

# JULIO REY PASTOR Y LA MATEMÁTICA DE LOS IMAGINARIOS\*

**Luis Español González**

*Universidad de La Rioja*

## **Introducción**

En torno a 1900, debido sobre todo a la evolución de la matemática alemana, se produjo un cambio profundo en los métodos y problemas propios de la investigación en matemáticas. Desde un país como España, en el que no estaban implantadas las innovaciones de la segunda mitad del siglo XIX que anunciaron la nueva mentalidad, este cambio coexistió con los esfuerzos que pretendían la puesta al día de la matemática nacional. A partir de 1907, la Junta para Ampliación de Estudios (en lo sucesivo JAE) protagonizó una acción institucional muy significativa para la modernización científica del país, fomentando los estudios de postgrado en los centros europeos más avanzados. Uno de sus pensionados fue el matemático Julio Rey Pastor (1888-1962), que se había formado en el marco del anticuado plan de estudios de 1900, precisamente el año del congreso internacional de París, en el que Hilbert proclamó un nuevo paradigma matemático. Dicho plan estaba dominado, en detrimento del análisis, por la geometría y, dentro de ella, por el método sintético. Su inspirador fue E. Torroja (1847-1918), veterano catedrático de la Universidad Central de Madrid, monopolizadora entonces del doctorado. Allí acudió Rey Pastor una vez terminada su licenciatura en Zaragoza y se doctoró (1909) bajo la dirección de Torroja, iniciando así su carrera de investigador matemático en una línea de geometría sintética que ya estaba en vía muerta, marginada de los nue-

---

\* Este trabajo está elaborado a partir de la primera sección de un informe no publicado entregado al IER el 11 de julio 1995, como resultado de la investigación realizada con la ayuda concedida por dicho Instituto en la convocatoria de 1994. Ver un resumen de otra parte del informe en Español [1996].

vos desarrollos dominantes; no obstante, en sus trabajos sintéticos dejó la huella de su poderosa capacidad matemática.

Sin embargo, la formación de Rey Pastor alcanzó mayores cotas de modernidad en Zaragoza bajo el influjo de otro catedrático veterano, Z. García de Galdeano (1846-1924), que realizó un enorme esfuerzo individual de actualización al margen del plan de estudios oficial, siendo el matemático español de esa época más en contacto con la vanguardia europea. Esta circunstancia no impidió que el joven Rey Pastor recibiera un fuerte impacto cuando pudo conocer en directo la matemática en su proceso de creación. Así lo hizo, gracias a las pensiones que recibió de la JAE para perfeccionar en Alemania su formación en análisis matemático y en geometría superior, a lo largo de los cursos 1911-12 y 1913-14, sin continuidad después de la I Guerra Mundial.

Al incorporarse a la investigación puntera, Rey Pastor se vio inmerso en una contradicción entre la atracción del análisis matemático y la necesidad de sacar partido de su formación geométrica sintética; entre su experiencia geométrica doctoral (1909) y la preparación de oposiciones a la cátedra de Análisis Matemático (1911). En el centro de esta contradicción se situaron los imaginarios. Por una parte, el análisis complejo era desde Riemann y Weierstrass el gran protagonista de la teoría de funciones; por otra, la geometría sintética no quería perder la pista del análisis para avanzar en el camino iniciado por Staudt.

Este trabajo se divide en tres apartados. En el primero se da una visión general de la formación que Rey Pastor pudo alcanzar en España en ambos campos del imaginarismo, el segundo se dedica a su despegue como investigador entre los años 1910 y 1915, en el que jugó un papel nuclear el imaginarismo, mientras que el tercero muestra la débil prolongación que tuvieron estos esfuerzos iniciales, que no pasaron de 1920<sup>1</sup>.

