Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 30, No. 2, 2012, pág. 91–106

Continuos y el producto simétrico suspensión

Franco Barragán*, Jesús F. Tenorio

Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Física y Matemáticas, 69000, Huajuapan de León, Oaxaca, México.

Resumen. En este artículo presentamos una breve introducción a la teoría de los continuos y sus hiperespacios. Nos enfocamos en algunos modelos geométricos del producto simétrico suspensión de un continuo y mostramos resultados acerca de conexidad local y arcoconexidad de este espacio.
Palabras claves: Continuo, hiperespacio de un continuo, producto simétrico suspensión, conexidad local y arcoconexidad.
MSC2010: 54B20, 54C05, 54F15

Continua and the Symmetric Product Suspension

Abstract. In this paper we present a short introduction to continuum theory and its hyperspaces. We focus our attention on some geometric models of the symmetric product suspensions of a continuum and we show results on local connectedness and arcwise connectedness of this space.
Keywords: Continuum, hyperspace of a continuum, symmetric product suspension, local connectedness and arcwise connectedness.

1. Introducción

Las primeras nociones del concepto de continuo fueron dadas en 1883 por G. Cantor [3]. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un hiperespacio de un continuo X es una colección de subconjuntos de X que satisface ciertas condiciones específicas. Los hiperespacios tuvieron sus inicios aproximadamente en 1900, con los trabajos de F. Hausdorff [9] y L. Vietoris [31].

Los primeros hiperespacios de un continuo X que se consideraron fueron el hiperespacio que consiste de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos, denotado por 2^X, y el hiperespacio que consiste de todos los subcontinuos de X, denotado por $C(X)$. En 1922 L. Vietoris inicia el estudio de los conceptos relacionados con la noción de continuo en hiperespacios [31].

Considerando un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números enteros positivos, en 1931, K. Borsuk y S. Ulam introducen el hiperespacio $F_n(X)$ al que llamaron

* Autor para correspondencia: *E-mail*: franco@mixteco.utm.mx
El presente trabajo fue apoyado por el proyecto PROMEP/103.5/11/4427.
Recibido: 06 de febrero de 2012, Aceptado: 30 de agosto de 2012.

el *n-ésimo producto simétrico* de X [2], y lo definen como $F_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset$ y A tiene a lo más n puntos$\}$. Un hiperespacio que tuvo sus inicios en 1939, con M. Wojdyslawski [34], es $C_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset$ y A tiene a lo más n componentes$\}$. S. Macías reconsideró este hiperespacio $C_n(X)$ en el año 2001 [18] y lo llamó *n-ésimo hiperespacio* de X. Cabe señalar, que hasta entonces nadie se había encargado de su estudio.

Por otra parte, Sam B. Nadler Jr. [27] inició el estudio de los hiperespacios suspensión en 1979, al considerar el espacio cociente $HS(X) = C(X)/F_1(X)$, al que llamó el *hiperespacio suspensión* del continuo X. Posteriormente, en el año 2004, R. Escobedo, M. de J. López y S. Macías profundizaron el estudio del hiperespacio suspensión en [4]. Más tarde, en el mismo año, S. Macías genera- lizó el estudio de los hiperespacios suspensión, al considerar el espacio cociente $HS_n(X) = C_n(X)/F_n(X)$, al que denominó el *n-ésimo hiperespacio suspensión* del continuo X [20]. En el año 2008, J. C. Macías analiza el espacio cociente $PHS_n(X) = C_n(X)/F_1(X)$, al que llamó el *n-ésimo pseudohiperespacio suspensión* del continuo X [15].

Siguiendo esta línea de investigación, dados un continuo X y $n \geq 2$, en 2010 iniciamos el estudio del espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, el cual denotamos como $SF_n(X)$ y lo llamamos el *n-ésimo producto simétrico suspensión* de X [1]. Continuando con la temática de la investigación entre cocientes de hiperespacios ([4], [15] , [20] y [27]), analizamos propiedades que son compartidas por un continuo y su n-ésimo producto simétrico suspensión.

El objetivo de este escrito es realizar una pequeña introducción a la teoría de los continuos y sus hiperespacios, enfocada al producto simétrico suspensión de un continuo. Lo hemos organizado en cuatro secciones.

En la segunda sección introducimos algunas clases de continuos y mostramos algunas técnicas de cómo construir nuevos continuos a partir de continuos dados.

La tercera sección la dedicamos a realizar una breve introducción a los hiperespacios, mostramos algunos modelos geométricos y mencionamos algunos resultados que se conocen respecto a la arcoconexidad y conexidad local.

Finalmente, en la cuarta sección definimos el n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo. Damos modelos geométricos del segundo producto simétrico suspensión de algunos continuos específicos. Además, mostramos algunos resultados que se tienen en cuanto a la conexidad local y la arcoconexidad del producto simétrico suspensión de un continuo.

2. Continuos

Para un bosquejo de la historia de la teoría de los continuos podemos consultar [5].

Definición 2.1. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo que está contenido en algún espacio topológico.

A continuación, damos algunos ejemplos de continuos, los cuales serán de utilidad para nuestros objetivos. Por tal motivo, a cada uno de estos continuos le damos una notación específica.

Ejemplo 2.2. El intervalo cerrado $[0, 1]$ es un continuo que denotamos por I. Un *arco* es un espacio homeomorfo a I. Dado un arco A, sea $h : [0, 1] \to A$ un homeomorfismo. Pongamos $h(0) = p$ y $h(1) = q$. En este caso, decimos que los *puntos extremos* de A son los puntos p y q, o bien, decimos que A es un arco que une a los puntos p y q.

