Revista Electrónica EduSol, ISSN: 1729-8091. Año 2014, Volumen 14, No. 46, ene.-mar. , pp. 1-13.
Universidad de Ciencias Pedagógicas "Raúl Gómez García", Guantánamo, Cuba

La enseñanza de la demostración geométrica en la escuela: retos

M.Sc Risel Ruiz Cordovés, Profesor Auxiliar
e-mail: risel@ucp.gu.rimed.cu
Institución: Universidad de Ciencias Pedagógicas "Raúl Gómez García"
Provincia: Guantánamo
País: Cuba

Fecha de recibido: diciembre de 2013
Fecha de aprobado: enero de 2014

RESUMEN

El trabajo aborda algunas aristas y falacias sobre el trabajo con los teoremas y las demostraciones de proposiciones matemáticas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en todos los niveles de educación y propone una salida didáctica que contribuye a esclarecer el actuar de los docentes al enfrentar esta tarea.

Palabras Clave: Geometría; Enseñanza de la Matemática; Proposiciones; Educación

The teaching of geometrical proof at school: challenges

ABSTRACT

The paper addresses some edges and fallacies about working with theorems and proofs of mathematical propositions in the teaching and learning of mathematics at all levels of education and proposes an educational outlet that helps clarify the actions of teachers to cope task.

Keywords: Geometry, Teaching Mathematics; Proposals; Education

INTRODUCCIÓN

Aprender a demostrar proposiciones matemáticas es tan difícil para el estudiante, como es difícil para el profesor de Matemática enseñar las demostraciones. Esa es una realidad de la praxis. Pero, ¿por qué?

En el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática escolar, están dadas todas las condiciones para garantizar el éxito en este empeño, ¿o no? Este trabajo aborda algunas aristas y falacias que se observan en todo este proceso, y propone una salida didáctica, que si bien no pretende agotar el tema, procura esclarecer el actuar de los docentes al enfrentar esta tarea.

DESARROLLO

Proposición, conjetura y teorema

Según Bogart (1998), una proposición matemática es un enunciado declarativo, no ambiguo, es decir que no carece de contexto de aplicación, del cual tiene sentido determinar su valor de verdad. En toda proposición subyace la idea de tiempo pasado o actual. Así, de una afirmación a futuro, difícilmente pueda determinarse su veracidad o falsedad.

Aunque esta definición puede satisfacer las exigencias del rigor en el lenguaje matemático, se entiende aquí por proposición matemática “una estructura donde se expresa bien la afirmación o la negación de proposiciones de entes matemáticos y relaciones (interacciones, nexos, dependencias, etc.) entre estos entes”. (Beltrán, 2013).

En este sentido, las proposiciones que se estudiarán tendrán un valor veritativo bivalente, que quiere decir que la misma puede ser verdadera o falsa y no existe ninguna otra posible valoración, como es considerarla al mismo tiempo verdadero y falsa. Aristóteles utilizaba el nombre de principio del tercero excluido (tertium nom datar) para designar esta premisa.

¿Teorema o conjetura?

Existe un concepto que vale la pena entender antes de proseguir: el concepto de conjetura. Por conjetura (del latín coniectūra) se entiende el juicio que se forma (moral, ético o matemático) de las cosas o sucesos por indicios y observaciones.

En la Matemática, el concepto de conjetura se refiere a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta la fecha. Una vez que se demuestra la veracidad de una conjetura, esta pasa a ser considerada un teorema de pleno derecho y puede utilizarse como tal para construir otras demostraciones formales.

Un ejemplo de esto, es lo que hasta 1995 fue mal llamado Gran teorema de Fermat: Si n es un número entero **mayor que 2**, entonces no existen números enteros a, b y c, tales que se cumpla la igualdad $a^n + b^n = c^n$ (con a, b, c **no nulos**).

Se asume como demostración matemática, la definida por Müller (1980): "sea un sistema de expresiones X. Una demostración de la proposición Q es una sucesión finita de expresiones Q_1, Q_2,..., Q_n, Q que terminan en Q y que satisface para cada término Q_i una de las condiciones siguientes: Q_i pertenece a X, o Q_i puede deducirse de expresiones precedentes, o expresiones de X mediante una regla de inferencia". (Müller, 1980, p. 34).

