De Faria Campos, Edison *El atractor de una ecuación diferencial funcional autónoma con retardo*. **Tecnología en marcha.** Vol. 11 no. 4.

El atractor de una ecuación diferencial funcional autónoma con retardo

Edison De Faria Campos*

Resumen

En este trabajo presento una demostración del teorema debido a Waldyr Oliva relacionado con Ecuaciones Diferenciales Funcionales con Retardo en variedades compactas: Si el flujo de una *EDFR* satisface ciertas condiciones de acotación en las primeras derivadas, entonces el atractor global, que coincide con el conjunto de las soluciones definidas en $]-\infty, +\infty[$, es una variedad C^1 conexa y compacta.

Esta demostración difiere de la usual, debido a que no utilizo el teorema de Whitney, proporcionando así un tratamiento más intrínseco del problema.

1 Introducción

Sea I el intervalo cerrado $[-r, 0]$, $r > 0$, M una variedad compacta C^∞, $C^0(I, M)$ el conjunto de aplicaciones continuas ϕ de I a M con la topología compacto-abierto, $\rho : C^0(I, M) \longrightarrow M$ la aplicación evaluación C^∞diferenciable definida por $\rho(\phi) = \phi(0)$, [1].

Definición 1: Una Ecuación Diferencial Funcional Autonóma con Retardo (*EDFAR*) en M es una función continua $F : C^0(I, M) \longrightarrow TM$ tal que $\pi_M \circ F = \rho$, en donde $\pi_M : TM \longrightarrow M$ es la proyección canónica C^∞.

Para cada $\phi \in C^0(I, M)$, $F(\phi) = (\phi(0), f(\phi))$, en donde $f(\phi) \in T_{\phi(0)}M$.

El conjunto de todas las *EDFAR* es un espacio vectorial $\chi(I, M)$.

Definición 2: Una solución de una *EDFAR* F con condición inicial ϕ en t_0 es una función continua $x : [t_0 - r, t_0 + A[\longrightarrow M$, $A > 0$, tal que si $x_t \in C^0(I, M)$ se define por $x_t(\theta) = x(t + \theta), t \geq t_0$ y $\theta \in [-r, 0]$ entonces:

i. $\frac{dx(t)}{dt} = f(x_t)$, $t \in [t_0, t_0 + A[$;

* Escuela de Matemática Universidad de Costa Rica.

ii. $x_{t_0} = \theta$;

iii . $x(t)$ es de clase C^1 para $t \in [t_0, t_0 + A[$

A continuación tomaremos $t = 0$, y utilizaremos la notación $x(t, \phi)$ para la solución x con condición inicial ϕ en $t = 0$.

Para $k \geq 1$, sea $B\chi^k(I, M)$ el conjunto de todas las $F \in \chi^k(I, M)$ de clase C^k que son acotadas, con todas las derivadas hasta el orden k acotadas. [1],[2],[7].

Definición 3: Para cada $F \in B\chi^k(I, M)$, y $t \geq 0$, la aplicación

$\Phi_t : C^0(I, M) \longrightarrow C^0(I, M)$ tal que $\Phi_t(\phi) = x_t(\phi)$ en donde x_t es la solución de F, se denomina **flujo de** F.

$\Phi_0 =$ Identidad, $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$, y cada elemento de la familia Φ_t es una aplicación continua. [1], [7]

Lema 1: Para $t \geq r$, $\Phi_t : C^0(I, M) \longrightarrow C^0(I, M)$ es una aplicación compacta, es decir, Φ_t lleva conjuntos acotados de C en subconjuntos relativamente compactos de C.

Demostración: Sea A un subconjunto acotado de $C^0(I, M)$. Entonces existe $m \in R$, $m > 0$ tal que $diam(A) < m$.