Ejemplo 2.3. El conjunto $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es un continuo, que se conoce como circunferencia unitaria. Cualquier continuo homeomorfo a S^1 se llama *curva cerrada simple*.

Ejemplo 2.4. Se sabe que el producto cartesiano de una familia a lo más numerable de continuos es un continuo. Como aplicación de este hecho, se tiene el continuo conocido como el *cubo de Hilbert*, el cual se denota y define como $\mathcal{Q} = \prod_{k=1}^{\infty} I_k$, donde $I_k = I$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Si consideramos un número natural, digamos n, el producto $I^n = \prod_{k=1}^{n} I_k$, donde $I_k = I$, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, es un continuo que se le llama *n-celda*.

Ejemplo 2.5. Un *triodo simple* T es la unión de tres arcos I_1, I_2 e I_3 que coinciden exactamente en un punto extremo p y tales que, por pares, los conjuntos $I_1 \setminus \{p\}$, $I_2 \setminus \{p\}$ e $I_3 \setminus \{p\}$ son disjuntos.

Otra manera de construir continuos a partir de una familia de continuos dada es mediante el siguiente resultado, el cual puede verificarse, por ejemplo, en [28, Teorema 1.8, p. 6].

Teorema 2.6. *Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de continuos tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$. Entonces $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo.*

Utilizando el Teorema 2.6, se pueden construir continuos muy interesantes, como la Curva universal de Menger [25] y la Carpeta de Sierpinski [28, Ejemplo 1.11, p. 9].

Ahora bien, un tipo especial de continuos son las compactaciones del rayo $[0, \infty)$.

Definición 2.7. Una *compactación del rayo* $[0, \infty)$ es un espacio compacto X que contiene un subconjunto S denso en X y homeomorfo a $[0, \infty)$. En tal caso, el conjunto $R = X \setminus S$ se llama el *residuo* de X.

Dentro de la clase de los continuos que son compactaciones del rayo $[0, \infty)$, existe una familia de continuos que es muy importante para este trabajo, pues en ella podemos aplicar algunos de nuestros resultados principales.

Ejemplo 2.8. Un *continuo de Elsa* [26, p. 329] es un continuo que es una compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo un arco, y se denota como E-continuo. Un ejemplo particular de un E-continuo es el bien conocido continuo $\mathsf{sen}(\frac{1}{x})$ (también llamado curva del topólogo). Cabe señalar que existe una cantidad no numerable de E-continuos topológicamente diferentes [26, p. 330].

Definición 2.9. Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X es *localmente conexo en* x, si para cada abierto U de X tal que $x \in U$, existe un abierto y conexo V en X tal que $x \in V \subset U$. El continuo X es *localmente conexo*, si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

En algunas referencias, por ejemplo [28, p. 119], los continuos localmente conexos son conocidos como continuos de Peano. Los continuos que presentamos en los Ejemplos 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 son localmente conexos. Sin embargo, los E-continuos, Ejemplo 2.8, no son localmente conexos.

Definición 2.10. Un continuo X es *arcoconexo*, si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existe un arco A en X con extremos x y y.

Los continuos de los Ejemplos 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5, además de ser localmente conexos, son arcoconexos. De hecho, se tiene el siguiente resultado cuya prueba se encuentra en [28, Teorema 8.23, p. 130].

Teorema 2.11. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces X es arcoconexo.*

El recíproco del Teorema 2.11 no es verdadero (ver [28, Ejercicio 10.58, p. 192]). Además, existen continuos que no son localmente conexos ni arcoconexos, como los E-continuos del Ejemplo 2.8.

Dado un continuo, una forma de obtener otros continuos es pegar o identificar algunos de sus puntos. Esta es la idea intuitiva de espacio cociente. Antes de dar la definición formal de estos espacios, necesitamos de la siguiente:

Definición 2.12. Una *descomposición (o partición)* de un espacio métrico X, es una colección de subconjuntos no vacíos de X ajenos entre sí y cuya unión es X.

Definición 2.13. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. El conjunto cuyos puntos son los elementos de $\mathcal{D}$, que denotamos por $X/\mathcal{D}$, se llama *espacio cociente*. La función $q : X \to X/\mathcal{D}$ que está definida como $q(x) = D$, donde D es el único elemento de $\mathcal{D}$ tal que $x \in D$, se llama *función cociente*. La topología para $X/\mathcal{D}$, $\tau(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset X/\mathcal{D} : q^{-1}(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de $X\}$, se llama *topología cociente*.

Notemos que la topología $\tau(\mathcal{D})$ es la más grande que hace que la función q sea continua. El espacio cociente $(X/\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ también se conoce como *espacio de descomposición* o *espacio de identificación*.

Es conocido que un espacio cociente no necesariamente es métrico [28, p. 37]. Sin embargo, existen condiciones adicionales sobre la descomposición para que el espacio cociente resultante sea un espacio métrico. La siguiente es una de estas.

Definición 2.14. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{D}$ es *semicontinua superiormente*, si para cada elemento $D \in \mathcal{D}$ y cada subconjunto abierto U de X con $D \subset U$, existe un subconjunto abierto V de X con $D \subset V$ y tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.

Para ver una demostración del siguiente teorema podemos consultar, por ejemplo, [21, Corolario 1.2.22, p. 15].

