

MODELO DE TOMA DE DECISIONES BASADO EN PROGRAMACION DE METAS DIFUSAS

Ana Rosa Ruiz Fernández *

Se analizan dos críticas a la programación de metas como instrumento para la toma de decisiones. La primera, es el cuestionamiento a la utilización de las metas precisas, pues la información incompleta en el ambiente real y la incertidumbre de los acontecimientos futuros hacen difícil determinar los valores precisos en las metas. La segunda, es la arbitrariedad en la definición de los objetivos y las metas. Para resolver ambas limitaciones, se presenta una metodología que ayuda a determinar la priorización de los objetivos, la relación entre los objetivos y las metas y por último, el grado de certeza de las relaciones. Se diseña un modelo de toma de decisiones por medio de la programación lineal de metas difusas. Se presentan ejemplos numéricos a nivel de formulación.

INTRODUCCION

La actividad esencial de un administrador es la toma de decisiones, y sus unidades básicas son los objetivos y las metas.

El proceso de toma de decisiones se inicia escogiendo acciones, a partir no solo del estímulo actual o de la situación del mundo sino también del estado al que se pretende llegar (objetivos y metas). Por lo tanto, en procesos decisorios se trabaja con cuatro elementos: estado actual, objetivos, metas y acciones.

En investigación de operaciones se ha desarrollado una técnica conocida como *programación de metas*, la cual está siendo utilizada ampliamente en problemas de decisión que involucran metas múltiples en conflicto. No obstante, se han señalado dos limitaciones a esta técnica:

- La arbitrariedad en la formulación de los objetos y las metas
- La determinación del grado cierto de las inferencias, debido a la natural imprecisión de los objetivos y metas.

Ante estos señalamientos, el razonamiento difuso aparece como una opción importante para construir un escenario más real en la formulación de los objetivos y metas y en la construcción del modelo general.

En este artículo se analiza un modelo de toma de decisiones basado en la programación de metas difusas. En la segunda sección se presenta un detalle del modelo tradicional de programación de metas. En la tercera, se justifica la utilización del razonamiento difuso en lugar de otras técnicas. En la cuarta sección, se trabaja con la formulación de la estructura de objetivos y metas en un ambiente difuso, para luego, en la quinta sección, construir el modelo de programación de metas difusas a partir de los resultados de la estructura de objetivos y metas obtenida en la sección anterior. Finalmente, en la sexta sección, se presentan las conclusiones.

FORMULACION DEL MODELO DE PROGRAMACION DE METAS

Según Rifay y Dey¹¹ las etapas básicas utilizadas para estructurar un modelo de

* Oficina de Planificación Institucional, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

La introducción de imprecisión e incertidumbre en los procesos de modelación es un tema importante cuando se trabaja con procesos humanos.

programación lineal son idénticas a las de programación de metas. La principal diferencia entre los dos modelos es que el primero no optimiza (maximiza/minimiza) el objetivo directamente, como en el caso de programación lineal, sino que intenta minimizar las desviaciones entre las metas deseadas y el resultado esperado.

Las metas deben ser priorizadas en una jerarquía de importancia. Para la cuantificación de estas priorizaciones, cada meta es expresada como una ecuación, y se asigna una variable con desviación¹¹. Las variables con desviación pueden ser *positivas* o *negativas*. Una variable con desviación positiva (d^+) representa un sobre-alcance de la meta. Una variable con desviación negativa (d^-) representa un sub-logro de la meta. Si el deseo es no sub-lograr la meta, d^- debería ser cero. Asimismo, si d^+ es cero, el sobre-alcance de la meta no se presentará.

Las variables con desviaciones son mutuamente excluyentes, relación que matemáticamente se expresa como:

$$d^+ * d^- = 0$$

La estructuración de un modelo de programación de metas implica que:

- Las metas son identificadas y expresadas como restricciones (existen dos tipos de restricciones: las del *modelo general* y las de las *metas*. Las primeras representan la capacidad existente, más bien que lo deseado).
- Las metas son analizadas para determinar las variables con desviaciones necesarias: d^- , d^+ , o ambas.
- Las metas expresadas en las restricciones permiten lograr los objetivos definidos en la función objetivo. Una o más metas pueden estar apoyando un objetivo.
- Se establece una jerarquía de importancia entre los objetivos para asignar a cada uno de ellos un *factor de*

prioridad predefinido, P_j . Estos factores de prioridad predefinidos reflejan las relaciones jerárquicas. De esta forma, P_1 representa la prioridad más alta, P_2 la segunda más importante, y así sucesivamente. Los P_j indican una posición ordinal simple de los objetivos.