Para cada $\phi \in A$ tenemos:

$$\delta_M(x(t, \phi), \phi(0)) \leq \int_0^t ||f(x_s(\phi))||_{x(s,\phi)} ds \leq Nt$$

con δ_M métrica continua en M asociada a la métrica riemaniana de M y $F \in \chi^k$.

Entonces $diam\, \Phi_t(A) \leq Nt + diam(A) < \infty$ y por lo tanto $\Phi_t(A)$ es puntualmente acotada.

Sean α y $\beta \in I$ con $\beta > \alpha$. Entonces :

$$\delta_M(\Phi_t(\phi)(\alpha),\, \Phi_t(\phi)(\beta)) = \delta_M(x(t + \alpha, \phi), x(t + \beta, \phi)) \leq$$

$$\int_{t+\alpha}^{t+\beta} ||f(x_s(\phi))||_{x(s,\phi)}\, ds \leq N(\beta - \alpha)\,,\, t \geq r.$$

Por el teorema de Arzelá-Ascoli, $\Phi_t(A)$ es relativamente compacto para cada $t \geq r$.

2 Conjuntos invariantes y atractores de una *EDFAR*

Definición 4: Un conjunto invariante de una *EDFAR* F es cualquier subconjunto S de $C^0(I,M)$ tal que para cada $\phi \in S$, existe una solución global (es decir definida en el intervalo $]-\infty,+\infty[$) x de F tal que $x_0 = \phi$ y $x_t \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sea $A(F) := \{\phi \in C^0(I,M); \phi$ es el valor inicial de una solución global de $F\}$.

$A(F)$ es el mayor conjunto invariante de F, y se denomina **atractor** de F.

Sea Φ_r el flujo de F, para $t = r$, y considere la secuencia de conjuntos :

$A_1 = \Phi_r(C^0(I,M))$, $A_2 = \Phi_r(A_1) = \Phi_r(\Phi_r(C^0(I,M))) = \Phi_{2r}(C^0(I,M)), \ldots,$

$A_i = \Phi_{ir}(C^0(I,M)), i \in \mathbb{N}.$

$(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de $C^0(I,M)$, es decir, $C^0(I,M) \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$. Como M es compacto entonces $C^0(I,M)$ es acotado. Por el lema 1, Φ_r es una aplicación compacta y por lo tanto $A_1 = \Phi_r(C^0(I,M))$ es relativamente compacto lo que implica que cada A_i , $i \in \mathbb{N}$ es relativamente compacto. Por otro lado, cada $A_i, i \in \mathbb{N}$ es conexa pues Φ_r es continua y $C^0(I,M)$ es conexo.

Lema 2: La intersección $I(F) = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ es no vacía, conexa, compacta e invariante.

Demostración: $A_1 \subseteq C^0(I,M)$ y $\overline{A_1} \subseteq C^0(I,M)$, entonces tenemos

$$\Phi_r(\overline{A}_1) \subseteq \Phi_r(C^0(I,M)) = A_1. \tag{1}$$

$\Phi_r(A_1) \subseteq \Phi_r(\overline{A}_1)$, pero $\overline{A}_1$ es compacto y Φ_r continua . Por lo tanto $\Phi_r(\overline{A}_1)$ es cerrado y

$$(\overline{A}_2) = \overline{\Phi_r(\overline{A_1})} \subseteq \overline{\Phi_r(\overline{A_1})} = \Phi_r(\overline{A_1}) \tag{2}$$

De (1) y (2) tenemos que $\overline{A}_2 \subseteq A_1$. Análogamente, $\overline{A}_{i+1} \subseteq A_i$, y por lo tanto :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_{i+1}} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = I(F)$$

Por otro lado, $I(F) = \cap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \cap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \cap_{i=1}^{\infty} \overline{A_{i+1}}$, debido a que

$(\overline{A_i})_{i \in I\!N}$ es una sucesión decreciente.

Entonces $I(F) = \cap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ es la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos conexos y compactos. Concluimos que $I(F)$ es conexo y compacto.