## 1. La formación de Rey Pastor en España

Corresponde a García de Galdeano el mérito de haber importado a España la teoría de las funciones de variable compleja de Cauchy, así lo proclamó su antiguo alumno Rey Pastor [1915] en un famoso discurso que pronunció en Valladolid, en 1915, ante la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (en lo sucesivo AEPPC), que versó sobre la cultura matemática española. La fecha que asigna Rey Pastor a esta efemérides es 1883, que es la de publicación del *Tratado de Álgebra* de García de Galdeano, que amplió con un segundo volumen en 1886. Esta obra contiene, entre otros temas, -hay que recordar la escasa distinción que se hacía en esa época entre álgebra y análisis- una exposición de los elementos de la teoría de las funciones de variable compleja que, según Hormigón, "fue mejorada, modernizada y hecha rigurosa en el *Tratado*

---

1. Ver Español [1998] para una relación completa de la obra matemática de Rey Pastor hasta 1920.

de *Análisis Matemático* [Galdeano 1904-05], donde la inspiración de Cauchy se unió a la de Weierstrass y otros grandes analistas del siglo XIX, aunque, debido a la francofilia crónica de García de Galdeano, esta influencia llegó a través de las fuentes más cercanas de Picard y Goursat<sup>2</sup>. La publicación del *Tratado* coincide con el inicio de la carrera universitaria de Rey Pastor en Zaragoza, donde era catedrático García de Galdeano; el muchacho riojano estudió allí la licenciatura entre 1904 y 1908, así que fue testigo directo y sin duda interesado cuando, en 1907, García de Galdeano publicó un libro de poco más de doscientas páginas titulado *Exposición sumaria de las teorías matemáticas*, en el que da una rápida visión de los temas que hubiera querido añadir al *Tratado* para formar, con otros previos a éste, la proyectada *Nueva enciclopedia matemática* que no pudo completar. El material sumario sobre funciones de variable compleja que allí se encuentra adentra al lector en la senda trazada por Riemann y Weierstrass, si bien los temas clave de la prolongación analítica y la representación conforme están tan sólo esbozados.

Otro libro al alcance de Rey Pastor fue la *Introducción al estudio de las funciones de variable compleja* de L. Octavio de Toledo (1857-1934), catedrático de Madrid, publicado también en 1907; esta obra trata el tema a un nivel similar al del *Tratado* de Galdeano, que utiliza como referencia, pero lo hace de modo monográfico y quizás por ello más organizado como texto. Ambos catedráticos escribieron sus libros a partir de otros extranjeros, sin participación activa en la investigación, con el propósito de mejorar la información científica nacional y promover los estudios matemáticos superiores, logrando unos libros que hubieran podido ser textos universitarios de introducción al tema razonablemente buenos; pero en ese momento la variable compleja no figuraba siquiera en el plan de estudios vigente, "el funesto plan de 1900" en palabras de Rey Pastor, que tuvo que someterse a él primero como estudiante y luego como profesor. Decía García de Galdeano, al iniciar el prólogo del *Tratado*:

*"Es difícil publicar una obra adaptada a los planes vigentes en las universidades españolas y al mismo tiempo conforme con el actual grado de desenvolvimiento científico".*

*"La razón es obvia. Nuestro atraso científico. Las teorías que se han desarrollado con gran impulso en las naciones cultas, arraigando en sus planes de estudios universitarios, nos son por completo desconocidas"*<sup>3</sup>.

Por su parte, Octavio de Toledo quiso imitar el proyecto de Galdeano al publicar el libro antes citado como volumen primero de unos *Estudios de análisis matemático* que pretendían

2. Hormigón [1991], p. 6.

3. García de Galdeano [1904-05], Tomo I, p. ix.

*"vulgarizar el conocimiento de una multitud de teoremas de esta rama de la matemática, que tanto por no exigirse en los cursos de nuestras Universidades y Escuelas especiales, cuanto por tratarse incidental y poco sistemáticamente en la mayoría de las obras matemáticas que circulan en nuestro país son en éste poco conocidas y cultivadas"*<sup>4</sup>.