Una vez que se ha cumplido lo anterior, el problema puede ser cuantificado como un modelo de programación de metas¹ de la siguiente manera:

Minimice: $\sum_{j=1}^n P_j (d^- + d^+)$, $j = 1, \dots, n$

sujeto a: $\sum_{i=1}^m (a_{ij} x_j) - d^- + d^+$, $i = 1, \dots, m$

Un modelo de programación de metas⁷ es útil para:

- Determinar el insumo (recurso) requerido para realizar el conjunto de metas;
- Determinar el grado de logro de las metas definidas con los recursos disponibles; y
- Proveer la más satisfactoria solución considerando variación de insumos, niveles de aspiraciones, y estructura de prioridades.

RAZONAMIENTO DIFUSO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

El ambiente real, a partir del cual se elaboran los problemas de optimización, se percibe a menudo con incertidumbre e imprecisión. Los eventos relevantes pueden ser de ocurrencia incierta, y los datos disponibles a menudo son conocidos de forma incompleta. La introducción de imprecisión e incertidumbre en los procesos de modelación es un tema importante cuando se trabaja con procesos humanos¹.

Usualmente, los modelos imprecisos y con incertidumbre utilizan los análisis de sensibilidad y probabilístico. La representación de algunos parámetros, por medio de

Usualmente, los modelos imprecisos y con incertidumbre utilizan los análisis de sensibilidad y probabilístico.

una variable aleatoria, presume la existencia de datos estadísticos suficientes para proveer información acerca de su función estadística. Por ello, el análisis probabilístico es válido especialmente para fenómenos que son reproducibles y que han estado ocurriendo un número suficiente de veces en el pasado. Hay que considerar que la introducción de probabilidades en un modelo, a menudo representa un incremento significativo en su complejidad, y también conduce a dificultades computacionales¹.

Por otro lado, el análisis de sensibilidad trabaja principalmente con parámetros cuyos rangos han sido mejorados. La definición de estos rangos puede ser especialmente problemática: cuando son muy amplios, los datos son seguros, pero los resultados del análisis pueden ser poco interesantes debido a su imprecisión. Cuando son muy ajustados, los resultados son significativos pero su confianza es cuestionable¹.

Una forma de salir de este dilema es modelar los parámetros a partir de intervalos difusos. Esto significa que estarán basados sobre conocimiento impreciso, pero presentarán varios rangos posibles con sus respectivos niveles de confianza.

El uso de intervalos difusos no supone la existencia de datos estadísticos (aunque existan interpretaciones estadísticas). Los intervalos difusos son manipulados por medio de operaciones entrelazadas, y no confían en estructuras aditivas; son un modelo natural de restricciones flexibles del valor de los parámetros.

El cálculo con intervalos difusos es una extensión directa de múltiples valores; por tanto, nosotros podemos esperar resultados menos precisos que del análisis probabilístico.

En este artículo se utiliza el razonamiento difuso, en particular los intervalos difusos y las variables lingüísticas para formular un modelo de toma de decisiones

basado en programación de metas. La aplicación se realiza en dos niveles:

- a.—La formulación de los objetivos y metas, a partir de una metodología que evite la formulación arbitraria. De este aspecto depende la efectividad del modelo.
- b.—La formulación del modelo general, con base en intervalos difusos, variables lingüísticas y parte de los resultados del diseño de los objetivos y metas.

FORMULACION DE LOS OBJETIVOS Y METAS MEDIANTE EL RAZONAMIENTO DIFUSO

Al inicio del proceso de formulación, se definen las variables que van a participar, sus características y los requerimientos necesarios para obtener la información³, a partir de los objetivos y metas que se han establecido.

Con anticipación se ha determinado la estructura de los objetivos y las metas, -incluyendo las relaciones que tienen entre sí-, el efecto de llevarlos a cabo y el impacto resultante.

Usualmente, objetivos y metas tienen un carácter interactivo y son asociados con diferentes prioridades. Para definir la relación entre los objetivos (Cuadro 1), se puede utilizar la clasificación propuesta por Mostow¹², que incluye, entre otras, la relación:

- *Independiente*: son objetivos que no afectan a los otros.
- *Cooperativa*: cuando alcanzar un objetivo hace que sea fácil el obtener otro.
- *Competitiva*: si un objetivo puede llevarse a cabo solamente a expensas de otro.

El uso de intervalos difusos no supone la existencia de datos estadísticos (aunque existan interpretaciones estadísticas).

- De interferencia: cuando el objetivo debe ser llevado a cabo en una forma que tome en cuenta los otros.