Notemos también que $I(F)$ es no vacío, pues $(\overline{A_i})_{i \in I\!N}$ es una familia con propiedad de intersección finita, es decir, la intersección de cualquier número finito de los $\overline{A_i}$ es no vacía.

Para mostrar que $I(F)$ es invariante, sea $\phi \in I(F)$. Necesitamos mostrar que existe una solución global x con $x_0 = \phi$, y $x_t(\phi) \in I(F)$ para cada $t \in I\!R$.

$\phi \in I(F) = \cap_{k=1}^{\infty} \Phi_{kr}(C^0(I, M))$, por lo tanto, para cada $k \in I\!N$ existe

$\psi_k \in C^0(I, M)$ tal que $\phi = \Phi_{kr}(\psi_k)$. Entonces, para cada $t \geq 0$ tenemos

$x_t(\phi) = \Phi_t(\Phi_{kr}(\psi_k)) = \Phi_{kr}(\Phi_t(\psi_k))$, es decir , $x_t(\phi) \in I(F)$ para cada $t \geq 0$.

Por otro lado, por ser ϕ de la forma $\Phi_{kr}(\psi_k)$ para cada $k \in I\!N$ y algún

$\psi_k \in C^0(I, M)$, entonces la solución $x(t, \phi)$ puede ser prolongada hacia atrás, debido a que para llegar a $\phi \in I(F)$ podemos caminar con el flujo através del punto $\psi_k \in C^0(I, M)$, k pasos de longitud r, es decir, ϕ es la condición inicial de una solución que empieza en el instante $-kr - r$.

Dado $n \in I\!R$, $n > r$, para cada $v > n + r$ existe, por el comentario anterior, $x^{\nu}(t, \phi)$ solución de F definida en $[-\nu, +\infty[$ tal que $x_0^{\nu}(\phi) = \phi$.

Definamos $\phi_{\nu} = x_{-n}^{\nu}(\phi) \in C^0(I, M)$, la restricción de $x^{\nu}(t, \phi)$ al intervalo $[-n-r, -n]$.

Entonces $\phi_{\nu} \in A_{i(\nu)} = \Phi_{i(\nu)r} C^0(I, M)$, con $i(\nu)$ entero y $i(\nu) \longrightarrow \infty$ cuando $\nu \longrightarrow \infty$, pues es suficiente tomar $r \leq i(\nu)r < \nu - n$, y $\xi \in A_{i(\nu)}$ como la restricción de $x^{\nu}(t, \phi)$ en el intervalo $[-n - i(\nu)r, r - n - i(\nu)r]$ tal que $\Phi_{i(\nu)r}(\xi) = \phi_{\nu}$.

Como cada $A_{i(\nu)}$ es relativamente compacto, entonces $(\phi_{\nu})_{\nu > n+r}$ es una familia relativamente compacta y por lo tanto admite subsucesión ϕ_{ν_j} que converge uniformemente a $\psi \in \overline{A_{i(\nu)}}$ cuando $j \longrightarrow \infty$, para todo $\nu > n + r$.

Por definición de ϕ_{ν} y continuidad de Φ_t tenemos $\Phi_n(\psi) = \phi$.

$$\text{Entonces } \psi \in \bigcap_{\nu > n+r} \overline{A_{i(\nu)}} = \bigcap_{i \geq 1} \overline{A_1} = I(F)$$

Por lo anterior, mostramos que dado $n > r$,n arbitrario, y $\phi \in I(F)$, existe solución $x(t,\phi)$ de F que se extiende a tiempos anteriores a $-n-r$, tal que su restricción al intervalo $[-n-r,-n]$, $x_{-n}(\phi) \in I(F)$.

Basta repetir el procedimiento anterior para completar la demostración del lema.