La situación en geometría era similar pero más estática. Cuando Rey Pastor afirmó que en 1890 la geometría española estaba en Staudt y que allí seguía veinticinco años después, se refería sin duda al libro de Torroja [1899] *Geometría de la posición*. El autor sigue la línea trazada por Reye para la exposición didáctica de la obra staudiana real, pero completándola con el tratamiento de los elementos imaginarios, como menciona Rey Pastor: "El único tratado de nosotros conocido donde se expone completamente la teoría de Staudt, incluso la proyectividad compleja, es el de Torroja"<sup>5</sup>. La parte métrica de la obra fue escrita por M. Vegas (1865-1943), también catedrático de la Central y antiguo alumno de Torroja, que publicó en 1894 un *Tratado de geometría analítica* que tuvo una segunda edición renovada en dos volúmenes los años 1906 y 1907, en la que se acentúa el paralelismo con el libro sintético de Torroja. Los dos libros tienen como características la falta de bibliografía, tanto para declarar sus referencias cuanto para proponer estudios más avanzados. En junio de 1909, Vegas ingresó en la Academia de Ciencias de Madrid con un discurso sobre la *Interpretación geométrica del imaginarismo* y Torroja se encargó del discurso de contestación, haciendo un resumen de la situación de los conocimientos que había en España sobre la geometría compleja. Ambos discursos reflejan un alto grado de auto-complacencia por parte de los personajes hegemónicos de la geometría nacional, que no planteaban opciones de actualización y progreso.

De nuevo como contrapartida, en las obras de García de Galdeano pudo Rey Pastor seguir la pista de opciones geométricas modernas en la línea del *Programa de Erlangen* de Klein y de los grupos de transformaciones de Lie, cuyo desarrollo analítico se decantaba ya hacia finales del siglo. Avanzar en la implantación en España del programa geométrico kleiniano fue otra de las líneas en las que Rey Pastor dio un gran impulso a partir de las iniciativas de su antiguo profesor zaragozano<sup>6</sup>.

Para hacer el doctorado optó por la geometría sintética frente al análisis matemático, al que se incorporó en los años siguientes. En su tesis doctoral, *Correspondencia de figuras elementales, con aplicación al estudio de las figuras que engendran* [Rey Pastor, 1910], utiliza los elementos imaginarios a la manera de Staudt, siguiendo a Torroja, para estudiar la construcción sintética de curvas de orden superior a partir de un principio fundamental que renuncia a demostrar geoméricamente, porque su prueba sólo es posi-

4. Octavio de Toledo [1907], p. 5.

5. Rey Pastor [1916a], p. 340.

6. Las dos obras fundamentales con este fin son Rey Pastor [1916a, 1916b].

ble usando el teorema fundamental del álgebra, el cual a su vez necesita los recursos del análisis. Como es característico de la geometría del programa oficial español, la tesis versa sobre una materia anticuada, y así se aprecia de inmediato observando las referencias en que se apoya.

Del entorno temático de la tesis, publicada en 1910, extrajo Rey Pastor varias publicaciones en revistas españolas y dos comunicaciones que presentó en el congreso de la AEPPC celebrado en Valencia (1910), lo que le permitió estrenarse como profesional y cimentar el prestigio ganado como estudiante. Al mismo tiempo, se ocupaba de asegurar rápidamente su futuro profesional ganando en 1911 la cátedra de Análisis Matemático de la Universidad de Oviedo.

## 2. Catedrático y becario

En 1911, mientras publicaba explotando el tema de su tesis doctoral y preparando la oposición a cátedra, solicitó una pensión de la JAE con este argumento:

*"De las dos ramas principales de la matemática, que son el análisis y la geometría, ha adquirido la segunda un considerable desarrollo en nuestro país, gracias a la introducción del método de Staudt por el sabio maestro Dr. Eduardo Torroja, hasta el punto de perjudicar el progreso del análisis, que hoy se halla completamente estacionado. Hay multitud de teorías nacidas en Alemania y extendidas por Francia e Italia, que no han tomado carta de naturaleza en nuestro país. Tal sucede con los grupos, funciones elípticas, modulares, etc."*<sup>7</sup>

La pensión que pidió le fue concedida en septiembre, por lo que permaneció en Berlín durante el curso 1911-12, siguiendo un curso de funciones analíticas de Schwarz, otro de funciones automorfas y poliédricas de Schottky y un tercero de ecuaciones algebraicas de Schur. Consecuencia de este año de formación especializada son dos trabajos - *Aplicaciones algebraicas de la representación conforme* y *Representación conforme de recintos espiriformes*, de los que sólo publicó el primero- que presentó al congreso de la AEPPC celebrado en Madrid en junio de 1913, al mismo tiempo que obtenía la cátedra de Análisis Matemático de la Central. A mediados de julio, de nuevo pensionado por la JAE, marchó a Gotinga, donde recibió lecciones sobre representación conforme de Carathéodory y Runge. La formación del joven catedrático como investigador en Alemania terminó cuando empezaba la guerra europea, así que no tuvo otra opción que empezar en Madrid el curso 1914-15.