- S_a : el conjunto soporte de «a»
- D_a : el conjunto de perturbación de «a»

Definiciones básicas

Definición 1. Sea A un conjunto no vacío y finito de objetivos, B un conjunto no vacío y finito de metas, $A \cap B = \emptyset$, $a \in A$, $b \in B$, $\delta \in [0, 1]$. Para cada objetivo A se definen las funciones s_a y d_a de A en $[0, 1]$ como sigue:

Función de soporte del objetivo «a»

$s_a(b) = \delta$, b soporta a «a» con un grado de δ
0 en otros casos

Función de perturbación del objetivo «a»

$d_a(b) = \delta$, b soporta a «a» con un grado de δ
0 en otros casos

Definición 2. Sean s_a y d_a definidas en definición 1. Para cada objetivo «a» definimos dos conjuntos difusos S_a y D_a , para las funciones s_a y d_a como funciones de pertenencia, respectivamente. Los conjuntos son llamados:

Relaciones entre objetivos

Definición 3. Sean $S_{a1}, D_{a1}, S_{a2}, D_{a2}$ conjuntos difusos dados por la correspondiente función de pertenencia según definición 2. Para simplificar, se escribirá S_i en lugar de S_{a_i} . Sean $a_1, a_2 \in A$ donde A es un conjunto de objetivos. La relación entre dos objetivos será interactiva, según se describe en el Cuadro 1.

La definición de la relación entre objetivos se basa en los predicados de la forma $X \cap Y \mid X \mid \emptyset$ donde $\mid X \mid \in \{=, \neq\}$ y $X, Y \in \{S_i \cap D_j\}$, $i \neq j$, i, j índices de objetivos.

Definición 4. Para determinar la relación entre los objetivos, el valor cierto del predicado c_p de la forma $X_i \cap Y_j \mid X \mid \emptyset$ (p pequeño) se define como sigue:

$$c_p = \frac{\sum_{b \in B} x_1(b) * y_2(b)}{\sum_{b \in B} x_1(b)}, \quad \mid X \mid \text{ es } \neq$$

$$c_p = 1 - \frac{(\sum_{b \in B} x_1(b) * y_2(b))}{\sum_{b \in B} x_1(b)}, \quad \mid X \mid \text{ es } =$$

Note que $0 \leq c_p \leq 1$.

CUADRO 1. Tipo de relaciones entre los objetivos

Tipo de relación	Expresión
Independiente	$S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cap D_2 = \emptyset, S_2 \cap D_1 = \emptyset, D_1 \cap D_2 = \emptyset,$
Débilmente Asistencial	$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset,$
Asistencial	$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset, S_1 \cap D_2 = \emptyset,$
Cooperativa	$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset, S_1 \cap D_2 = \emptyset, S_2 \cap D_1 = \emptyset,$
Débilmente análoga	$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset, D_1 \cap D_2 = \emptyset,$
Análoga	$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset, S_1 \cap D_2 = \emptyset, S_2 \cap D_1 = \emptyset, D_1 \cap D_2 \neq \emptyset,$
Débilmente oculta	$S_1 \cap D_2 \neq \emptyset,$
Oculta	$S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cap D_2 \neq \emptyset,$
Competitiva	$S_1 \cap D_2 \neq \emptyset, S_2 \cap D_1 \neq \emptyset$
Intercambio débil	$S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cap D_2 \neq \emptyset, S_2 \cap D_1 \neq \emptyset$
Intercambio	$S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cap D_2 \neq \emptyset, S_2 \cap D_1 \neq \emptyset, D_1 \cap D_2 = \emptyset,$

Los intervalos difusos son manipulados por medio de operaciones entrelazadas, y no confían en estructuras aditivas; son un modelo natural de restricciones flexibles del valor de los parámetros.

Determinación del foco de atención

El foco de atención es un conjunto F de metas¹² cada una de las cuales reúne las siguientes tres condiciones:

- Potencialmente ejecutable, es decir, es una meta candidata a ser realizada próximamente
- Consistente con las prioridades definidas por el usuario
- Consistente con la relación de inferencia entre objetivos y las estrategias de control asociadas a las relaciones.