Tener estos conceptos definidos es un paso de avance, pero dista mucho de considerar el camino para enfrentar y resolver con éxito un ejercicio de demostración matemática en la escuela. El camino que se sigue en la escuela es el más fácil: o bien no se demuestra ningún teorema (en contradicción con lo exigido en los programas de estudio, que aunque no es mucho, sí se proyecta al respecto), o bien los teoremas y ejercicios de demostración que se proponen se refieren exclusivamente a propiedades de algunas figuras geométricas, a partir de modelos ya establecidos por el profesor.

Observemos cómo se enfoca el problema en la asignatura Matemática para la Secundaria Básica (la de otros niveles de enseñanza no dista mucho de esta realidad)

Es una necesidad que en la planificación, orientación y control del trabajo independiente de forma sistémica, variada y diferenciada se deba estimular el desarrollo de los estudiantes, de modo que se planteen metas y objetivos de aprendizaje y se estimule la autorregulación de su actividad, proponiéndoles argumentar matemáticamente a través de: explicar el proceso seguido en la resolución de un ejercicio, fundamentar una respuesta, reconocer relaciones, formular una conjetura, dar razones sobre su validez, demostrar un teorema, evaluar un razonamiento.

Es significativo que esta exigencia es reconocida en el programa de Matemática para el 7º grado de la escuela cubana, sin embargo este mismo programa no exige la demostración de ningún teorema.

La intuición, la inducción y la deducción

La intuición es un concepto básico de la Teoría del conocimiento y aplicado en la epistemología que se describe como aquel conocimiento que es directo e inmediato, sin intervención de la deducción o del razonamiento, siendo habitualmente considerado como evidente. Un primer problema con esto es: ¿qué es lo evidente?, ¿cómo saber que algo es cierto por evidente?

La intuición es comprensión sintética, es el primer indicio de una profunda unificación subjetiva. La manera más útil de desarrollar la intuición es mediante la interpretación de los símbolos A veces el carácter propedéutico de la educación primaria confunde a docentes y a escolares en la demostración de propiedades.

El razonamiento inductivo es el tipo de razonamiento en que la verdad de las premisas brinda apoyo a la verdad de la conclusión, **pero no la garantiza**. Justamente esta última parte de la afirmación es la más importante, y la que más trabajo cuesta en las clases de Matemática. El hecho de que no se garantiza la verdad en cuestión, es la invitación a demostrarla.

Rara vez se observa en las clases de Matemática la demostración del teorema referido a que "la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo, es igual a 180º", más raro aún es demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa (Teorema de Pitágoras). A los mismos estudiantes de 5º año se les preguntó: Enuncie y demuestre uno de los teoremas que usted demuestra en sus clases de Matemática en la escuela. Sólo uno de ellos pudo recordar un teorema, y no pudo demostrarlo. En otra ocasión se les pidió que enunciaran y demostraran el Teorema de Pitágoras. Aquí los errores fueron dos: no recuerdan con el rigor que se exige el enunciado, y ninguno es capaz de al menos iniciar una demostración del mismo.

Una razón para esta situación radica en que en la mayoría de los casos, se apela a la inducción exagerada del concepto o la propiedad, y en muy pocos casos se demuestra el resultado en cuestión.

En resumen, el razonamiento inductivo consiste en obtener conclusiones generales a partir de premisas que contienen datos particulares. Por ejemplo, de la observación repetida de objetos o acontecimientos de la misma índole se establece una conclusión para todos los objetos o eventos de dicha naturaleza.

Ejemplo: Premisas

- 4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; 10 = 3 + 7; 12 = 5 + 7; 14 = 3 + 11

Conclusión

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

En este razonamiento se generaliza para todos los elementos de un conjunto la propiedad observada en un número finito de casos. Sin embargo, la verdad de las premisas (no importa la cantidad de observaciones favorables a esta conclusión) no convierte en verdadera la conclusión, ya que podría haber una excepción.