Teorema 1: Sea $F \in B\chi^k(I,M)$, $k \geq 1$, una *EDFAR* en una variedad compacta M. Entonces $A(F)$ es un conjunto no vacío, compacto, conexo, y $A(F) = \cap_{i=1}^{\infty} \Phi_{ir}(C^0(I,M)) = I(F)$.

Demostración: Por definición $A(F) \subseteq I(F)$, y como $A(F)$ es el mayor conjunto invariante, entonces $A(F) = I(F)$.

Otro resultado respecto a $A(F)$ es que si X es un campo vectorial C^1 en una variedad compacta M, la *EDFAR* $F = X \circ \rho$ es tal que $A(F)$ es una variedad C^1.

Para esto, si $x \in M$ considere la trayectoria de X pasando por x, y sea $\sum_x$ la restricción de esta trayectoria al intervalo $I = [-r, 0]$. A cada $x \in M$ corresponde un $\sum_x \in C^0(I,M)$.

Considere la aplicación $\sum : M \longrightarrow C^0(I,M)$ tal que $\sum(x) = \sum_x$.

Entonces $\sum(M) = \{\sum_x \,:\, x \in M\} = A(F)$ es una variedad .[2]

Otros resultados relacionados con perturbaciones en $A(F)$ son los siguientes:

Kurzweil [3] mostró que si $G \in B\chi^2(I,M)$ se encuentra cerca de $F = X \circ \rho$, entonces $A(G)$ es una variedad C^1 difeomórfica a M. Mostró que para cualquier *EDFAR* F de clase C^1, la restricción de Φ a $A(F)$ es sobre M, es decir, en cada $x \in M$ pasa por lo menos una solución global de F.

John Mallet-Paret [9] mostró el último resultado de Kurzweil y además mostró que si $A(F)$ es una variedad sin frontera, entonces es homeomórfica a M.

Hirsch M. W. [8] mostró que un flujo monótono para una *EDFR* no posee órbita atractor periódica.

Mallet-Paret [9] mostró que si la *EDFAR* es cooperativa e irreducible en $C^0(I,M)$ y F lleva subconjuntos acotados de C en subconjuntos acotados de TM, entonces existe un subconjunto de C que contiene un atractor compacto que atrae puntos de C.

El siguiente resultado debido a Waldyr Oliva [1] y [5] e inspirado en el artículo de J. Lewowicz [6] nos dice que:

Teorema 2: Si $F \in B\chi^2(I,M)$ es una *EDFAR* en una variedad compacta M, y si Φ_t tiene derivadas uniformemente acotadas hasta segunda orden, entonces existe una única retracción Γ de clase C^1 de $C^0(I,M)$ sobre $A(F)$ que conmuta con el flujo de F, es decir, $\Gamma(\phi) = \phi, \forall \phi \in A(F)$ y $\Gamma \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Gamma, \forall t \geq 0$.

Demostración: Sea t_n una sucesión de números reales tales que $t_n \longrightarrow \infty$ y $s_n = t_n - t_{n-1} \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Como $F \in \chi^2$ y M es compacto, entonces el conjunto $K_1 = \overline{\Phi_r(C))}$ es compacto con $C = C^0(I,M)$.

Para n suficientemente grande, las restricciones de Φ_{t_n-r} a K_1 constituyen un conjunto de funciones equicontinuas, es decir, existe

$n_0 > 0$ tal que $\{\, \Phi_{t_n-r} : K_1 \longrightarrow C \,\}_{n \geq n_0}$ es una familia equicontinua y para cada $\phi \in K_1$, $\{\, \Phi_{t_n-r}(\phi) \,\}_{n \geq n_0}$ es relativamente compacto.

En efecto. Consideremos en $C^0(I,M)$ la métrica δ definida por

$$\delta(\phi,\psi) = inf_\ell \int_0^1 \left\| \frac{d\ell(s)}{ds} \right\|_{\ell(s)} ds$$

para $\phi, \psi \in C^0(I,M)$ y $\ell : [0,1] \longrightarrow C^0(I,M)$ cualquier camino seccionalmente C^1 de ϕ a ψ.