7. Citado en Sánchez Ron [1990], p. 12. De este artículo se han obtenido también los datos que siguen sobre las estancias de Rey Pastor en Alemania becado por la JAE.

En estos cinco años como catedrático y becario de la JAE realizó trabajos importantes en análisis y geometría relacionados con el imaginarismo, alguno de los cuales se publicaron unos años después. De ellos vamos a ocuparnos en lo que sigue. Previamente, conviene destacar que a principios de 1915 pronunció en el Ateneo de Madrid un ciclo de conferencias, *Introducción a la matemática superior* [Rey Pastor, 1916b] en el que puso de manifiesto la amplia y actualizada información matemática que traía de Alemania. Estas conferencias, que giran alrededor de las ideas de conjunto, función y grupo, repasan en clave de actualidad un vasto campo de la matemática de su tiempo.

#### a) *Análisis complejo*

Sin duda para afianzar las oposiciones, Rey Pastor inició la investigación sobre análisis complejo con dos comunicaciones presentadas al congreso que celebró en Granada (1911) la AEPPC; una se titulaba *El exceso algebraico y la teoría de ecuaciones numéricas* y la otra *Sobre la representación conforme*. Dos años después presentó ante la misma Asociación, y de nuevo en periodo de oposiciones, *Aplicaciones algebraicas de la representación conforme*. Este grupo de trabajos estaban encaminados a mejorar la presentación la teoría de ecuaciones algebraicas clásica, que formaba parte del Análisis Matemático de segundo curso<sup>8</sup>.

A esto hay que añadir tres realizaciones que coinciden en el año 1915. Digamos en primer lugar que una de las conferencias que acabamos de mencionar, impartidas en el Ateneo de Madrid, estuvo dedicada al análisis complejo. Por otra parte, en el congreso de la AEPPC en Valladolid presentó una comunicación titulada *Resolución elemental del problema de Dirichlet para el círculo*. Además, en el Institut d'Estudis Catalans de Barcelona dictó, a propuesta de E. Terradas (1883-1950), un curso avanzado sobre teoría de la representación conforme que fue publicado dos años después [Rey Pastor, 1917]. Interesa resaltar, a los efectos del tema que motiva este artículo, que en la conferencia sexta trata de la simetría respecto de una curva analítica, asunto que ocupa una posición central en la definición proyectiva de dicha curva que abordó desde el punto de vista sintético.

Se aprecia con claridad en estos trabajos que Rey Pastor centró su atención en la representación conforme, de la que obtuvo un conocimiento de primera mano en Alemania.

#### b) *Geometría proyectiva sintética*

Rey Pastor completó la investigación sintética sobre curvas de orden superior iniciada en la tesis doctoral con una memoria, *Teoría geométrica de la polaridad en las figu-*

---

8. Ver Llorente, P. [1985].

ras de primera y segunda categoría, con la que ganó en 1912 un concurso convocado por la Academia de Ciencias de Madrid, aunque el libro no se publicó hasta 1929. El primer capítulo de esta memoria es un resumen de la teoría de Kötter que, en particular, contiene la teoría sintética de los imaginarios y alguna de sus representaciones reales, con diversas llamadas a pie de página que remiten al estudio de los aspectos fundadores de la teoría que aparecerán en su obra [Rey Pastor, 1916a] *Fundamentos de la geometría proyectiva superior* (en lo sucesivo *FGPS*) elaborada más tarde pero publicada en primer lugar. El manuscrito de *FGPS*, "fruto de la estancia del autor en las Universidades alemanas" y presentado "como Memoria de pensionado a la JAE"<sup>9</sup>, recibió un premio de la Academia de Ciencias de Madrid en 1914. La obra *FGPS* tienen tres partes bien diferenciadas<sup>10</sup> que no vamos a detallar ahora, porque para los fines de este artículo basta mencionar las características más relevantes de la tercera parte, especialmente las que inciden en el tratamiento de la noción de curva analítica, que es el tema final del libro. Rey Pastor se propuso, entre otros objetivos,

*"Llegar, con recursos exclusivamente geométricos, hasta introducir en esta ciencia el concepto de curva analítica proyectiva, que es el más general hoy poseído por el análisis"*<sup>11</sup>.