Teorema 2.15. *Sean X un espacio métrico y compacto y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Si $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio métrico.*

Para una prueba del siguiente resultado, ver [21, Teorema 1.7.3, p. 46].

Teorema 2.16. *Sean X un continuo y $\mathcal{D}$ una descomposición de X. Si $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, entonces el espacio cociente $(X/\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un continuo.*

Con el siguiente ejemplo, mostramos cómo a partir de un continuo, podemos obtener nuevos continuos, identificando algunos de sus puntos.

Ejemplo 2.17. Consideremos el continuo I^2.

(1) Definimos $\mathcal{D}_1 = \{\{(0,1-y),(1,y)\} : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{\{(x,y)\} : 0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Notemos que $\mathcal{D}_1$ es una descomposición semicontinua superiormente de I^2. Por el Teorema 2.16, tenemos que el espacio cociente $(I^2/\mathcal{D}_1, \tau(\mathcal{D}_1))$ es un continuo, el cual se conoce como *banda de Möbius*, (Figura 1).

(2) Pongamos $\mathcal{D}_2 = \{\{(0,1-y),(1,y)\} : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{\{(1-x,0),(x,1)\} : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{\{(x,y)\} : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Entonces, por el Teorema 2.16 se tiene que el espacio cociente $(I^2/\mathcal{D}_2, \tau(\mathcal{D}_2))$ es un continuo. Notemos que este continuo es homeomorfo a un disco, en el que cada punto de la circunferencia se identifica con su antípodo. Este continuo se llama *plano proyectivo real* y se denota por $\mathbb{RP}^2$. Este espacio no se puede encajar en $\mathbb{R}^3$. Una manera intuitiva de poder representarlo es como se muestra en la Figura 2.

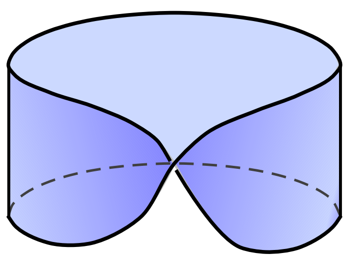

Figura 1. Banda de Möbius.

Figura 2. Plano proyectivo real.

La razón principal por la que hemos puesto especial interés en la clase de los espacios cociente es que parte de este trabajo se desarrolla en una subclase de estos espacios, la cual definimos en seguida. Dados un espacio métrico y compacto X y A un subconjunto cerrado no vacío de X, consideramos la siguiente descomposición de X:

$$\mathcal{D} = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \cup \{A\}.$$

Al espacio $X/\mathcal{D}$ se le acostumbra denotar como X/A. Notemos que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente. Entonces, por el Teorema 2.15 obtenemos el siguiente:

Teorema 2.18. *Sean X un espacio métrico y compacto y A un subconjunto cerrado de X. Entonces el espacio cociente X/A es un espacio métrico, con la topología cociente.*

Como una consecuencia inmediata del Teorema 2.18 y la continuidad de la función cociente, tenemos el siguiente:

Teorema 2.19. *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Entonces el espacio cociente X/A es un continuo.*

Intuitivamente, el espacio cociente X/A se obtiene a partir del continuo X identificando el conjunto A a un punto.

Definición 2.20. Un continuo X es *unicoherente* si siempre que X es la unión de dos de sus subcontinuos, se tiene que la intersección de estos dos subcontinuos es conexa.

No es difícil verificar que la 2-celda (Ejemplo 2.4) y los E-continuos (Ejemplo 2.8) son unicoherentes. Notemos que el plano proyectivo real, Ejemplo 2.17-(2), es otro ejemplo de continuo unicoherente [33, p. 197].

A continuación definimos las dos clases de continuos que contienen a todas las demás: la clase de los continuos descomponibles y la clase de los continuos indescomponibles.

Definición 2.21. Un continuo X es *descomponible* si existen en X dos subcontinuos propios cuya unión es X. Un continuo X es *indescomponible* si X no es descomponible.

Todos los ejemplos de continuos que hemos dado hasta ahora son continuos descomponibles. Para ver ejemplos de continuos indescomponibles y un recuento de estos, citamos [13].

Definición 2.22. Un continuo X es *hereditariamente descomponible* si cada subcontinuo no degenerado de X es descomponible. Un continuo X es *hereditariamente indescomponible* si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible.

En [28, Ejercicio 1.23, p. 13], se muestra un continuo hereditariamente indescomponible, conocido como el pseudoarco. En [28, Ejercicio 2.27, p. 28], se construye un continuo hereditariamente descomponible, que no contiene arcos.

El lector que esté interesado en saber más respecto a la teoría de continuos, puede consultar [5], [13], [21] y [28].

3. Hiperespacios

Un *hiperespacio* de un continuo X es una colección de subconjuntos de X que satisface ciertas condiciones específicas [12, p. 3]. A continuación definimos dos hiperespacios, los cuales fueron introducidos por F. Hausdorff y L. Vietoris a principios del siglo XX ([9] y [31]). Dado un continuo X

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \neq \emptyset\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

En 1905 D. Pompeiu introduce las primeras nociones de una métrica en hiperespacios [30], la cual fue retomada en 1914 por F. Hausdorff definiéndola de manera más general [9], que incluía a los hiperespacios de un espacio métrico compacto. Esta métrica es conocida actualmente como *métrica de Hausdorff* [29, p. 1], la cual se define de la siguiente manera: para cualesquiera A y B en 2^X,

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\},$$

donde $N(\epsilon, A) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}$, $d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}$ y d es la métrica de X.

