ARETÉ Revista de Filosofía
Vol. XV, Nº 1, 2003
pp. 35-62

Sobre la realidad de las matemáticas

Carlos Casanova
Universidad Simón Bolívar, Caracas

El artículo trata sobre el objeto de las matemáticas, sobre si éste existe en la realidad o no. El artículo adopta una perspectiva intemporal y, por ello, incoa un diálogo entre físicos o matemáticos contemporáneos y algunas de las reflexiones clásicas sobre el tema. Entre estas últimas, incluye la platónica, la aristotélica, la empirista y la kantiana. Por otra parte, trae a colación la distinción clásica entre *via inventionis* y *via demonstrationis* en orden a distinguir las verdades matemáticas, los principios en que ellas pueden resolverse y la forma concreta en que esos principios pueden ser relacionados para construir una demostración. Esto puede arrojar luces sobre por qué las verdades matemáticas pueden ser percibidas por los matemáticos como eternas, aunque los modos de demostrarlas o los contextos puedan ampliarse o variar.

*

"On Mathematics' Reality". The paper deals with the object of mathematics, and tries to show if it is real or not. It is written from an intended timeless point of view, and because of that it opens a dialogue between contemporary physicists or mathematics and classic reflection on the matter. Among those reflections, it embraces the Platonic, Aristotelian, empiricist and Kantian. Moreover, it considers the classic distinction between *via inventionis* and *via demonstrationis*, in order to distinguish between mathematical truths, the principles or axioms in which they can be resolved and the concrete ways in which those principles can be interwoven for the construction of a demonstration. This can enlighten the problem of why mathematical truths are perceived by mathematicians as eternal, while the ways through which or the contexts in which they are demonstrated can be amplified or modified.

Hoy en día hay quien sostiene que la matemática es una quimera, una pura "invención" de la mente humana. Los axiomas del álgebra, en particular, serían arbitrarios. Frente a ellos se levantan no pocos matemáticos que piensan que su objeto de estudio existe, tal como lo pensaba Platón. Algunos sostienen que no puede ser una creación de la mente, sino que procede de la experiencia sensorial, por abstracción. Otros, con Kant, suponen que el matemático sólo intuye formas *a priori*, como la de espacio. Todavía otros están de acuerdo con Aristóteles en que el objeto de la matemática es la abstracción de dimensiones cuantitativas de lo real, pero que se captan no por la pura experiencia sensorial. Éstos se tienen que enfrentar con los husserlianos, a menudo, que piensan que dicho objeto no es un accidente como la cantidad, pues también las sustancias son numerables.

El esbozado será el problema central de las páginas que siguen. Pero otro problema, conexo, será el siguiente: si el objeto de las matemáticas es un hecho que puede ser encuadrado en diversos sistemas axiomáticos; o si nunca puede decirse que sea un hecho, y la diversidad de sistemas axiomáticos posibles es consecuencia, sencillamente, de la distinción entre la *via inventionis* (vía de la investigación) y la *via demonstrationis* (vía de la demostración). En este punto será útil comparar a la matemática con la física.

A. Parece que la matemática no tiene ningún objeto real.

La primera opinión se basa, hasta donde yo sé, en dos tipos de argumentos: a) en que en el álgebra se definen las nociones primitivas y las reglas de interrelación o de conexión entre esas nociones de un modo aparentemente arbitrario; y en la matemática hay creaciones que definitivamente se apartan de nuestra experiencia del mundo, tales como los espacios de más de tres dimensiones o los números complejos. Y, b) en que una rama de la matemática tan venerable como la geometría de Euclides ha sido "superada" en los siglos XIX y XX. Y si ni siquiera la geometría pudo resistir los embates del flujo del pensamiento humano, ¿qué puede haber que sea fijo y verdadero?