Como M es compacto, existe una constante $\lambda > 0$ tal que si $\delta(\phi,\psi) < \lambda$, y como $||d\Phi_t(\theta)|| \leq K$ para cada $\theta \in C^0(I,M), t \geq 0$, tenemos que para cada $\phi, \psi \in K_1$, $\delta(\Phi_{t_n-r}(\phi), \Phi_{t_n-r}(\psi)) \leq K\delta(\phi,\psi)$ y por lo tanto $\{\Phi_{t_n-r} : K_1 \longrightarrow C\}_{n \geq n_0}$ es una familia equicontinua.

Como Φ_t es una aplicación compacta, $\{\Phi_{t_n-r}(\phi)\}_{n \geq n_0}$ es relativamente compacta.

Entonces $\{\phi_{t_n-r}\}_{n \geq n_0}$ es una familia equicontinua y puntualmente relativamente compacta. Por el teorema de Arzelá-Ascoli la familia en consideración es relativamente compacta, y existe una subsucesión que hemos denotado por t_n tal que Φ_{t_n-r} converge uniformemente en K_1 a una función continua $\tilde{\Psi}$.

Entonces $\Phi_{t_n} = \Phi_{t_n-r} \circ \Phi_r$ converge uniformemente a la función continua $\Psi = \tilde{\Psi} \circ \Phi_r$ en C.

Utilizando el mismo argumento podemos suponer que para alguna subsucesión, Φ_{s_n} converge uniformemente a una función continua Γ en C, en donde

$s_n = t_n - t_{n-1} \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ahora probaremos que $\Psi(C) = A(F)$.

Sea $\phi \in C$. Como $\Phi_{t_n} \longrightarrow \Psi$ uniformemente en C y como

$\Phi_{t_n}(\phi) \in A_{i(\nu)} := \Phi_{i(\nu)r}(C)$ para alguno $i(\nu) \longrightarrow \infty$ cuando $\nu \longrightarrow \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \Phi_{t_n}(\phi) \in A(F) = \cap_{\nu \geq 1} \overline{A_{i(\nu)}}$ y por lo tanto $\Psi(C) \subseteq A(F)$.

Si $\Phi \in A(F)$ entonces para cada t_n existe $\phi_n \in A(F)$ tal que $\Phi = \Phi_{t_n}(\phi_n)$. Cuando $n \longrightarrow \infty$ existe una subsucesión (indicada con los mismos índices) tal que $\phi_n \longrightarrow \phi$, con $\phi \in A(F)$ por ser $A(F)$ invariante y cerrado.

Entonces

$\delta(\Phi_{t_n}(\phi_n), (\Psi(\phi)) \leq \delta(\Phi_{t_n}(\phi_n), \Phi_{t_n}(\phi)) + \delta(\Phi_{t_n}(\phi), \Psi(\phi)) \leq K\, \delta(\phi_n, \phi)$

$+ \delta(\Phi_{t_n}(\phi), \Psi(\phi)) < \varepsilon$, pues $||d\Phi_t(\phi)|| \leq K$, $\phi_n \longrightarrow \phi$ y $\Phi_{t_n} \longrightarrow \Psi$ uniformemente en C.

Entonces $\Psi(\phi) = \Phi$, y $\Psi : C \longrightarrow A(F)$ es sobreyectiva, y $A(F) \subseteq \Psi(C)$.

Esto completa la demostración de que $\Psi(C) = A(F)$.

Análogamente, $\Gamma(C) = A(F)$.

Las relaciones

$$\Phi_{s_n} \circ \Phi_{t_{n-1}} = \Phi_{s_n + t_{n-1}} = \Phi_{t_n} = \Phi_{t_{n-1}} \circ \Phi_{s_n}$$

muestran que $\Psi \circ \Gamma = \Psi = \Gamma \circ \Psi$, pues $\Phi_{s_n} \longrightarrow \Gamma$ uniformemente y $\Phi_{t_n} \longrightarrow \Psi$ uniformemente.