En un razonamiento inductivo válido, por tanto, es posible afirmar las premisas y, simultáneamente, negar la conclusión sin contradecirse. Acertar en la conclusión será una cuestión de probabilidades. Es por ello que la veracidad de la propiedad solo se puede asegurar a partir de una demostración rigurosa de la misma.

No significa esto que en la escuela no deben hacerse razonamientos que no requieran de la intuición y que no se apele a los métodos inductivos para generar conocimientos. La cuestión está dada en alertar acerca del abuso, siempre injustificado del empleo de estos métodos para aseverar la veracidad de todas las proposiciones que se estudian en la escuela.

La deducción en cambio, da otras posibilidades para la construcción desde la ciencia del conocimiento matemático.

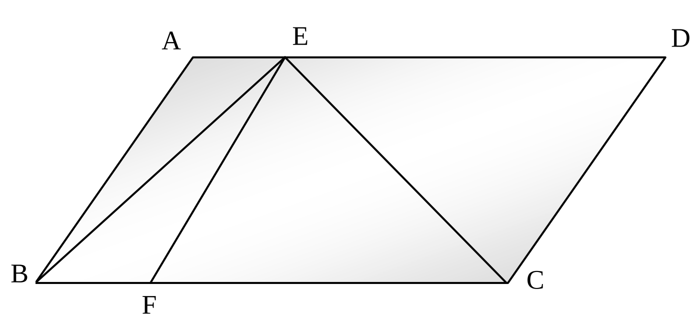
No es pertinente la axiomatización absoluta de la ciencia o de su enseñanza como premisas para asegurar su carácter deductivo. Un sistema axiomático es la forma acabada que toma hoy una teoría deductiva. Es un sistema donde todos los términos u objetos no definidos y las proposiciones no demostradas se enuncian explícitamente, siendo estas últimas, fijadas como hipótesis a partir de las cuales pueden construirse las demás proposiciones del sistema, siguiendo unas reglas lógicas perfectas y expresamente determinadas.

Mediante la demostración, se establecen nuevas proposiciones o relaciones entre los objetos a partir de las relaciones dadas como axiomas; luego se hace necesario nombrar o definir los nuevos objetos que verifican estas propiedades.

El carácter demostrativo del gráfico o la figura

Un problema que se presenta hoy en las clases de Matemática, no importa al nivel que sea, radica en el valor de verdad que se asocia a la figura, como argumento demostrativo de cierta propiedad por docentes y estudiantes de Matemática.

Baste un ejemplo: ABCD es un paralelogramo, y E es un punto del lado AD. Clasifique el



triángulo BCE según sus lados.

Bajo ciertas condiciones, que incluye que el segmento EF sea paralelo al segmento AB, los segmentos BE y EC son iguales, por tanto el triángulo dado es isósceles de base BC, y no escaleno como “parece”

Solo se agrega a este tópico que el carácter demostrativo de la figura es nulo. Si bien es un apoyo a la demostración de cualquier propiedad, concluir que esta es válida, “como se muestra en la figura” es falso.

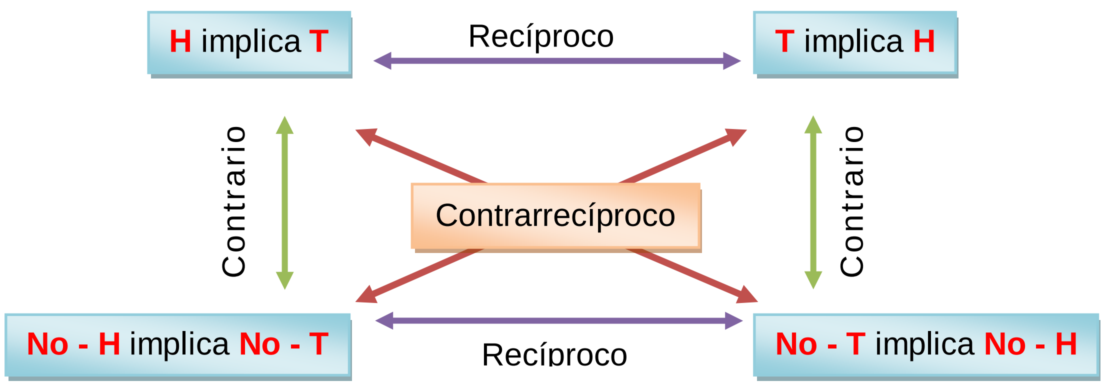
¿Qué hacer entonces?