Al primer tipo de fundamento de esta opinión, el que surge de los principios del álgebra o de otras nociones muy artificiales de la matemática, hay que responder –con una obra que citaremos a menudo en estas páginas– varias cosas:

a.1) No todos los sistemas algebraicos que se creen serán interesantes, sino sólo aquellos que respondan a la realidad del objeto de la disciplina, los que tengan gran significación bien sea en las matemáticas mismas o en sus aplicaciones a las ciencias naturales o técnicas[1].

a.2) Los espacios de más de tres dimensiones son aplicaciones metafóricas de la noción de espacio a ámbitos no espaciales: "... la geometría más temprana estudiaba sólo las formas *espaciales* y las relaciones del mundo material, y por tanto sólo en la medida en que ellas aparecen en el marco de la geometría euclidiana. Pero ahora el objeto de la geometría comenzó a incluir también muchas *otras* formas y relaciones del mundo real, supuesto sólo que ellas sean semejantes a la espacial y, por tanto, permitan el uso de los métodos geométricos. El término 'espacio', entonces, tomó en las matemáticas un nuevo significado, más amplio y al mismo tiempo más especial. Simultáneamente los métodos de la geometría se hicieron mucho más ricos y más variados. A su vez, ellos nos proveyeron un instrumento más completo de aprender acerca del mundo físico que nos rodea, el mundo del que fue abstraída la geometría en su forma original."[2]

a.3) En cuanto a los números complejos, Heisenberg hace unas observaciones sumamente interesantes en sus *Diálogos sobre la física atómica*: "Estarás, sin duda [tú, Pauli], de acuerdo conmigo si yo afirmo que la proposición 'existe la raíz cuadrada de –1', no significa otra cosa que 'existen importantes relaciones matemáticas que se pueden representar de la forma más sencilla con la introducción del concepto raíz cuadrada de –1'. Ahora bien, las interrelaciones existen también sin esta introducción. Por consiguiente, se puede aplicar prácticamente esta

[1] *Cf.* Aleksandrov, Kolmogorov y Lavrent'ev (eds.), *Mathematics, its Content, Methods and Meaning*, traducido por S. H. Gould y T. Barba, Cambridge, Mass.: MIT Press, 1965, pp. 264-265 (se usará sólo el volumen I). En el mismo sentido, Corry, Leo, "Hilbert y su filosofía empirista de la geometría", en: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, IX (2002), p. 31.
[2] *Cf. ibid.*, pp. 56-57, 264-265.

forma matemática tanto en las ciencias naturales como en la técnica. En la teoría de las funciones es un dato categórico, por ejemplo, la existencia de importantes estructuras matemáticas que se refieren a pares de variables continuamente mudables. Estas relaciones resultan más fácilmente inteligibles si se forma el concepto abstracto raíz cuadrada de –1, aunque éste no sea fundamentalmente necesario para esa comprensión y aunque no se dé ningún concepto correlativo entre los números naturales... Por tanto, en la ciencia matemática se registra un proceso continuado de creciente abstracción que posibilita la comprensión unitaria de dominios cada vez más amplios.” [3]

En cuanto al segundo tipo de argumentos que aduce esta tesis (b), debe decirse que el hecho de que haya geometrías no euclidianas no invalida la obra de Euclides. Simplemente la perspectiva del griego puede ser completada con otras perspectivas. La experiencia humana de la realidad es siempre limitada, pero esos límites no implican que sean falsas las afirmaciones que se hagan desde ella. Y el lenguaje nunca recoge toda la riqueza de nuestras experiencias; de modo que la forma como expresamos e, incluso, concebimos lo que entendemos puede adolecer de imperfecciones que, sin embargo, no impidan que desde lo expresado se capte una realidad que se encuentra “más allá” de ello[4]. Ilustraré lo dicho con unos textos de Heisenberg, referidos en su mayoría a la perspectiva constituida por la física newtoniana, pero aplicables con más razón (*a fortiori*) a la geometría de Euclides.