Así, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son considerados con la métrica de Hausdorff.

Para un continuo X y subconjuntos $U_1, \ldots, U_m$ de X, denotamos por $\langle U_1, \ldots, U_m \rangle$ al siguiente subconjunto de 2^X:

$$\left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\} \right\}.$$

En 1922 L. Vietoris dota de una importante topología al hiperespacio 2^X y, así, al hiperespacio $C(X)$ [31]. Una prueba del resultado que sigue podemos encontrarla en [12, Teorema 1.2, p. 3].

Teorema 3.1. *Sea X un continuo. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_m \rangle : m \in \mathbb{N},\ U_i \textit{es abierto en } X\},$$

es una base para una topología del hiperespacio 2^X (la topología generada por $\mathcal{B}$), conocida como topología de Vietoris.

En 1951 E. Michael muestra que en los hiperespacios de un espacio métrico y compacto y, en particular, de un continuo, la Topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden [24]. En la actualidad esta propiedad es bien conocida en la teoría de los hiperespacios, y puede verificarse por ejemplo en [12, Teorema 3.1, p.16]:

Teorema 3.2. *Sea X un continuo. Entonces la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X son topológicamente iguales.*

Por lo tanto, por el Teorema 3.2, el hiperespacio 2^X es considerado con la métrica de Hausdorff o con la topología de Vietoris, indistintamente. De manera similar, con cualquier hiperespacio contenido en 2^X.

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. A continuación definimos otros hiperespacios del continuo X:

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

El hiperespacio $F_n(X)$ lo introdujeron K. Borsuk y S. Ulam en 1931 ([2]) y lo llamaron el $n-$*ésimo producto simétrico* de X. Como trabajos relacionados con este hiperespacio podemos citar [2], [8], [11], [16] y [17]. El hiperespacio $C_n(X)$ tuvo sus inicios en 1939 con M. Wojdyslawskicz [34]. S. Macías hizo un estudio detallado de este hiperespacio en [18], [19], [22], [23] y [21] y lo llamó el *n-ésimo hiperespacio* de X. Estos hiperespacios también son considerados con la métrica de Hausdorff, equivalentemente, con la topología de Vietoris.

En 1922, cuando Vietoris dota de una topología al hiperespacio 2^X [31], también prueba que si X es compacto entonces 2^X es compacto. Un año después, prueba que la conexidad es equivalente para X y 2^X [32]. En general, los resultados que resumimos en el siguiente teorema son bien conocidos, (podemos ver, por ejemplo [21, Sección 1.8]).

Teorema 3.3. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son continuos.*

Por lo general resulta difícil imaginar cómo es el hiperespacio de algún continuo dado. Por esta razón recurrimos a los modelos geométricos, para tener una visualización. Un *modelo geométrico* de un hiperespacio es algún espacio topológico bien conocido, homeomorfo a dicho hiperespacio y que en muchas ocasiones lo podemos visualizar geométricamente.

En las Figuras 3-12, presentamos continuos y los modelos geométricos de sus respectivos hiperespacios. Estos son bien conocidos y se pueden verificar en [12].

Figura 3. Arco, I.

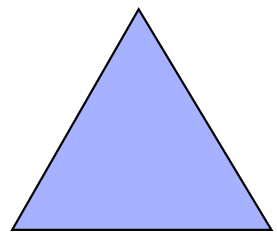

Figura 4. $C(I)$.

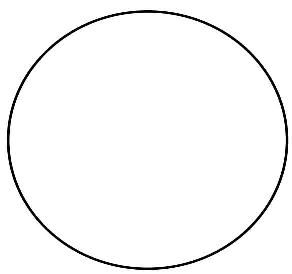

Figura 5. S^1.

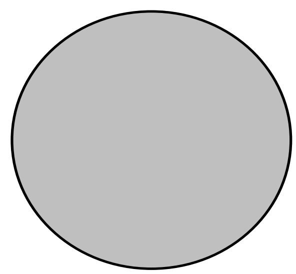

Figura 6. $C(S^1)$.

Figura 7. Arco, I.

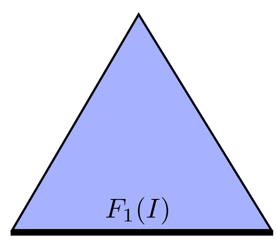

Figura 8. $F_2(I)$.

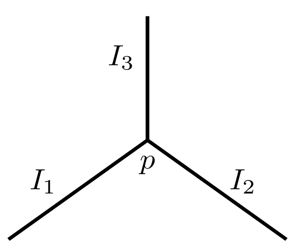

Figura 9. Triodo simple, T.

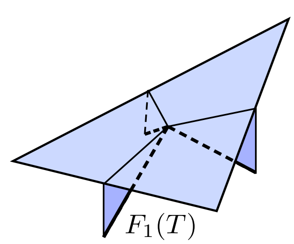

Figura 10. $F_2(T)$.

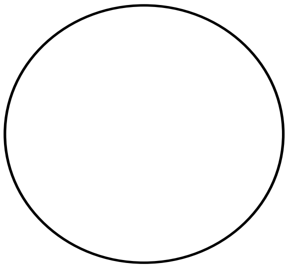

Figura 11. S^1.