A. Lo primero: Dotarse de una teoría.

Una primera propuesta se puede observar a partir de estudiar fragmentos del texto, Análisis Matemático. Volumen I de Julio Rey Pastor; Pedro Pi Calleja y Cesar A. Trejo., pág: 3-5

Dado el teorema “H $\Rightarrow$ P” hay varios teoremas relacionados con él. Dos se llaman r**ecíprocos**, cuando cada uno tiene como hipótesis la tesis del otro; se llaman **contrarios** los que tienen como hipótesis y tesis proposiciones respectivamente contrarias (H y no - H, T y no -T).

He aquí indicados el teorema dado (llamado directo) y además el recíproco, el contrario y el recíproco del contrario (o contrario del recíproco), que llamaremos **contrarrecíproco**.



Un error muy común en las clases de Matemática, y lamentablemente casi a cualquier nivel de enseñanza, es el declarar o asumir como válido el recíproco de cualquier teorema sin previa demostración.

El teorema directo expresa que H es *suficiente* para que se cumpla T; el recíproco dice que H es necesario para que se cumpla T. Si son válidos ambos teoremas, directo y recíproco, entonces H y T son equivalentes (H = T), y se dice que H es **condición necesaria y suficiente** para que se cumpla T. Así ocurre en el ejemplo:

H: “El triángulo ABC es equilátero”; T: “El triángulo ABC es equiángulo”.

Dos teoremas contrarrecíprocos son equivalentes; es decir, la validez de uno de ellos implica la del otro.

El método de razonamiento que consiste en probar el teorema directo valiéndose del contrarrecíproco, se llama **“por reducción al absurdo”**; es decir, que para demostrar que “H implica T”, se acepta la falsedad de T (no-T), y de ella se deduce la falsedad de H (no-H).

Insistimos en un detalle: las proposiciones matemáticas se demuestran en forma deductiva. Ningún resultado matemático puede considerarse válido, si no ha sido deducido de las proposiciones de partida. La familiarización con los mecanismos de demostración utilizados en la matemática constituye un aspecto básico para comprender una demostración matemática. Dos situaciones deductivas corrientes en la actividad matemática lo constituyen la búsqueda y el análisis de la demostración de una proposición.

En ambos caso encontramos el siguiente problema: el establecimiento de la verdad de una proposición matemática partiendo de la verdad de otras proposiciones, algunas quizás, previamente demostradas. Las proposiciones aceptadas como verdaderas en la demostración son las **hipótesis o premisas** de la demostración.

Las proposiciones previamente demostradas que se utilizan en la demostración al igual que la proposición que se demuestra se denominan **teoremas**. La demostración en sí está constituida por una sucesión ordenada de proposiciones cada una de las cuales constituye lo que se denomina un **paso** en la demostración. La última proposición de la sucesión es precisamente la proposición que se quiere demostrar. Cada paso, es decir, la inserción de cada proposición en la cadena, debe estar **lógicamente justificada.**

B. Lo segundo: Dotarse de un procedimiento.

El matemático húngaro George Polya, hace algunas consideraciones en cuanto a la clasificación de los problemas que enfrentan los alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura Matemática, que por su importancia para el tema, se destaca a continuación. Parte de considerar que los problemas se dividen en "problemas por resolver" y "problemas por demostrar". En los “problemas por resolver” el propósito es descubrir cierto objeto, la incógnita del problema, es decir, lo que se busca o lo que se pide. (Polya, 1989, p. 23)

En los "problemas por demostrar", el propósito consiste en mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada. Sus elementos son, si es un problema matemático de la forma más usual, la hipótesis y la conclusión del teorema que hay que demostrar o refutar. Si se tiene que resolver un problema por demostrar deben conocerse, exactamente, sus partes principales, hipótesis (premisa) y tesis (conclusión).