Definición 5. Sea n el número de objetivos. F_{ij} el enfoque de atención para a_i y a_j . Se definen los conjuntos F_i de la siguiente manera :

$$(c_0) F_0 = \bigcap_{i,j=1,\dots,n, i \neq j} (c_{ij}) F_{ij}$$

$$(c_1) F_1 := \bigcap_{i,j=1,\dots,n, i \neq j, i \neq w, j \neq w} (c_{ij}) F_{ij}$$

w es índice del objetivo de menor prioridad

$$(c_{m-1}) F_{m-1} = \bigcap_{i,j=1,\dots,n, i \neq j, i = w} (c_{ij}) F_{ij}$$

w es índice del objetivo de mayor prioridad

$$(c_m) F_m := (1) S_w$$

w es índice del objetivo con la más alta prioridad

donde $c_k = \min \{ c_{ij} \mid c_{ij} \text{ valor cierto de la correspondiente } F_{ij} \}$, $k = 1, \dots, m$.

El proceso de construcción de la secuencia de prioridades «F» se llama *interacción sucesiva*. Esta etapa es especialmente importante para quien toma decisiones, pues le permite evaluar los diferentes efectos cuando cambia el orden de las prioridades. Si presume un $(c_{ij}) F_{ij}$ específico, entonces se ejecutan las metas

que se infieren de esta prioridad, la cual puede cambiar.

Ejemplo

La educación superior estatal es un sector que requiere planear su futuro. En particular, debe definir sus objetivos a largo plazo, con el fin de racionalizar sus recursos, tanto por la responsabilidad con el país, como por una exigencia de la Contraloría General de la República, y por la competencia que existe en su entorno.

De acuerdo con la estructura del gasto, aproximadamente el 85% del presupuesto universitario se destina a servicios personales. Por tal motivo, en este ejemplo se parte de que las Universidades públicas buscan que los servicios personales se dediquen a contratar personal de alta calidad, a capacitar al contratado y a ofrecer un excelente servicio. Para lograrlo, se definen tres objetivos con siete metas, detalladas en el Cuadro 2.

Cada uno de estos objetivos, presenta dos situaciones posibles: de apoyo al resto de objetivos o de perturbación. Para medirlo, se definen las metas que apoyan el objetivo y se determina cuáles son las que provocan que exista una perturbación entre este objetivo y el resto. Por ejemplo, el primer objetivo se apoya en las siguientes metas: NPL, NPMD, CABAC y CAEXT. Sin embargo, las metas que lo perturban son CCGRA, CCMA y DEINV. Es decir, lograr un personal de alta calidad significa contratar personal con cierto nivel académico y capacitar al existente. No obstante, las metas de cargas mínimas y de dedicación a labores de investigación perturban este objetivo.

De acuerdo con la *definición 1* y la *definición 2*, se determina primero el conjunto de metas que apoyan o disturban los objetivos. A continuación, se presentan los conjuntos y los grados de pertenencia de las metas:

CUADRO 2. Objetivos y metas de las universidades

Objetivos		Metas	
Descripción	SIM.	Descripción	b _i
Lograr un personal académico más calificado.	a ₁	El nuevo personal en los programas de grado y licenciatura sean con título de licenciado.	NPL
Ofrecer un nivel de dedicación efectiva y de calidad a los estudiantes.	a ₂	El nuevo personal en los programas de posgrado sean master o doctores.	NPMD
Incentivar al personal docente con actividades investigativas dentro y fuera del país.	a ₃	Se destine el 10% del gasto a programas de capacitación al personal con grado de bachiller.	CABAC
		Se destine un 5% del presupuesto para financiar capacitación en el exterior.	CAEXT
		Se mantenga un porcentaje del 60% en la relación carga-curso en los programas de grado y licenciatura.	CCGRA
		Se mantenga un porcentaje del 85% en la relación carga-curso en los programas de posgrado.	CCMA
		Se mantenga una relación del 10% en las labores docentes dedicadas a la investigación.	DEINV

$$S1 = \{ (NPL\ 0,75), (NPMD\ 0,75), (CABAC\ 1), (CAEXT\ 1) \}$$

$$S2 = \{ (CCGRA\ 1), (CCMA\ 1), (NPL\ 0,75), (NPMD\ 0,75) \}$$

$$S3 = \{ (CAEXT\ 0,75), (DEINV\ 1) \}$$

$$D1 = \{ (CCGRA\ 0,75), (CCMA\ 0,75), (DEINV\ 1) \}$$

$$D2 = \{ (CABAC\ 1), (CAEXT\ 1), (DEINV\ 0,75) \}$$

$$D3 = \{ (NPL\ 0,75), (NPMD\ 0,75), (CABAC\ 1), (CCGRA\ 1), (CCMA\ 1) \}$$

A partir de la definición de los conjuntos, se aplica la *definición 3* que determina la relación entre los objetivos, de acuerdo con los niveles propuestos en el Cuadro 1. Según el análisis de los objetivos, estos tienen la siguiente relación de interferencia:

- a₁ ASISTE A a₂
- a₁ COOPERA CON a₃
- a₂ COMPITE CON a₃

Estas relaciones tienen un valor cierto del predicado, que se calcula con base en la *definición 4*:

a₁ ASISTE A a₂ (pues el deseo de lograr un personal de alta calidad es asistido por el segundo objetivo, que busca que se ofrezca un servicio excelente a partir de un personal calificado)

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset, S_1 \cap D_2 = \emptyset$$

$$C_{S_1 \cap S_2} \neq \emptyset =$$

$$= \sum_{b \in B} x_1(b) * y_2(b) / \sum_{b \in B} x_1(b)$$

$$= S_1(NPL) * S_2(NPL) + S_1(NPMD) * S_2(NPMD) /$$

$$S_1(NPL)+S_1(NPMD)+S_1(CABAC)+S_1(CAEXT) \\ = (0,75*0,75+0,75*0,75) / (0,75+0,75+1+1) \\ = 1,126/3,5 = 0,32$$

$$C_{S_1 \cap D_2} \neq \emptyset = \\ = 1 - (\sum_{b \in B} x_1(b)*y_2(b)) / \sum_{b \in B} x_1(b) \\ = 1 - (S_1(CABAC)*D_2(CABAC) + S_1 \\ (CAEXT)*D_2(CAEXT)) / (S_1(NPL) + \\ S_1(NPMD) + S_1(CABAC) + S_1(CAEXT)) \\ = (1 - 1*1 + 1*1) / (0,75+0,75+1+1) \\ = 1 - (2/3,5) = 1 - 0,57 = 0,43.$$

Según la *definición 5*, el valor cierto del predicado es:

$$a_1 \text{ ASISTE } a_2 = \min \{ 0,32, 0,43 \} = 0,32$$

Si se aplica el mismo procedimiento para la relación de cada objetivo, tenemos los siguientes valores ciertos:

$$a_1 \text{ COOPERA } a_3 = \min \{ 0,61, 1,14 \} = 0,61 \\ a_2 \text{ COMPITE } a_3 = \min \{ 0,89, 0,75 \} = 0,75$$

Con base en las relaciones de interferencia y usando la estrategia de sacrificar la meta menos importante tenemos:

$$(c_{1,2}) F_{1,2} = (0,32) S_1 \\ (c_{1,3}) F_{1,3} = (0,61) S_1 \\ (c_{2,3}) F_{2,3} = (0,75) S_3$$

Después de aplicar interacciones sucesivas, se tiene que:

$$(0,32) S_1 \cap (0,61) S_1 \cap (0,75) S_3$$

$$\text{Por eso, } (c_i) F = (0,32) \{ (NPL 0,75), \\ (NPMD 0,75) \}$$

Debido a que el valor de la función de pertenencia de $F_{1,2}$ es el más alto, entonces las metas NPL y NPMD son ejecutadas.

Este procedimiento determina cuáles son las metas que influyen en el logro de cada objetivo y cuál es el grado de prioridad de cada objetivo. Por tanto, el primer objetivo tiene una prioridad mayor que los

otros dos. Sin embargo, quien tome decisiones puede asumir otro orden de prioridad o cambiar los grados de pertenencia de cada meta con respecto al objetivo.

Este resultado permite definir el orden de prioridad en la función objetivo y evita la arbitrariedad en la definición de las metas que apoyan un objetivo y en la priorización de estos últimos dentro del modelo.

También previene el problema de no factibilidad de la solución, que se puede presentar a pesar de tener una formulación aparentemente correcta⁸.

MODELO DE PROGRAMACION DE METAS DIFUSAS

Múltiples metas con igual peso

En programación difusa, la optimización de metas múltiples se realiza con las restricciones impuestas por el ambiente de decisión⁹. Las metas son expresadas en forma precisa, y las ecuaciones algebraicas son formuladas para que correspondan al estado de las metas. Si el ambiente de decisión es difuso, entonces las metas no pueden ser expresadas en forma precisa, por lo tanto, se recurre a la noción de intervalos difusos.