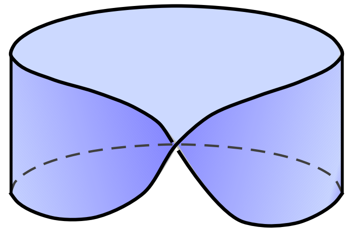

Figura 12. $F_2(S^1)$.

Por otra parte, considerando un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $F_1(X) \subset F_n(X) \subset C_n(X)$.

En [27] S. B. Nadler Jr. define y denota el *hiperespacio suspensión* del continuo X como el espacio cociente:

$$HS(X) = C(X)/F_1(X),$$

con la topología cociente.

En [20] se define el *n-ésimo Hiperespacio Suspensión de X*, $HS_n(X)$ como el espacio cociente:

$$HS_n(X) = C_n(X)/F_n(X),$$

con la topología cociente.

En [15] $PHS_n(X)$ denota el *n-ésimo Pseudohiperespacio Suspensión de X*, el cual está definido como:

$$PHS_n(X) = C_n(X)/F_1(X),$$

con la topología cociente.

En cuanto a la conexidad local, se conocen los resultados que resumimos en el Teorema 3.4.

Teorema 3.4. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *X es localmente conexo.*
- *2^X es localmente conexo.*
- *$C_n(X)$ es localmente conexo.*
- *$F_n(X)$ es localmente conexo.*
- *$HS_n(X)$ es localmente conexo.*
- *$PHS_n(X)$ es localmente conexo.*

Con respecto a la arcoconexidad, se sabe que:

Teorema 3.5. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Entonces:*

- *2^X, $C_n(X)$, $HS_n(X)$ y $PHS_n(X)$ son arcoconexos.*

- *X es arcoconexo si y sólo si $F_n(X)$ es arcoconexo.*

Para un estudio más detallado de los hiperespacios que hemos definido, sugerimos consultar [10], [12], [21] y [29].

4. Producto simétrico suspensión de un continuo

Siguiendo con el estudio de los cocientes entre hiperespacios, en 2010 definimos y estudiamos un nuevo espacio, el que resulta de identificar en un punto el conjunto $F_1(X)$ contenido en el hiperespacio $F_n(X)$ [1]. Esto es:

Definición 4.1. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Definimos el *n-ésimo producto simétrico suspensión de X*, denotado por $SF_n(X)$, como el espacio cociente

$$SF_n(X) = F_n(X)/F_1(X),$$

con la topología cociente.

Cuando no hagamos referencia explícita a algún $n \geq 2$, diremos simplemente producto simétrico suspensión.

De aquí en adelante, presentamos algunos resultados del producto simétrico suspensión. Para los resultados que se dan sin demostración, las pruebas se pueden verificar en [1].

Como $F_1(X)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $F_n(X)$, por el Teorema 2.19, tenemos el siguiente:

Teorema 4.2. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Entonces $SF_n(X)$ es un continuo.*

Dados un continuo X y un entero $n \geq 2$, la respectiva función cociente la denotamos por

$$q_X^n : F_n(X) \to SF_n(X).$$

Cuando hagamos referencia al espacio cociente $SF_n(X)$, al elemento $F_1(X)$ de $SF_n(X)$, lo denotamos por F_X^n. Así, podemos acordar que

$$q_X^n(F_1(X)) = \{F_X^n\}$$

y

$$SF_n(X) = \{\{A\} : A \in F_n(X) \setminus F_1(X)\} \cup \{F_X^n\}.$$

Dado que $SF_n(X)$ tiene la topología cociente, la función q_X^n es continua. Además, q_X^n es suprayectiva. De la definición de la función cociente q_X^n, se sigue que:

Observación 4.3. Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, la función restringida $q_X^n|_{F_n(X)\setminus F_1(X)} : F_n(X) \setminus F_1(X) \to SF_n(X) \setminus \{F_X^n\}$ es un homeomorfismo.

Como es usual, una vez definido un nuevo espacio se construyen ejemplos de tal objeto de estudio. Para tener una idea geométrica de nuestros ejemplos construimos sus modelos geométricos.

A continuación, presentamos ejemplos de modelos geométricos de productos simétricos suspensión de algunos continuos específicos. Iniciamos con lo más fácil, daremos el modelo geométrico para $SF_2(I)$.

Ejemplo 4.4. K. Borsuk y S. Ulam probaron que $F_2(I)$ es homeomorfo a I^2 [2, Teorema 6, p. 880]. En la actualidad, es bien conocida la existencia de una inmersión $h : F_2(I) \to \mathbb{R}^2$ definida como $h(\{a,b\}) = (\frac{a+b}{2}, |a-b|)$ [17, Ejemplo 14, p. 213]. Notemos que $h(F_2(I))$ es un triángulo en el plano, con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(\frac{1}{2},1)$. De manera que $F_2(I)$ lo podemos representar por dicho triángulo, donde $F_1(I)$ queda representado por el conjunto $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ (ver Figura 8). Si identificamos $F_1(I)$ a un punto, obtenemos una 2-celda (vea Figura 14). De manera que $SF_2(I)$ es homeomorfo a I^2.

Figura 13. Arco, I.

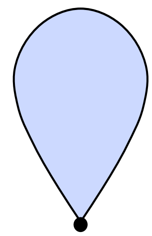

Figura 14. $SF_2(I)$.