Para ello tiene que introducir en la geometría sintética algunos recursos del análisis, especialmente la representación conforme, pero en este punto el propósito de rigor que persigue Rey Pastor se ve limitado, como reconoce el propio autor:

*"Hasta aquí, todos los problemas que hemos resuelto eran lineales o cuadráticos, y su desarrollo era fácil con método sintético; mas ahora entramos de lleno en el campo de las funciones arbitrarias, no expresables por medio de las funciones elementales del análisis, y la dificultad que en éste presentan, sube de punto cuando se quieren abordar con método sintético. Esta consideración, y la de tratarse de un tema completamente nuevo en geometría, hacen de este capítulo acreedor a la benevolencia del lector"*.

*"Así como la edificación axiomática del análisis no se ha logrado todavía para este género de cuestiones, y la moderna teoría de funciones, según Riemann, necesita en todo momento de la intuición geométrica, de igual modo el concepto de rigor en los capítulos que siguen, tiene significado muy distinto que en los anteriores. Ya no operamos en el espacio abstracto, en el cual edificamos la teoría de la proyectividad real, cuyo estudio puede hacerse con los símbolos de la Lógica for-*

9. Rey Pastor [1916a], p. vi.

10. Ver Millán, A. [1990] o bien Español, L. [1990].

11. Rey Pastor [1916a], p. xx.

12. Rey Pastor [1916a], pp. 345-6.

*mal; ahora nos referimos al espacio intuitivo*"<sup>12</sup>.

No obstante, Rey Pastor considera que ha logrado su objetivo y afirma:

*"Y si no pareciera demasiado atrevido nuestro intento, anunciaríamos que la definición geométrica que logramos es más general y primitiva que la del análisis, pues comprende por igual a los puntos propios e impropios, y con ella se define toda la curva, sin necesidad de las superposiciones y prolongaciones que necesita el análisis para obtenerla"*<sup>13</sup>.

Los críticos de la época que hicieron recensiones públicas de FGPS consideraron atractivo y original el tratamiento dado por Rey Pastor a esta cuestión, si bien ninguno de ellos era trabajador activo en este tipo de geometría. En la obra del italiano de Amedeo [1939], que es una historia interna de la geometría proyectiva sintética, se cita profusamente a FGPS, incluso buena parte de la obra tiene como base el texto del geómetra riojano, en particular las páginas sobre la geometría compleja; pero la recopilación histórica del italiano se publicó tarde respecto a la vigencia del tema en el interés de los geómetras investigadores y tuvo poca repercusión.

### 3. Escasa continuidad

En los años siguientes, Rey Pastor dictó cursos y dirigió tesis doctorales sobre la representación conforme en el Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE. En 1920, en vísperas de su contratación por la Universidad de Buenos Aires que terminaría en una instalación definitiva en la capital argentina, con estancias veraniegas en Madrid, presentó su primera comunicación en un congreso internacional. Su trabajo, que era una continuación del curso dado en Barcelona cinco años antes [Rey Pastor, 1921], puso punto final a su investigación en este campo de la variable compleja.

Más adelante, después de un corte de varios años producido por su acomodo en Buenos Aires, Rey Pastor volvió a la investigación en análisis complejo, si bien lo hizo en otros temas, la prolongación analítica y los algoritmos de sumación de series divergentes<sup>14</sup>. Se trató pues de un cambio en las preferencias temáticas sin abandonar el análisis complejo. Parece que las circunstancias de su carrera profesional le obligaron a elegir los temas iniciales, pero que éste respondería plenamente a sus gustos personales.