Según Narasimhan⁹, el modelo general asume las siguientes definiciones:

Definición 6. Sea $X = (x)$ un conjunto disponible de alternativas. Entonces, una *meta difusa* se define en término de su subconjunto difuso B de X . Por ejemplo, la meta difusa « x debería ser cercana a α ($\alpha \in \mathfrak{R}$) puede ser expresado como un subconjunto difuso de \mathfrak{R} (la línea real) cuya función de pertenencia está dada por:

$$\mu(x) = (1 + (x - \alpha)^2)^{-1},$$

Definición 7. Las *restricciones difusas* son definidas en forma similar a las metas difusas. La restricción C donde « x debería estar aproximadamente entre α y β »

$(\alpha, \beta \in \mathfrak{R})$ puede ser representada por un subconjunto de \mathfrak{R} cuya función de pertenencia es:

$$\mu(x) = [1 + (x - (\alpha + \beta / 2))^2],$$

Definición 8. Una decisión difusa se define como el conjunto difuso de alternativas resultante de la intersección de las metas y restricciones. Más formalmente, dada una meta difusa B y una restricción difusa C en el espacio de alternativas X, una decisión D se define como el conjunto difuso: $B \cap C$. La función de pertenencia de la decisión difusa μ_D está dada por $\mu_D \wedge \mu_C$.

Formulación del modelo

En programación de metas, la distinción convencional entre las metas y las restricciones no se aplica mucho. Las metas y restricciones están dentro de la expresión de una decisión difusa D. Desde que la decisión D es definida como un subconjunto difuso, la decisión óptima es cualquier alternativa $x \in X$ que maximiza la función de pertenencia para el conjunto de decisiones, $\mu_D(x)$.

El problema de programación difusa podrá expresarse como⁹: encontrar la decisión óptima de D

$$\text{sujeto a: } \begin{aligned} AX &\approx b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

donde el símbolo « \approx » es un difusificador que representa el ambiente impreciso en el que las metas son expresadas. Ahora, definimos la función de pertenencia como:

$$\mu_i(AX) = \begin{array}{ll} 1 & \text{si } (AX)_i = b_i \\ 0 & \text{si } (AX)_i \leq b_i' - \Delta_i \\ \frac{(AX)_i - b_i'}{\Delta_i} & \text{si } b_i' \leq (AX)_i \leq b_i \\ \frac{b_i' - (AX)_i}{\Delta_i} & \text{si } b_i \leq (AX)_i \leq b_i'' \\ 0 & \text{si } (AX)_i \geq b_i'' + \Delta_i \end{array}$$

donde Δ_i 's son las constantes escogidas subjetivamente y representan las desviaciones de los niveles de aspiración, b_i 's.

$$b_i'' = b_i + \Delta_i.$$

$(AX)_i$ representa la i-ésima ecuación de AX, y b_i es el i-ésimo componente de la columna del lado derecho del vector b.

La primera condición sugiere que la i-ésima meta tiene un valor uno si alcanza el nivel esperado; de lo contrario asumirá un valor entre 0 y 1. El valor del lado derecho b_i representa un nivel de aspiración de quien toma las decisiones. Cuando la i-ésima meta no es alcanzada, el grado al cual la meta es lograda se representa por el valor de $\mu_i(AX)$.

Usando la *definición 8*, la función de pertenencia del conjunto de decisiones, $\mu_D(x)$, es dada por:

$$\begin{aligned} \mu_D(x) &= \mu_1(AX) \wedge \mu_2(AX) \wedge \dots \wedge \mu_m(AX) \\ &= \min \mu_i(AX), i=1, \dots, m. \end{aligned}$$

y la maximización de la decisión está dada por:

$$\max_x \mu_D(x) = \max_x \min_i \mu_i(AX)$$

Esto es equivalente a decir:

$$\text{MAX } \lambda$$

$$\text{sujeto a.: } \begin{aligned} \lambda &\leq \mu_i(AX) \\ i &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

Ejemplo. Si se continúa con el ejemplo de las Universidades, las variables de decisión (X_i) corresponden a la cantidad de personal, donde i significa el programa académico. Cada meta pretende alcanzar un valor numérico que es definido por el comportamiento histórico y el nivel deseado. Para efectos de ilustración se toma una meta y dos programas académicos.

Para programas académicos que otorgan grado de bachillerato se tiene la siguiente restricción:

$$X_1 / e_1 + X_2 / e_2 = 1,20$$

donde:

e: significa la cantidad de estudiantes

Para calcular el grado de pertenencia de una meta, tendríamos: μ_i (Mantener en un porcentaje del 0,6 la relación carga-estudiante en los programas de grado =

$$\begin{aligned} &1 && \text{si } X_1/e_1 + X_2/e_2 = 1,2 \\ &0 && \text{si } X_1/e_1 + X_2/e_2 \leq 1,2 \\ &\frac{(X_1/e_1 + X_2/e_2 - 1,2)}{1,2}, 10 && \text{si } 1,10 \leq X_1/e_1 + X_2/e_2 \leq 1,2 \\ &\frac{(1,30 - X_1/e_1 + X_2/e_2)}{1,30}, 10 && \text{si } 1,20 \leq X_1/e_1 + X_2/e_2 \leq 1,30 \\ &0 && \text{si } X_1/e_1 + X_2/e_2 \geq 1,30 \end{aligned}$$

donde: Δi es una variable definida por quien toma decisiones.