Ejemplo 4.5. Sea T un triodo simple. Pongamos $T = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, donde cada I_i es un arco y p es el único punto que comparten (ver Figura 9). Sean $L_1 = I_1 \cup I_2$, $L_2 = I_2 \cup I_3$ y $L_3 = I_3 \cup I_1$. Por el Ejemplo 4.4, cada $F_2(L_i)$ es un triángulo, cuya base es $F_1(L_i)$, respectivamente. Dado que $F_2(T) = F_2(L_1) \cup F_2(L_2) \cup F_2(L_3)$, haciendo las identificaciones adecuadas obtenemos el modelo geométrico de $F_2(T)$ conocido como *triángulo con alas* (ver Figura 10), el cual consiste de un triángulo $\mathcal{D}$ y los tres triángulos (alas) $F_2(I_1)$, $F_2(I_2)$ y $F_2(I_3)$. Notemos que $F_1(T) = F_1(I_1) \cup F_1(I_2) \cup F_1(I_3)$, $F_1(I_i) \cap \mathcal{D}$ es un segmento de recta y $F_1(T) \cap \mathcal{D} = \{\{p\}\}$. De manera que si identificamos al conjunto $F_1(T)$ a un punto, obtenemos nuevamente un triángulo con alas. Por lo tanto, un modelo geométrico para $SF_2(T)$ es un triángulo con alas (ver Figura 16).

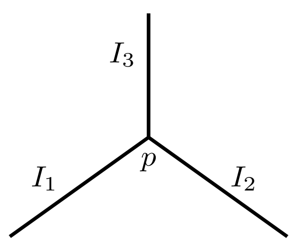

Figura 15. Triodo, simple, T.

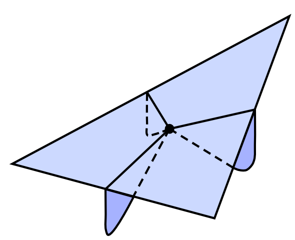

Figura 16. $SF_2(T)$.

Los Ejemplos 4.4 y 4.5, muestran continuos para los cuales el segundo producto simétrico y segundo producto simétrico suspensión son homeomorfos. Sin embargo, a continuación damos un continuo para el cual el segundo producto simétrico y segundo producto simétrico suspensión son topológicamente diferentes.

Ejemplo 4.6. Es bien conocido que $F_2(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Möbius, [2, p. 877]. De hecho en [17, Ejemplo 19, p. 215] se hace una construcción muy clara de este modelo geométrico, que se puede ver como un cuadrado en el cual se identifican apropiadamente dos de sus lados opuestos. Además, los otros dos lados constituyen a $F_1(S^1)$. Observemos que $F_1(S^1)$ está representado por dos conjuntos disjuntos. Identificamos el primer conjunto a un punto y el segundo conjunto a un segundo punto. Lo que obtenemos es un disco, en donde estos puntos son antípodos. Ahora bien identificar $F_1(S^1)$ a un punto equivale a identificar a estos dos puntos. Como el resto de los puntos antípodos se identifican, lo que se tiene es el plano proyectivo real, $\mathbb{RP}^2$ (ver Figura 18). De manera que el modelo geométrico de $SF_2(S^1)$ es $\mathbb{RP}^2$.

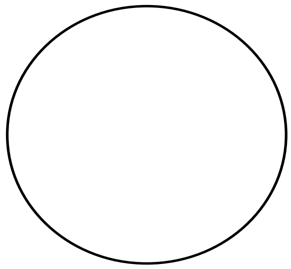

Figura 17. S^1.

Figura 18. $SF_2(S^1)$.

Como la banda de Möbius no es unicoherente y el plano proyectivo real sí es unicoherente ([33, p. 197]), se tiene que $F_2(S^1)$ y $SF_2(S^1)$ son topológicamente diferentes.

El siguiente teorema indica que el modelo geométrico para el n-ésimo producto simétrico suspensión del cubo de Hilbert, $\mathcal{Q}$, es $\mathcal{Q}$. La justificación la podemos hallar en [1, Ejemplo 3.5, p. 599].

Teorema 4.7. *Sean $\mathcal{Q}$ el cubo de Hilbert y $n \geq 2$ un número entero. Entonces $SF_n(\mathcal{Q})$ es el cubo de Hilbert.*

Sean X un continuo, $U_1, \ldots, U_m$ subconjuntos de X y $n \in \mathbb{N}$. De ahora en adelante, utilizamos la siguiente notación para los conjuntos básicos de la topología de Vietoris de $F_n(X)$:

$$\langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n = \langle U_1, \ldots, U_m\rangle \cap F_n(X).$$

Siguiendo con el estudio del cociente entre hiperespacios, y en relación con el Teorema 3.4, veremos que, para cualquier continuo X y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, X es localmente conexo si y sólo si $SF_n(X)$ es localmente conexo. Antes necesitamos de un lema.