La teoría de la relatividad y la mecánica cuántica son sistemas axiomáticos que se introdujeron en la física o fueron aceptados en ella para dar cuenta de un conjunto de resultados experimentales que no podían ser explicados por la mecánica newtoniana o la teoría electromagnética de Maxwell. Sin embargo, los experimentos en los que se obtuvieron esos resultados fueron concebidos y montados de acuerdo con

[3] Heisenberg, W., *Diálogos sobre la física atómica*, Madrid: Biblioteca de Autores Cristianos, 1975. p. 112.

[4] Ésta es la razón por la que en ninguna ciencia se cierra nunca la *via inventionis*, en la que los razonamientos son dialécticos. Como dicen los autores rusos citados: “el rigor de la matemática no es absoluto; está en un proceso de continuo desarrollo. Los principios de la matemática no se han congelado de una vez por todas, sino que tienen una vida propia y pueden aún ser objeto de controversias científicas”. Aleksandrov, Kolmogorov y Lavrent’ev (eds.), *o.c.*, p. 3.

las leyes de la mecánica newtoniana o de la teoría electromagnética maxwelliana. Esto plantea un problema teórico. Y a él responde Heisenberg: "...el punto de partida obvio para la interpretación física del esquema matemático en la relatividad general es el hecho de que la geometría es muy aproximadamente euclidiana en las dimensiones pequeñas. La teoría se aproxima a la teoría clásica en esta región. Entonces, aquí la correlación entre los símbolos matemáticos y las mediciones y los conceptos del lenguaje ordinario no es ambigua. Sin embargo, se puede hablar de geometría no euclidiana en las grandes dimensiones... [Por lo dicho,] en la teoría de la relatividad general el lenguaje por el cual describimos las leyes generales sigue al lenguaje científico de los matemáticos, y en la descripción de los experimentos mismos podemos usar los conceptos ordinarios, puesto que la geometría euclidiana es válida con suficiente precisión en las pequeñas dimensiones."[5]

El texto anterior se refiere directamente a la geometría euclidiana. Ahora señalaré otros que se refieren a otras partes de la ciencia, pero que son útiles para mostrar el problema de la relación entre el lenguaje y la experiencia o el de la relación entre la verdad y nuestras limitadas perspectivas. Veamos el primero: "El problema más difícil, sin embargo, acerca del uso del lenguaje surge en la teoría cuántica. Aquí no tenemos al comienzo una guía simple para correlacionar los símbolos matemáticos con los conceptos del lenguaje ordinario, y lo único que sabemos al comienzo es que nuestros conceptos comunes no pueden aplicarse a la estructura de los átomos. De nuevo, el punto obvio de partida para la interpretación del formalismo parece ser el hecho de que el esquema matemático de la mecánica cuántica se aproxima a aquél de la mecánica clásica en las dimensiones que son grandes comparadas con el tamaño de los átomos."[6]

[5] Heisenberg, W., *Physics and Philosophy*, Nueva York: Harper and Row Publishers, 1962, pp. 176-177 (traducción mía de la edición inglesa). Es obvio que la geometría euclidiana constituye una abstracción mayor que la geometría de los egipcios y babilonios, formulada exclusivamente para su aplicación física. Por ello, pienso que puede decirse que, fuera del campo de la aplicación física, Euclides conserva mayor validez que en ese campo. El argumento que puede extraerse del texto de Heisenberg es, por tanto, muy fuerte.

[6] *Ibid.*, p. 177. Allí añade Heisenberg que en el caso de la mecánica cuántica la correspondencia no es tan clara. Hay que explicar por qué no se da el fenómeno de la interferencia de probabilidades, y pasa a hacerlo.