La situación en geometría fue más drástica, pues la línea de investigación en geometría proyectiva sintética, en particular con el imaginario geométrico, desapareció completamente en pocos años porque esta geometría ya no formaba parte de la matemática viva. En este punto se hace patente la contradicción en que se movió Rey Pastor, que era

13. Rey Pastor [1916a], p. 428.

14. El autor prepara un trabajo conjunto con C. Sánchez (Universidad de la Habana) sobre este asunto.



conocedor del declive del método sintético y no debió esperar que tuviera éxito usarlo en España con fines pretendidamente modernizadores. Rey Pastor sería consciente de la diferencia de modernidad que había entre las obras de referencia utilizadas en los trabajos analíticos frente a las disponibles para los sintéticos. En todo caso, el desarrollo sintético nacional sólo podría ser autárquico, aprovechando los conocimientos obtenidos en el plan de estudios oficial pero sin contactos exteriores, cuestión quizás justificada a causa de la guerra europea.

Sea como fuere, varios de sus primeros discípulos realizaron en el Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE tesis doctorales sobre aspectos sintéticos continuadores de su obra, en particular Fernández-Baños y Pineda sobre los imaginarios. Estos trabajos detallaron y completaron aspectos de la obra de Rey Pastor, pero no alcanzaron la notoriedad de los de su maestro. El libro de Amodeo [1939] ya citado, estando como está muy centrado en la obra de Rey Pastor *FGPS*, no menciona a sus discípulos. Ninguno de los discípulos de Rey Pastor que alcanzaron un nivel matemático relevante fue sintético, o dicho en sentido inverso, los discípulos que se iniciaron en la geometría sintética no alcanzaron relevancia o la alcanzaron después de cambiar de especialidad.

## Referencias

- AMODEO, F. (1936). *Origine e sviluppo della geometria proiettiva*, Napoli, Pellerano.
- ESPAÑOL, L. (1990). "Algunas cuestiones sobre los *Fundamentos de la geometría proyectiva superior*", en ESPAÑOL, L. (ed.), *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, pp. 379-397.
- ESPAÑOL, L. (1996). "Rey Pastor y la noción geométrica de curva analítica", *Zubía* 14, 123-125.
- ESPAÑOL, L. (1998). "Relaciones internas en la obra matemática de Rey Pastor hasta 1920", en GARCÍA HOURCADE, J.L. et al (coords.), *Estudios de historia de las técnicas, la arqueología industrial y las ciencias*, Junta de Castilla y León, Vol. II, pp. 965-976.
- GARCÍA DE GALDEANO, Z. (1904-05). *Tratado de análisis matemático*, 5 vols., Zaragoza, Casañal.
- HORMIGÓN, M. (1991). "García de Galdeano's works on algebra", *Historia Mathematica* 18, 1-15.
- LLORENTE, P. (1985). "Una presentación de la obra de julio Rey Pastor en Álgebra", en ESPAÑOL, L. (ed.) *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor* (Logroño, 26 de octubre - 1 de noviembre de 1983), Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, pp. 119-

153.

- MILLÁN, A. (1990). *La obra geométrica de Julio Rey Pastor*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.
- MILLÁN, A. (1991). "Los estudios superiores de geometría en España (1850-1938)", *Llull*, 13, 117-186.
- OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1907). *Introducción al estudio de las funciones de variable compleja*, Madrid, Murillo.
- REY PASTOR, J. (1910). *Correspondencia de figuras elementales, con aplicación al estudio de las figuras que engendran*, Tesis Doctoral, Universidad de Madrid.
- REY PASTOR, J. (1916a). *Fundamentos de la geometría proyectiva superior*, Madrid, Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas.
- REY PASTOR, J. (1916b). *Introducción a la matemática superior*, Madrid, Corona. (Edición de 1983, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos).
- REY PASTOR, J. (1917). *Teoría de la representació conforme*, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans.
- REY PASTOR, J. (1929). *Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría*, Madrid, Real Academia de Ciencias.
- SÁNCHEZ RON, J.M. (1990). "Julio Rey Pastor y la Junta para Ampliación de Estudios", en ESPAÑOL, L. (ed.) *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Logroño, Instituto de Estudios Riojanos, pp. 9-41.
- TORROJA, E. (1899). *Geometría de la posición*, Madrid.
- VEGAS, M. (1909). *Interpretación geométrica del imaginarismo*, Madrid, Real Academia