$\Gamma : C \longrightarrow A(F)$ es una retracción, pues si $\Phi \in A(F)$ entonces existe $\phi \in C$ tal que $\Psi(\phi) = \Phi$, y por lo tanto $\Gamma(\Phi) = \Gamma(\Psi(\phi)) = \Psi(\phi) = \Phi$.

Por otro lado, Γ conmuta con Φ_t, para $t \geq 0$, pues $\Phi_t(\Gamma(\phi)) = \Phi_t(\lim_{n\to\infty} \Phi_{s_n}(\phi)) = \lim_{n\to\infty}(\Phi_t(\Phi_{s_n}(\phi)) = \lim_{n\to\infty}(\Phi_{s_n}(\Phi_t(\phi))) = \Gamma(\Phi_t(\phi))$.

Supongamos que existe otra retracción $\tilde{\Gamma}$ sobre $A(F)$ tal que $\tilde{\Gamma} \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \tilde{\Gamma}$ para $t \geq 0$. Esto implica que $\tilde{\Gamma} \circ \Gamma = \Gamma \circ \tilde{\Gamma}$ pues $\Phi_{t_n} \longrightarrow \Gamma$ en C. Entonces $\tilde{\Gamma}(\phi) = \Gamma(\tilde{\Gamma}(\phi)) = \tilde{\Gamma}(\Gamma(\phi)) = \Gamma(\phi)$, es decir, $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.

Para finalizar, demostraremos que Γ es de clase C^1.

Sea $\overline{(TM)_1} = \{(\phi, \nu) \in TM : ||\nu|| \leq 1\}$ y $C^0(I, (TM)_1) = \overline{C}_1 =$

$\{(\phi, \psi) \in TC^0(I, M) = C^0(I, TM) \,/\, ||\psi|| \leq 1\} \subsetneq C^0(I, TM)$.

$\Psi_t = T\Phi_t$ es el flujo en $TC^0(I, M)$ de la ecuación de primera variación $\omega \circ TF$, en donde $\omega : T^2M \longrightarrow T^2M$ difeomorfismo C^∞ es la involución canónica que lleva carta natural natural en ella misma, solamente intercambiando la segunda y tercera componente, y $\omega \circ TF : TC^0(I,M) \longrightarrow T^2M$ es una *EDFAR* de clase C^{k-1} si F es de clase C^k.

Como $F \in \chi^2$ entonces $\omega \circ TF \in \chi^1(I,(TM)_\theta)$ para cada $\theta > 0$. Para cada $t \geq 0$, existe $\theta > 0$ tal que $\Psi_t(\overline{C_1}) \subseteq C^0(I,(TM)_\theta)$, pues para cada

$(\phi,\nu) \in \overline{C_1}$, $\Psi_t(\phi,\nu) = (\Phi_t(\phi), d\Phi_t(\phi).\,\nu)$ y por lo tanto $||d\Phi_t(\phi)\nu|| \leq K||\nu|| \leq K$. Basta tomar $\theta > K$.

Pero $\omega \circ TF$ en $C^0(I,(TM)_\theta)$ tiene velocidad acotada y por lo tanto Ψ_t es una aplicación compacta para cada $t \geq r$. [2]

Como $\overline{C_1}$ es acotado, $\Psi_r(\overline{C_1})$ es relativamente compacto.

Sea $K_2 = \overline{\Psi_r(\overline{C_1})}$, y consideremos la sucesión de funciones $\Psi_{s_n - r} : K_2 \longrightarrow TC^0(I,M) = C^0(I,TM)$.

