mathbb{T}^n$ (es decir, el operador con símbolo asociado $\sigma(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2)$. Por un cálculo directo se puede establecer que el operador de Laplace satisface la igualdad

$$(I - \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{L}_x)e^{i2\pi xz} = \langle z\rangle^2 e^{i2\pi xz}, \tag{7}$$

para todo $z \in \mathbb{Z}^n$. Aplicando la ecuación (7) y haciendo integración por partes se obtiene:

$$\begin{aligned}
|\widehat{\sigma}(\eta-\xi,\xi)| &= \langle \eta-\xi\rangle^{-2q}\langle \eta-\xi\rangle^{2q}|\widehat{\sigma}(\eta-\xi,\xi)| \\
&= \langle \eta-\xi\rangle^{-2q}\langle \eta-\xi\rangle^{2q}\left|\int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x(\eta-\xi)}\sigma(x,\xi)dx\right| \\
&= \langle \eta-\xi\rangle^{-2q}\left|\int_{\mathbb{T}^n} \langle \eta-\xi\rangle^{2q} e^{-i2\pi x(\eta-\xi)}\sigma(x,\xi)dx\right| \\
&= \langle \eta-\xi\rangle^{-2q}\left|\int_{\mathbb{T}^n} ((I-\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{L}_x)^q e^{-i2\pi x(\eta-\xi)})\sigma(x,\xi)dx\right| \\
&= \langle \eta-\xi\rangle^{-2q}\left|\int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x(\eta-\xi)}(I-\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{L}_x)^q \sigma(x,\xi)dx\right| \\
&\leq \langle \eta-\xi\rangle^{-2q}\int_{\mathbb{T}^n}\left|(1-\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{L}_x)^q\sigma(x,\xi)\right|dx \\
&\leq \langle \eta-\xi\rangle^{-2q}\int_{\mathbb{T}^n} C_q\langle\xi\rangle^{m+\delta\cdot 2q}dx \\
&\leq C_q\langle \eta-\xi\rangle^{-2q}.
\end{aligned}$$

De otro lado, empleando la Proposición 4.4.5 de [6],

$$\begin{aligned}
\|Op(\sigma)u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{Op(\sigma)u}(\eta)|^2 \\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}|\widehat{\sigma}(\eta-\xi,\xi)||\widehat{u}(\xi)|\right)^2 \\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}C_q\langle\eta-\xi\rangle^{-2q}|\widehat{u}(\xi)|\right)^2 \\
&= C_q^2\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left(\langle\eta\rangle^{-2q} * |\widehat{u}|\right)^2(\eta)
\end{aligned}$$

Por tanto, usando la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned}\|Op(\sigma)u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} &\le C_q\|\langle\eta\rangle^{-2q}\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)}\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{Z}^n)}\\ &= C_q\|\langle\eta\rangle^{-2q}\|_{L^1(\mathbb{Z}^n)}\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}.\end{aligned}$$ ☑

Teorema 3.3. *Sean $0 \le \delta < \rho \le 1$ y $m < 0$. Sea σ un símbolo en $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Entonces el operador pseudodiferencial $Op(\sigma)$ es continuo de $L^2(\mathbb{T}^n)$ en $L^2(\mathbb{T}^n)$.*

Demostración. Claramente,

$$\|Op(\sigma)u\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \langle Op^*(\sigma) \circ Op(\sigma)u, u\rangle .$$

Es suficiente demostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k = (Op^*(\sigma) \circ Op(\sigma))^k$ es continuo de $L^2(\mathbb{T}^n)$ sobre $L^2(\mathbb{T}^n)$. Debido al Teorema 2.3, T^k tiene símbolo en $S^{mk}_{\rho,\delta}$; así, para k suficientemente grande la continuidad se sigue del Teorema 3.2. ☑

Para extender el Teorema 3.3 al caso $m = 0$ se requiere del siguiente lema, cuya demostración puede consultarse en [4].

Lema 3.4. *Sean $a(x,\xi) \in S^0_{\rho,\delta}$ y $c > 0$ tales que $a(x,\xi) \ge c$. Entonces, $\sigma(x,\xi) = a(x,\xi)^{1/2}$ es un símbolo toroidal en $S^0_{\rho,\delta}$.*

Observación 3.5. La demostración del siguiente teorema es análoga a la establecida en el marco euclidiano de operadores en $\mathbb{R}^n$ (véase [8]).

Teorema 3.6. *Sea $0 \le \delta < \rho \le 1$. Todo operador con símbolo en $S^0_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ es continuo sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Considere el operador $T = Op(\tau) = Op^*(\sigma) \circ Op(\sigma)$. Por el Teorema 2.3, T tiene símbolo en $S^0_{\rho,\delta}$; se sigue de esto que el símbolo de T, $\tau(x,\xi)$ es una función acotada. Hagamos

$$|\tau(x,\xi)| \le M - b,$$

con $b > 0$. Se tiene entonces que

$$M - \operatorname{Re}\tau(x,\xi) \ge b > 0.$$

Del Lema 3.4 se sigue que

$$a(x,\xi) = (M - \tau(x,\xi))^{1/2} \in S^0_{\rho,\delta};$$

además,

$$Op^*(a) \circ Op(a) = M - Op(\tau) + Op(r),$$

donde $r(x,\xi) \in S^{-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}$ es un símbolo que proviene de la expansión asintótica. Aplicando el Teorema 3.3 con $m = -(\rho - \delta)$, se tiene

$$\begin{aligned}M\|u\|^2_{L^2} - \|Op(\sigma)(u)\|^2_{L^2} &= \|Op(a)u\|^2_{L^2} - \langle Op(r)u, u\rangle\\ &\ge -C\|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|Op(\sigma)u\|^2_{L^2} \le (M + C)\|u\|^2_{L^2}.$$ ☑

Agradecimientos. El Autor agradece los comentarios hechos por los arbitro, con los cuales se mejoró la presentación de este artículo.

Referencias

[1] Agranovich M.S., "Spectral properties of elliptic pseudo-differential operators on a closed curve", *Funct. Anal. Appl.* 13 (1979), 279–281.

[2] Ashino R., Nagase M., and Vaillancourt R., "Pseudo-differential Operators on L^p spaces", *Cubo* 6 (2004), no. 3, 91–129.

[3] Calderón A. and Vaillancourt R., "On the boundedness of pseudo-differential operators", *J. Math. Soc. Japan* 23 (1971), 374–378.

[4] Delgado J., "L^p bounds for pseudo-differential operators defined on the torus", *Operators Theory: Advances and Applications* 231 (2013), 103–116.

[5] Molahajloo S. and Wong M.W., "Pseudo-Differential operators on $\mathbb{S}^1$", in *New developments on Pseudo-Differential operators*, Eds. Luigi Rodino and M.W. Wong. (2008), 297–306.

[6] Ruzhansky M. and Turunen V., *Pseudo-differential Operators and Symmetries: Background Analysis and Advanced Topics*, Birkhaüser-Verlag, Basel, 2010.

[7] Ruzhansky M. and Turunen V., "Quantization of Pseudo-Differential Operators on the Torus", *J. Fourier Annal Appl.* 16 (2010), 943–982.

[8] Taylor M., "Pseudodifferential Operators", *Four Lectures at MSRI*, September 2008, p. 16.

[9] Wong M.W., "Discrete Fourier Analysis", Birkhaüser: Germany, 2011.