Antes ha dicho el gran físico que la discrepancia entre la mecánica newtoniana y los resultados experimentales que llevaron a la teoría de la relatividad o a la mecánica cuántica no era cuestión de los "hechos" (*facts*), sino del lenguaje[7]. Los hechos eran claros. Y entre ellos no puede haber discrepancia. El principio de no-contradicción está supuesto en cualquier experiencia humana de la realidad distinta de la primera en la que formulamos dicho principio. Lo que hay, más bien, es un desacuerdo entre un modo de formular las experiencias relativas a un campo de fenómenos y otro modo de formular las relativas a otro campo. Ese desacuerdo se ve como "un problema de lenguaje" y, por ello, se buscan caminos que salven todas las experiencias.

Por lo dicho, porque las experiencias que fundamentan la formulación newtoniana de la mecánica no pueden "quedar superadas", puede decir Heisenberg: "Creo que no se puede perfeccionar en modo alguno la mecánica newtoniana, y con esto quiero decir lo siguiente: siempre que queremos describir cualquier fenómeno con los conceptos de la física newtoniana, como, por ejemplo, lugar, velocidad, aceleración, masa, fuerza, etc., tienen plena validez las leyes de Newton, y en esto nada habrá cambiado en los próximos cien mil años. Para ser más preciso, conviene que añada algo: en cuanto al grado de precisión con que se pueden describir los fenómenos con los conceptos newtonianos, tienen vigencia también las leyes de Newton. El hecho de que este grado de precisión sea limitado era un dato naturalmente conocido ya en la física precedente, ya que nadie podía hacer mediciones con una exactitud perfecta."[8]

Más adelante, añade Heisenberg algo que es relevante indirectamente para la matemática: el criterio de verdad de la física. Y digo que es relevante para la matemática, porque la ciencia de la naturaleza utiliza el formalismo matemático: si hay verdad en la ciencia natural, ¿cómo podría no haberla en la matemática? Éste es un argumento usado en otro de nuestros acápites, pero puede adelantarse aquí. Según Heisenberg, pues, la física no se perfecciona como la ingeniería, que es una disciplina mecánica o práctica, por medio de adiciones de pequeñas herramientas conceptuales. "Sería totalmente falso poner como nivel de las correcciones del ingeniero los cambios fundamentales que aparecen

[7] *Cf. ibid.*, pp. 174-175.
[8] Heisenberg, W., *Diálogos sobre la física atómica, o.c.*, pp. 120-121.

en el paso desde la mecánica newtoniana a la mecánica relativística o cuántica, porque el ingeniero, cuando corrige, no necesita modificar nada de sus conceptos anteriores. Todas las palabras mantienen su significado anterior; sólo se introducen en las fórmulas correcciones para determinadas realidades que antes se habían descuidado. Semejantes cambios no tendrían, sin embargo, sentido alguno dentro de la mecánica newtoniana. No hay experimento alguno que pueda confirmarlo. En esto estriba precisamente el sentido absoluto y permanente de la física newtoniana: en que no puede perfeccionarse dentro de su campo de aplicación por pequeñas modificaciones y en que desde hace mucho tiempo ha encontrado su forma definitiva. Mas hay campos experimentales en los que no podemos avanzar con el sistema conceptual de la mecánica newtoniana. Para tales campos experimentales necesitamos estructuras conceptuales totalmente nuevas, y éstas nos las ofrecen, por ejemplo, la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica. La física newtoniana tiene –y esto para mí es importante– un grado de perfección conclusa, que los recursos físicos del ingeniero jamás poseerán."[9] Esa perfección conclusa está vinculada al "criterio más importante de la verdad en nuestra ciencia, la sencillez siempre resplandeciente de las leyes de la naturaleza... Si resumimos por medio de fórmulas los resultados de los experimentos, como debe hacerse siempre en la física teórica, y llegamos así a una descripción fenomenológica de los procesos, tenemos entonces la impresión de que hemos inventado esas fórmulas, y que las hemos inventado con éxito más o menos satisfactorio. Pero, cuando nos topamos con esas grandes interrelaciones extraordinariamente sencillas que quedan fijadas definitivamente dentro de la axiomática, tiene el asunto un aspecto muy distinto. En este caso aparece de repente ante la mirada de nuestro espíritu un orden total de interrelaciones que sin nosotros ha existido siempre y que con absoluta evidencia no ha sido hecho por el hombre. Tales interrelaciones constituyen el contenido auténtico de nuestra ciencia. Sólo cuando hemos interiorizado plenamente en nosotros mismos la existencia de tales interdependencias podemos comprender realmente nuestra ciencia."[10]

[9] *Ibid.*, p. 122.
[10] *Ibid.*, pp. 124-125.