A continuación, es necesario considerar otros elementos metodológicos esenciales en cuanto a las demostraciones geométricas, sobre la base de los planteamientos de Ballester y sus seguidores (Ballester, 1992, p. 43)

En este apartado, el profesor debe tener en cuenta los siguientes elementos que rigen su modo de actuación al enfrentar a los estudiantes a la solución de los ejercicios. Estos son :

I. Reformular la proposición de manera implicativa: si…, entonces…

II. Determinar el tipo de demostración:

- **Demostración directa**: Se parte de la premisa de la proposición a demostrar, se aplican reglas de inferencia lógica, se obtiene la tesis.

Teorema A $\rightarrow$ B	
Premisa: A	Tesis: B
Demostración Suponemos que A es válida Inferimos utilizando teoremas, definiciones, reglas lógicas, hasta que: Se obtiene B Luego resulta que “si A entonces B”	

- **Demostración indirecta**: Es verdadera la negación lógica de la proposición a demostrar y se verifica que esta suposición conduce a una contradicción.

Teorema A$\rightarrow$ B	
Premisa: A	Tesis: B
Demostración Suponemos que no es cierto que A$\rightarrow$ B Esto equivale a suponer que A es cierta y B no lo es. Inferimos utilizando teoremas, definiciones y reglas lógicas, hasta que: Surge una contradicción La contradicción indica que nuestra suposición es falsa, luego resulta que “Si A, entonces B”	

III. Búsqueda de una idea y un plan de demostración

La búsqueda de la demostración se inicia con la motivación de su necesidad. Algunos de los argumentos, para despertar en los alumnos el interés por probar la veracidad de una proposición dada, se basan en:

- Error de medición.
- Aberraciones ópticas.
- Exigencias de recíprocos falsos de proposiciones verdaderas.
- Formulación de una proposición universal, tras haber analizado solo un número limitado de casos.

Seguidamente se dirige la atención al análisis de lo que se desea demostrar. El primer paso es la comprensión del enunciado de la proposición. Algunas de las acciones que contribuyen a este particular pueden ser:

- ¿La proposición está formulada de forma implicativa?
- ¿Cuáles son sus premisas?
- ¿Cuál es la tesis?
- ¿Puedes construir una figura de análisis?
- ¿Será necesario reformular la proposición?
- De igual manera resulta importante, precisar el campo de búsqueda:
- ¿En qué unidad de materia se ubica la supuesta proposición?
- ¿Qué contenidos se estudiaron con anterioridad?
- ¿Conoces las definiciones de los conceptos mencionados en la proposición?
- ¿Han sido estudiadas otras proposiciones con premisas y tesis similares a las de esta?
- Para buscar una idea y trazar un plan de demostración, se utilizan recursos heurísticos.
- Se utilizan tres tipos fundamentales de orientaciones, para avanzar en el proceso de búsqueda:

Orientaciones que radican en la propia proposición:

- La selección de un método de demostración apropiado se basa en el análisis de la estructura de la proposición.
- La sustitución de los conceptos por sus definiciones es una acción importante para hallar la idea de demostración.
- La precisión de la premisa y la tesis permite elaborar un campo de búsqueda con proposiciones que poseen premisas o tesis similares.

Orientaciones que se extienden fuera de la proposición:

- El establecimiento con analogías de demostraciones realizadas, la transferencia de determinadas ideas empleadas al resolver ejercicios de la unidad temática que se emplean con éxito en la resolución de tareas similares, constituyen el núcleo de estas orientaciones, la cual son importantes en el aprendizaje de las reglas de inferencia lógica por parte de los estudiantes de forma implícita.

Orientaciones sobre el empleo de recursos heurísticos:

- Principios, reglas y estrategias heurísticas rigen la orientación general del proceso de búsqueda.
- La estrategia heurística del trabajo hacia delante y del trabajo hacia atrás tienen mucha importancia.

IV. Selección de los procedimientos especiales de demostración:

- Demostración por construcción de ejemplos o contraejemplos.

Supóngase que se desea refutar la siguiente proposición:

“Si dos cuerdas de una circunferencia son iguales, entonces son paralelas”

Basta encontrar un contraejemplo: ejemplo Dos diámetros diferentes, son dos cuerdas iguales, sin embargo, se cortan.