A este nivel se están definiendo los intervalos difusos para cada meta. En el siguiente apartado se trabaja con la función objetivo, para definir el grado de prioridad de cada objetivo.

Múltiples metas con diferentes pesos

De acuerdo con Narasimhan, el modelo anterior puede ser extendido al caso donde prioridades difusas pueden ser asignadas a diferentes metas. La prioridad difusa en este caso es dada por el apartado donde se determinaron los objetivos y las metas. El nivel de prioridad también puede ser definido con variables lingüísticas, trabajadas por Zadeh¹⁷, como «muy importante», «moderadamente importante», «importante», etc.

En símbolos, $\mu_{wi}(\mu_i(AX))$ representa la contribución en peso de la i-ésima meta al objetivo, donde $\mu_{wi}(\bullet)$ representa la función objetivo correspondiente a la prioridad difusa asociada con la i-ésima meta.

Usando la *definición 8*, la función de pertenencia del conjunto de decisión $\mu_D(X)$, donde la prioridad difusa es asociada con «m» metas, está dada por:

$$\mu_D(X) = \mu_{w1}(\mu_1(AX_1)) \wedge \mu_{w2}(\mu_2(AX_2)) \wedge \dots \wedge \mu_{wm}(\mu_m(AX_m))$$

La maximización de la decisión es dada por:

$$\begin{aligned} \text{MAX } \mu_D(X) &= \text{MAX MIN } \mu_{wi}(\mu_i(AX)) \\ X \geq 0 & \quad X \geq 0 \quad i \end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos los resultados obtenidos en los dos ejemplos numéricos anteriores. La priorización de los objetivos se realizará con base en el resultado del primer ejemplo, es decir:

1. Lograr un personal académico más calificado (*Muy importante*)
2. Ofrecer un nivel de dedicación efectiva y de calidad a los estudiantes (*Moderadamente importante*)
3. Incentivar al personal docente con la actividad investigativa dentro y fuera del país (*Importante*)

$$\begin{aligned} \text{Si tenemos que: } (c_{1,2}) F_{1,2} &= (0,32) S_1 \\ \text{entonces } \mu_{w1} &= 1 - 0,32 = 0,68 \\ (c_{1,3}) F_{1,3} &= (0,61) S_1 \\ (c_{2,3}) F_{2,3} &= (0,75) S_3 \end{aligned}$$

El primer objetivo tiene una mayor prioridad con respecto al segundo y al tercero.

Las funciones de pertenencia serían entonces:

$$\begin{aligned} \mu_{w1}(\mu_1(AX)) &= \mu_1(AX) - 0,68 / 0,32 \\ &\text{si } 0,68 \leq \mu_1(AX) \leq 1,0 \\ \mu_{w2}(\mu_2(AX)) &= \mu_2(AX) - 0,36 / 0,32 \\ &\text{si } 0,36 \leq \mu_2(AX) \leq 0,68 \\ \mu_{w3}(\mu_3(AX)) &= \mu_3(AX) - 0,04 / 0,32 \\ &\text{si } 0,04 \leq \mu_3(AX) \leq 0,36 \end{aligned}$$

Con este procedimiento, las funciones de pertenencia para priorizar la función objetivo no son definidas arbitrariamente, sino que responden a un método que determina la relación entre los objetivos y de estos, con sus metas. Los valores de $\mu_i(AX)$ se calcularán solo para las metas que tienen relación con el objetivo.

En este caso numérico se simplifica la relación entre el primer objetivo y el resto; sin embargo, la función objetivo puede definir las tres interferencias obtenidas en su oportunidad.

CONCLUSIONES

Los intentos por simular el proceso humano en la toma de decisiones, hace que las teorías o propuestas metodológicas experimenten procesos de evaluación permanentes. En este sentido, a la programación de metas se le han señalado importantes críticas. Dos de éstas se presentan en este artículo y se analizan a partir de un procedimiento. Sin embargo, por ser aspectos basados en procesos intuitivos requieren de análisis continuos de experimentación.

Por un lado, la incorporación del razonamiento difuso agrega a la metodología un aspecto más real y cercano al proceso de toma de decisiones. La utilización de los intervalos difusos, las variables lingüísticas, los grados de pertenencia, los procesos iterativos, etc., permiten incorporar la intuición, experiencia, visión del mundo y del futuro administrador. Sin embargo, por la complejidad del mundo real y la falta de información completa se deben considerar otros elementos como las relaciones no lineales y dinámicas dentro del modelo. Este artículo se centra en la relación lineal; no obstante, el ambiente real no se circunscribe solo a este tipo de relaciones.