B. Parece que el objeto de las matemáticas tiene una existencia independiente de las cosas sensibles.

El origen de esta tesis se encuentra en Platón o en los pitagóricos. Cuando Protágoras objetó a la veracidad de la geometría que nada en el mundo real era como lo describían los geómetras (porque no hay puntos sin dimensiones, ni líneas con una sola dimensión, ni planos con sólo dos dimensiones, etc.), el Ateniense le respondió que era cierto que en el mundo sensible no existían los objetos de la geometría, pero que eso no afectaba a ésta como ciencia, sino a la realidad o consistencia del mundo sensible. En éste, las cosas reciben su consistir y su inteligibilidad de otras realidades suprasensibles, que son las que estudia la geometría. Es cierto que nunca hemos visto en esta vida objetos como los que define la geometría, y que por ello es difícil explicar cómo es que podemos reconocer un razonamiento geométrico verdadero y distinguirlo de uno falso; y, aun más, cómo podemos investigar en geometría, pues parece que no podemos saber cómo es lo que estamos buscando, ni podremos reconocerlo una vez hallado. Pero desde luego hay hallazgos, la geometría no es arbitraria, y cualquiera que considere los razonamientos del modo debido puede distinguir uno verdadero de uno falso. Entonces, ¿por qué tenemos en nuestra mente los conceptos necesarios para orientar la investigación o reconocer los resultados favorables? Porque nuestra alma contempló antes de estar encarnada en el cuerpo esos objetos suprasensibles[11].

Hoy en día, como ya se anunció, no son pocos los matemáticos que suscriben la tesis platónica acerca de la existencia de los objetos de la disciplina, aunque no suscriban, quizá, la preexistencia del alma o la inteligencia[12]. Ellos aducen las mismas experiencias apuntadas en el

[11] Una buena explicación en la bibliografía secundaria de la anámnesis platónica se encuentra en el libro de David Cornford, *Principium Sapientiae. The Origins of Greek Philosophy,* editado por Peter Smith, Gloucester, 1971, en el capítulo titulado "Anámnesis". En cuanto a las fuentes primarias, son principalmente el *Menón* y el *Fedón.*

[12] *Cf.* Corry, Leo, *o.c.*, pp. 30-31. Se encuentra allí una interesante cita de Dieudonné, uno de los formalistas puros que malinterpretó a Hilbert y lo hizo aparecer como un sostenedor de la arbitrariedad de los axiomas: "En cuestiones fundacionales, nosotros creemos en la realidad de las matemáticas, pero claro, cuando los filósofos empiezan a atacarnos con sus paradojas, corremos a escondernos detrás del formalismo y decimos: 'la matemática no es más que una combinación de símbolos faltos de

párrafo anterior, y algunas otras. Transcribiré un texto de Roger Penrose donde él alega otra experiencia, más vinculada (de modo inconsciente[13]) al *Fedro* que las antes mencionadas: "...el punto es que con respecto a la comunicación de las matemáticas, uno no está sencillamente transmitiendo hechos. Porque para que un conjunto de hechos [contingentes y particulares] sean comunicados de una persona a otra, es necesario que los hechos sean cuidadosamente enunciados por el primero, y el segundo debería tomarlos individualmente. Pero en la matemática el contenido fáctico es pequeño. Las afirmaciones matemáticas son necesariamente verdades (o bien falsedades necesarias) y aun si la afirmación del primer matemático representa meramente una sombra inestable de una verdad necesaria, sería aquella misma verdad la que se transmitiría al segundo matemático, supuesto que el segundo ha entendido adecuadamente. Las imágenes mentales del segundo pueden diferir en el detalle de las del primer matemático, y sus descripciones verbales también, pero la idea matemática relevante se habrá comunicado del uno al otro... Cuando uno 've' una verdad matemática, la propia conciencia irrumpe en ese mundo [platónico] de ideas, y establece un contacto directo con él (accesible por medio del intelecto)... El descubrimiento matemático consiste en la ampliación de esa área de contacto."[14]