- Demostraciones a través de contrarrecíproco

Tómese, por ejemplo, la proposición:

“Si ABCD es un paralelogramo, entonces sus lados opuestos son paralelos”

Recíproco

“Si los lados opuestos de un cuadrilátero ABCD son paralelos entonces ABCD es un paralelogramo”

Contrarrecíproco

“Si los lados opuestos del cuadrilátero ABCD no son paralelos, entonces ABCD no es paralelogramo”

Demostrando de manera directa el contrarrecíproco se llega a probar la validez de la proposición original.

Partiendo de la hipótesis, si el cuadrilátero ABCD no tiene los lados opuestos paralelos, por definición es un trapezoide, lo que demuestra que el cuadrilátero ABCD no es un paralelogramo.

V. Exposición comprensible de la demostración:

Para resolver el problema de la representación podemos apoyarnos en una sucesión de indicaciones como al siguiente (en el caso de demostraciones directas):

- Escribe las premisas.
- Escribe la tesis.
- Dibuja una figura de análisis en el caso necesario.

- Utiliza el siguiente esquema de demostración:

Pasos de demostración	Fundamentación
(1)… (2)…	… …

- Escriba en un orden adecuado todas las conclusiones que conducen de la premisa a la tesis. Al final debe aparecer la tesis.
- Verifica las inferencias y escribe las fundamentaciones necesarias.
- Elabora una oración que exprese lo que has demostrado.

Los esquemas como el incluido en las indicaciones anteriores, tiene algunas ventajas a los efecto de enseñar a los alumnos cómo se presentan las demostraciones.

VI. Evaluación de la demostración.

En la última fase de la representación de la demostración, se debe evaluar su resultado. Entre otras se deben responder las siguientes preguntas:

- ¿Contiene la representación todos los pasos fundamentales para la comprensión de la demostración?
- ¿Contiene pasos que resulten superfluos?
- ¿Están escritas las fundamentaciones indispensables?
- ¿Es correcta la demostración desde el punto de vista lógico?
- ¿Está expresada en un lenguaje adecuado?

Se propone emplear los procedimientos para el tratamiento de teoremas, en la resolución de ejercicios geométricos de demostración empleando las estrategias y recursos del aprendizaje cooperativo, en el sentido del trabajo estructurado en equipos y a partir de estrategias y tareas concretas bien delimitadas que circunscriban su actuación individualizada y grupal.

CONCLUSIONES

La familiarización con los mecanismos de demostración utilizados en la Matemática constituyen un aspecto básico para comprender una demostración matemática.

La esencia de enseñar a demostrar en la asignatura Matemática radica en escalonar racionalmente elementos de la intuición, la inducción, conjeturar, buscar el teorema y demostrarlo. Ninguno de estos elementos por separado garantiza un proceso de enseñanza - aprendizaje de la demostración favorable para el desarrollo de habilidades. De igual manera el abuso en el empleo de elementos intuitivos o inductivos afectan el aprendizaje de la demostración que tanto necesita el estudiante.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ballester, Sergio; Metodología de la enseñanza de la Matemática. T. I. La Habana, Pueblo y Educación. 1992.
2. Bogart K. Matemática Discreta. México, Limusa. 1998.
3. Campistrous, Pérez, L y C. Rizo Cabrera. Aprende a resolver problemas aritméticos. La Habana, 1998.
4. Herbst, P. Acerca de la demostración y la lógica de la práctica en la enseñanza de la Geometría. Michigan, Preuve. 1999.
5. Müller, H. Inferencia lógica y demostraciones de la enseñanza de la Matemática. La Habana, Pueblo y Educación. 1980.
6. Pastor, Julio Rey; Pedro Pi Calleja y Cesar A Trejo. Análisis Matemático. Volumen I. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable. La Habana, Edición Revolucionaria. 1963.
7. Polya, George. Como plantear y resolver problemas. México, Trillas. 15. reimpr. 1989.
8. Tarzia, D. Curso. Como resolver problemas y realizar demostraciones en Matemática. Rosario, Argentina. 1999.