En este sentido se están desarrollando algunos trabajos que pretenden modelar un mundo cada vez más complejas, como el de Rao y Sundararaju¹⁰ en el campo de lo no-lineal. Otras investigaciones sobre programación lineal entera o de multiobjetivos 0-1, trabajadas por Sasaki *et al.*¹³, abren posibilidades interesantes.

La integración de metodologías para determinar con menos arbitrariedad los objetivos y las metas es otro campo que debe ser más desarrollado. En este ar-

tículo, se adapta una metodología que todavía requiere procesos de experimentación. No obstante, en las referencias consultadas se presenta como un valioso instrumento de desarrollo dentro de la programación de metas.

La primera etapa es la definición de los objetivos y metas, porque permite la viabilidad de un modelo. Si el proceso es arbitrario y no sigue un procedimiento adecuado, se puede perder la objetividad de los resultados y su impacto positivo en el futuro.

En este sentido, la metodología de Mostow presenta un análisis más profundo de las relaciones difusas entre los objetivos, éstos y sus metas y los grados de certeza; pero en especial, ofrece la posibilidad de aplicación a la programación de metas difusas.

LITERATURA CITADA

- [1] Bezdek, J. C. *Analysis of Fuzzy Information. Volume III. Applications in Engineering and Science*, CRC Press, Inc., Florida, 1984.
- [2] Deporter, Elden; Kimberly, Ellis. Optimization of Project Networks with Goal Programming and Fuzzy Linear programming, *Computer Ind. Engng*, Vol. 19, Nos. 1-4., 1990.
- [3] Duncan, J. Goal Weighting and choice of behavior in a complex world, *Ergonomics*, vol. 33, nos. 10-11, pp. 1265-1279, 1990.
- [4] Hiller Frederick, Lieberman Gerald: *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Quinta Edición. Mc Graw Hill, México, 1991.
- [5] Inuiguchi, Masahiro; Kume, Yasufumi. Goal programming problems with interval coefficients and target intervals. *European Journal of Operational Research*, Vol. 52, pp. 345-360, 1991.
- [6] Lee Sang, M. *Goal Programming for decision analysis*. Auerbach Publishers Inc., Philadelphia, 1972.

- [7] Lee Sang, Moore Laurence; Taylor, Bernard. *Management Science*. Third Edition. C. Brown Publishers, New Jersey, 1990.
- [8] Min, Hokey; Storbeck, James. On the Origin and Persistence of Misconceptions in Goal Programming. *J. Op. Res. Soc.*, vol. 42, pp. 301-312, 1991.
- [9] Narasimhan, Ram. Goal Programming in a Fuzzy Environment, *Decision Sciences*, Vol. 1979.
- [10] Rao, S.S.; Sundararaju, K. Fuzzy Goal Programming Approach for Structural Optimization. *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 5, May 1992.
- [11] Rifai, A.K.; Dey, M.K. Goal Programming: an effective tool in strategic quality planning. *Quality Forum*, Vol. 16, No 4, December 1990.
- [12] Rudolf, F. Goal-oriented Control of VLSI Design processes Based on Fuzzy Sets. *Proceedings of the Twentieth International Symposium on Multiple-Valued Logic*. IEEE, 1990.
- [13] Sasaki, M. *et al.* A Method for Solving Reliability Optimization Problem by Fuzzy Multiobjective 0-1 Linear Programming. *Electronics and Communications in Japan*, Part 3, vol. 74. no. 12, 1991.
- [14] Shin, J.P.; Chun Sun-Gi. Goal Programming: the RPMS Network Approach. *J.Op. Res. Soc.*, Vol. 42, No.1, pp.83-93, 1991.
- [15] Steuer, Ralph E. Goal Programming Sensitivity Analysis using Interval Penalty Weights. *Mathematical Programming*, vol. 17, pp 16-31, 1979.
- [16] Tanaka, H.; Asai, K. Fuzzy Linear Programming problems with Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, vol 13, pp. 1-10, 1984.
- [17] Zadeh, L.A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [18] Zadeh, L.A. The concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I. *Information Sciences*, vol. 8, pp. 199-249, 1975.
- [19] Zadeh, L.A. PRUF-a meaning representation language for natural languages. *Int.J. Man-Machine Studies*, vol. 10, pp. 395-460, 1978.