Las experiencias originantes de esta tesis quedarán más claras cuando veamos el enfrentamiento entre ella y los empiristas, en el próximo acápite.

---

significado'... Finalmente se nos deja en paz y así podemos regresar a nuestra matemática, trabajando como siempre lo hemos hecho, es decir, con algo real".

[13] Estas "coincidencias" son algunos de los hechos más sorprendentes en nuestra disciplina filosófica, que nos permiten ver que no consiste en un puro "hablar por hablar".

[14] Penrose, Roger, *The Emperor's New Mind*, Nueva York: Penguin Books, 1991, pp. 427-429. La traducción es mía. Debo aclarar que, en realidad, Penrose no es platónico sino pitagórico. Al final de su libro, con la intención de dejar el papel de filosofía primera a la física, y no a la matemática, afirma que esas entidades de la matemática existen como bases del mundo sensible en las dimensiones no visibles de ese mismo mundo. Funde lo sensible y lo suprasensible, exactamente como Aristóteles nos narra que hicieron los pitagóricos, que hablaron de unas entidades suprasensibles, pero sólo para explicar el mundo sensible.

C. Parece que la matemática procede de la experiencia sensorial

En la materialista y staliniana Unión Soviética de 1956 se acabó de escribir una gran obra, *Mathematics, its Contents, Methods and Meaning*, editada por Aleksandrov, Kolmogorov y Lavrent'ev[15]. Como era de esperar por el contexto histórico, la perspectiva de este libro es materialista y anti-idealista. Pone, por ello, gran esfuerzo en mostrar que la matemática se forma a partir de la experiencia sensible. Al hacerlo, coincide admirablemente y sin saberlo con muchas tesis aristotélicas, pero introduce aclaratorias o correcciones que la apartan parcialmente del Estagirita. En este segundo aspecto coincide más bien, de nuevo sin citas explícitas, con el empirismo que fue objeto de refutación por parte de Leibniz o que dio lugar a la crítica de Kant.

Según los rusos, pues, la matemática surgiría de la experiencia de los objetos sensibles, por abstracción. El número sería la numeración de objetos, pero abstrayendo la naturaleza de esos objetos; "el concepto de una figura geométrica es el resultado de la abstracción de todas las propiedades de los objetos existentes, excepto su forma espacial y sus dimensiones"[16]. Éstos son dos de los conceptos más tempranos y elementales. Fueron seguidos por otros muchos, cada vez más abstractos y de tal generalidad, que aparentemente han perdido toda conexión con la vida o la experiencia ordinarias. Sin embargo, también ellos tienen un contenido concreto y están conectados con la vida, cosa que puede mostrarse sin demasiada dificultad[17].

Toda ciencia, y aun toda actividad mental, es abstracta. Pero la matemática versa sólo acerca de todas las posibles (y variables) relaciones cuantitativas e interdependencias entre las magnitudes, y acerca de las formas espaciales; encierra una serie de grados crecientes de abstracción (camino en el que llega más lejos que cualquier otra ciencia); y se mueve enteramente en el campo de los conceptos abstractos y sus interrelaciones (a diferencia del científico natural, que constantemente vuelve al experimento para probar sus aserciones)[18].