Lema 4.8. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tales que $x \in U$. Tomemos un punto $y \in U \setminus \{x\}$ y pongamos $A = \{x, y\}$. Luego, sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de X tales que $x \in U_1 \subset U$, $y \in U_2 \subset U$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Se sigue que $\langle U_1, U_2\rangle_n$ es un subconjunto abierto de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in \langle U_1, U_2\rangle_n$. Como $F_n(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo $\mathcal{C}$ de $F_n(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in \mathcal{C} \subset \langle U_1, U_2\rangle_n$. De hecho, $\mathcal{C}$ es un subconjunto abierto y conexo de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{C} \subset \langle U_1, U_2\rangle_n$. Entonces, por [6, Lema 6.1, p. 40], tenemos que $\bigcup \mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de X y $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1$ es un subconjunto conexo de X, donde $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup\{C \in F_n(X) : C \in \mathcal{C}\}$. En consecuencia, $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1$ es un subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in (\bigcup \mathcal{C}) \cap U_1 \subset U$. Así, X es localmente conexo en x. Como $x \in X$ fue arbitrario, se tiene que X es localmente conexo. ☑

Teorema 4.9. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $SF_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Si X es localmente conexo, entonces por [16, Lema 2, p. 286] se sigue que $F_n(X)$ es localmente conexo. Como la conexidad local se preserva bajo funciones continuas entre continuos [14, Teorema 5, p. 257] y $q_X^n(F_n(X)) = SF_n(X)$, se tiene que $SF_n(X)$ es localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que $SF_n(X)$ es localmente conexo. Sabemos que los subconjuntos abiertos de un espacio localmente conexo son localmente conexos [14, Teorema 3, p. 230], de manera que $SF_n(X)\setminus\{F_X^n\}$ es localmente conexo. Puesto que, por la Observación 4.3, $SF_n(X)\setminus\{F_X^n\}$ es homeomorfo a $F_n(X)\setminus F_1(X)$, se sigue que $F_n(X)\setminus F_1(X)$ es localmente conexo. Luego, por el Lema 4.8, podemos concluir que X es localmente conexo. ☑

Algunos hiperespacios de continuos son arcoconexos, aunque el continuo no lo sea, ver Teorema 3.5. Con respecto a la arcoconexidad en el n-ésimo producto simétrico suspensión, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.10. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si X es arcoconexo, entonces $SF_n(X)$ es arcoconexo.*

Demostración. Si X es un continuo arcoconexo, entonces, por el Teorema 3.5, tenemos que el hiperespacio $F_n(X)$ es arcoconexo. Como la arcoconexidad se preserva bajo funciones continuas entre continuos, q_X^n es continua y $q_X^n(F_n(X)) = SF_X^n(X)$, obtenemos que $SF_X^n(X)$ es arcoconexo. ☑

De manera natural, surge la siguiente pregunta: ¿Es el hiperespacio $SF_n(X)$ arcoconexo para cada entero $n \geq 2$? En seguida damos un resultado que sirve para responder negativamente a esta pregunta:

Teorema 4.11. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) X contiene un arco,

(2) $F_n(X)$ contiene un arco,

(3) $SF_n(X)$ contiene un arco.

Demostración. Si X contiene un arco, entonces podemos construir en X dos arcos que no se intersecan, digamos C_1 y C_2. Entonces $\langle C_1, C_2\rangle_n$ es un subconjunto arcoconexo de $F_n(X)$ que no interseca a $F_1(X)$. De donde, por la Observación 4.3, $q_X^n(\langle C_1, C_2\rangle_n)$ es un subconjunto arcoconexo de $SF_n(X)$. Así, $SF_n(X)$ contiene un arco. De manera que (1) implica (3).

(3) implica la existencia de un arco Γ en $SF_n(X) \setminus \{F_X^n\}$. Por la Observación 4.3, $(q_X^n)^{-1}(\Gamma)$ es un arco en $F_n(X)$. Así, (3) implica (2).

Ahora supongamos que $\mathcal{A}$ es un arco en $F_n(X)$. Por [8, Lema 2.2, p. 252], se sigue que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto no degenerado, compacto y localmente conexo de X. Por otra parte, por [6, Lema 2.2, p. 9], $\bigcup \mathcal{A}$ tiene a lo más n componentes, digamos que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$, donde $k \leq n$ y C_i es una componente de $\bigcup \mathcal{A}$. Entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, C_i es un continuo localmente conexo. Como, por el Teorema 2.11, los continuos localmente conexos son arcoconexos, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, C_i es un subcontinuo arcoconexo de X. Además, como $\bigcup \mathcal{C}$ no es degenerado, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ de tal forma que C_j no es degenerado. En consecuencia, existe un arco contenido en C_j, y así en X. Por lo tanto, obtenemos que (2) implica (1). ☑

Como una consecuencia fácil del Teorema 4.11, damos la siguiente observación, la cual garantiza la existencia de continuos para los cuales su n-ésimo producto simétrico suspensión no es arcoconexo.

Observación 4.12. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si X es hereditariamente indescomponible o X es el continuo construido en [28, Ejercicio 2.27, p. 28], el cual es hereditariamente descomponible que no contiene arcos, entonces $SF_n(X)$ no es arcoconexo.

Siguiendo con el estudio de la arcoconexidad en el n-ésimo producto simétrico suspensión, el siguiente resultado, muestra que el recíproco del Teorema 4.10, en general, no es verdadero. La demostración se puede verificar en [1, Teorema 6.4, p. 602].

Teorema 4.13. *Sean $n \geq 2$ un entero y X una compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo un continuo no degenerado arcoconexo L. Si existe una retracción $r : X \to L$, entonces $SF_n(X)$ es un continuo arcoconexo.*

Como en las compactaciones, X, del rayo $[0, \infty)$ con un continuo no degenerado y localmente conexo L como residuo, siempre existe una retracción de X en L [7, p. 30], por el Teorema 4.13, tenemos el siguiente:

Corolario 4.14. *Sean $n \geq 2$ un entero y X una compactación del rayo $[0, \infty)$ con residuo un continuo localmente conexo L. Entonces $SF_n(X)$ es un continuo arcoconexo.*

Observemos que los E-continuos (Ejemplo 2.8) cumplen con la hipótesis del Corolario 4.14. Como existe una cantidad no numerable de E-continuos topológicamente diferentes ([26, p. 330]), por el Corolario 4.14 tenemos una cantidad no numerable de continuos no arcoconexos y topológicamente diferentes tales que sus respectivos n-ésimos productos simétricos suspensión son arcoconexos.