Como la restricción de Ψ_t a $C^0(I,(TM)_\theta)$, $\theta > 0$ es una aplicación compacta para cada $t \geq r$, y $K_2 \subseteq C^0(I,(TM)_\theta)$ para algún $\theta > 0$, entonces para cada $(\phi,\nu) \in K_2$ y para n suficientemente grande, digamos $n \geq N$, $\{\Psi_{s_n-r}(\phi,\nu)\}_{n\geq N}$ es relativamente compacto . Como $\Psi_t : C^0(I,(TM)_\theta) \longrightarrow C^0(I,TM)$ tiene derivada acotada , utilizando el mismo razonamiento empleado para mostrar que

$\{\Phi_{t_n-r} : K_1 \longrightarrow C^0(I,M)\}_{n>n_0}$ es una familia equicontinua, tenemos que $\{\Psi_{s_n-r} : K_2 \longrightarrow C^0(I,TM)\}_{n\geq N}$ es una familia equicontinua.

Por el teorema de Arzelá-Ascoli, para la subsucesión s_n, Ψ_{s_n-r} converge uniformemente en K_2 a una aplicación continua $\overline{\gamma} : K_2 \longrightarrow TC^0(I,M)$, y por lo tanto Ψ_{s_n} converge uniformemente a la aplicación continua $\gamma = \overline{\gamma} o \Psi_r$ en $\overline{C^1}$.

Pero $\Phi_{s_n} \longrightarrow \Gamma$ uniformemente en $C^0(I,M)$, y como $T\Phi_n = \Psi_{s_n}$ converge uniformemente a γ en $\overline{C_1} \subseteq TC^0(I,M)$ tenemos que $\gamma = T\Gamma$ y por lo tanto Γ es de clase C^1 .

Teorema 3: Sea $F \in B\chi^2(I,M)$ una *EDFAR* en una variedad compacta. Si F es tal que el flujo Φ_t posee derivadas uniformemente acotadas hasta segundo orden, entonces $A(F)$ es una variedad C^1 compacta y conexa.

Demostración: Por el teorema 2, existe una única retracción $\Gamma : C^0(I,M) \longrightarrow A(F)$ de clase C^1 que conmuta con Φ_t el flujo de F.

Como $C^0(I,M)$ es una variedad C^∞ modelada en un espacio separable de Banach, ([1]), entonces $\Gamma(C^0(I,M)) = A(F)$ es una subvariedad Banach de $C^0(I,M)$, ([2]), y por el teorema 1, $A(F)$ es compacto y conexo.

References

[1] Oliva, W.M., **Functional Differential Equations on Compact Manifolds and an Approximation Theorem** , Journal of Differential Equations 5, 483-496 (1969)

[2] De Faria, E.C., **Comportamento Assintótico de Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento** , P.U.C. Rio de Janeiro, Tesis de Maestria, 1977.

[3] Kurzweil, J., **Global Solutions of Functional Differential Equations**, Lec. Notes in Math., Vol 144, Springer-Verlag, 1970

[4] Mallet-Paret, J., **Generic and Qualitative Properties of Retarded Functional Differential Equations**, Proc. S. Carlos Meet. Braz. Math. Soc., Un. of São Paulo, São Carlos, July 1975

[5] Oliva, W.M., **The Behavior at the infinity and the set of Global Solutions of Retarded Functional Differential Equations**,Proc. S. Carlos Meet. Braz. Math. Soc., Un. of S. Paulo, São Carlos, July 1975.

[6] Lewowicz, J., **Stability Properties of a Class of Attractors**, Trans. of the Am. Math. Soc., Vol. 185, Nov. 1973.

[7] Hale J. K., Magalhães L. T., Oliva W.M.;**An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems-Geometric Theory**, Vol.47 Appl. Math. Sciences, Springer Verlag, 1984.

[8] Hirsch M. W., **The dynamical systems approach to differential equations**, Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984).

[9] Mallet-Paret J., **Morse Descompositions for Delay-Differential Equations**, Journal of Differential Equations 72,2 (1988).