Por otra parte, a continuación damos un resultado que muestra una clase de continuos para los cuales sus productos simétricos suspensión no son arcoconexos. Para verificar la prueba de este resultado véase [1, Teorema 6.8, p. 603].

Teorema 4.15. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Si existen dos arcocomponentes cerradas y diferentes en X, entonces $SF_n(X)$ no es arcoconexo.*

Para otros resultados que se tienen en espacios cociente entre hiperespacios, puede verse [1], [4], [15], [20] y [27].

Referencias

[1] Barragán F., "On the n-fold symmetric product suspensions of a continuum", *Topology Appl.* 157 (2010), no. 3, 597–604.

[2] Borsuk K. and Ulam S., "On symmetric products of topological space", *Bull. Amer. Math. Soc.* 37 (1931), no. 12, 875–882.

[3] Cantor G., "Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten", *Math. Ann.* 21 (1883), no. 4, 545–591.

[4] Escobedo R., López M. de Jesús and Macías S., "On the hyperspace suspension of a continuum", *Topology Appl.* 138 (2004), no. 1-3, 109–124.

[5] Charatonik J-J., "Bosquejo de la historia de la teoría de continuos", en: *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios* (Editores: R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez), Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 31, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[6] Charatonik J-J. and Illanes A., "Local connectedness in hyperspaces", *Rocky Mountain J. Math.* 36 (2006), no. 3, 811–856.

[7] Curtis D-W., "A hyperspace retraction theorem for a class of half-line compactifications", Proceedings of the 1986 topology conference, *Topology Proc.* 11 (1986), no. 1, 29–64.

[8] Curtis D-W. and ToNhu N., "Hyperspaces of finite subsets which are homeomorfic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces", *Topology Appl.* 19 (1985), no. 3, 251–260.

[9] Hausdorff F., *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914. Primera edic., New York, 1949.

[10] Illanes A., *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas; Textos No. 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[11] Illanes A., Macías S. and Nadler S-B. Jr., "Symmetric products and Q-manifolds, geometric and topology", *Dinamics, contemp. Math. 246, Amer. Math.* Soc. (1999), Providence Rl, 137–141.

[12] Illanes A. and Nadler S-B. Jr., *Hyperspaces fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 216, Marcel Dekker, Basel, New York, 1999.

[13] Leon Jones F., *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 27, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[14] Kuratowski K., *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, 1968.

[15] Macías J.C., "On the n-fold pseudo-hyperspace suspension of continua", *Glas. Mat. Ser. III* 43 (2008), no. 2, 439–449.

[16] Macías S., "Aposyndetic properties of symmetric products of continua", *Topology Proc.* 22 (1997), 281–296.

[17] Macías S., "Hiperespacios y productos simétricos de continuos", *Aportaciones Matemáticas Comun.* 27 (2000), Sociedad Matemática Mexicana, México (2000).

[18] Macías S., "On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X", *Topology Appl.* 109 (2001), no. 2, 237–256.

[19] Macías S., "On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X, II", *Topology Proc.* 25 (2000), 255–276.

[20] Macías S., "On the n-fold hyperspace suspension of continua", *Topology Appl.* 138 (2004), no. 1–3, 125-138.

[21] Macías S., *Topics on Continua*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2005.

[22] Macías S., "On n-fold hyperspaces of continua", *Glas. Mat. Ser. III* 44 (64) (2009), no. 2, 479–492.

[23] Macías S., "On n-fold hyperspaces of continua, II", *Topology Proc. 38 (2011), 137–147*

[24] Michael E., "Topologies on spaces of subsets", *Trans. Amer. Math. Soc.* 71 (1951), no. 1, 152–182.

[25] Mayer J-C., Oversteegen L-G. and Tymchatyn E-D., "The Menger curve", *Dissertationes Math.* 252 (1986).

[26] Nadler S-B. Jr., "Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic", *Tras. Amer. Math. Soc.*, 230 (1977), 321–345.

[27] Nadler S-B. Jr., "A fixed point theorem for hyperspaces suspensions", *Houston J. Math.* 5 (1979), no. 1, 125–132.

[28] Nadler S-B. Jr., *Continuum theory An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[29] Nadler S-B. Jr., "Hyperspaces of sets", *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.*, Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978 (reeditado por: Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006).

[30] Pompeiu D., "Sur la continuité des fonctions de variables complexes", *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Sci. Math. Sci. Phys. 7* (1905), no. 3, 265–315.

[31] Vietoris L. , "Bereiche zweiter Ordnung", *Monats. Math. Phys.* 32 (1922), no. 1, 258–280.

[32] Vietoris L., "Kontinua zweiter Ordnung", *Monats. Math. Phys.* 33 (1923), no. 1, 49–62.

[33] Whyburn G. T., *Analytic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 28, American Mathematical Society, New York, 1942.

[34] Wojdislawski m., "Rétractes absolus et hyperespaces des continus", *Fund. Math.* 32 (1939), no. 1, 184–192.