[15] *O.c.*
[16] *Ibid.*, pp. 1-2.
[17] *Cf. ibid.*, p. 2.
[18] *Cf. ibid.*, pp. 2, 22 y 63. Hasta aquí, Aristóteles y Santo Tomás suscribirían todas y

Los matemáticos hacen constante uso de modelos, análogos físicos y ejemplos enteramente concretos, que sirven como fuente de la teoría y como medio para descubrir sus teoremas, pero ningún teorema pertenece definitivamente a la matemática hasta que ha sido rigurosamente probado por un argumento lógico[19]. "Podemos medir los ángulos de la base de un millar de isósceles con exactitud total, pero tal procedimiento nunca nos dará una prueba matemática del teorema según el cual los ángulos de la base de un isósceles son iguales. La matemática exige que este resultado se deduzca de los conceptos fundamentales de la geometría... que están precisamente formulados en los axiomas". El autor del libro VII de la *República* suscribiría este texto sin problemas. Pero, en cambio, pondría serias objeciones a este otro texto: "en último término, la vitalidad de las matemáticas surge del hecho de que sus conceptos y resultados, con toda su abstracción, *se originan, como veremos, en el mundo real* y *encuentran muy variada aplicación en otras ciencias, en la ingeniería y en todos los asuntos prácticos de la vida diaria*. Darse cuenta de esto es el más importante prerrequisito para comprender la matemática."[20] La segunda cursiva no necesita refutación, según creo. Muy pocos matemáticos se enamoran de su disciplina por las aplicaciones que tiene en otras disciplinas; la mayoría queda deslumbrada por la belleza intrínseca de su objeto. La primera cursiva es la que va a ser discutida, a partir de los textos que anuncia cuando dice "como veremos".

Para probar que la matemática surge del "mundo real", emplean dos tipos de argumentos. El primero tiene que ver con la impresionante aplicabilidad de la matemática a los problemas de todas las disciplinas

---

cada una de las afirmaciones de los autores rusos, incluida la del mayor grado de abstracción que tiene la matemática respecto de cualquier otra ciencia. En este punto, sé que la interpretación de Maritain es contraria, pero los textos (*Metafísica* Épsilon 1; y comentario al *De Trinitate* de Boecio) me parecen bastante claros. Puede verse un comentario al texto del Aquinate, en el mismo sentido señalado, en Gelonch, Santiago, Separatio *y objeto de la metafísica*, tesis doctoral presentada en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Navarra, Pamplona, 1996.

[19] Lo que quieren decir los autores rusos no es que deba confundirse una verdad matemática con un modo concreto de demostrarla (distinguimos una cosa de otra en el último acápite de este artículo), sino que la verdad matemática, como quiera que se la demuestre, es necesaria y universal. Mientras una proposición no se haya captado así, como universal y necesaria, no puede afirmarse que se trata de una verdad matemática.

[20] *Ibid.*, p. 3.

que estudian o manipulan el mundo natural; aplicabilidad que se extiende aun a los conceptos o construcciones más abstractos, tales como los números imaginarios o complejos y los espacios de más de tres dimensiones[21].

El segundo tipo de argumentos está conectado con la historia de la aritmética y la geometría. Ambas disciplinas surgieron en varios momentos y lugares históricos concretos. Pero vamos a centrarnos en la aritmética, para no alargar innecesariamente estas páginas, y porque el argumento no cambia en nada cuando se aplica a la geometría. En muchos pueblos, aun casi contemporáneos, no se conocían nociones para números mayores de dos o tres. En otros se desarrollaron nociones más refinadas, como las de números más grandes o la de la suma o la de multiplicación, frutos de múltiples experiencias. Pero en China, Egipto y Babilonia se desarrollaron símbolos para los números, que permitieron representar cifras inimaginables en una representación visual. El concepto necesita un "cuerpo", aun cuando sea abstracto; y, a falta de la representación visual, se da el símbolo. En las dos civilizaciones últimamente mencionadas, se empezó a desarrollar el interés por la matemática sin conexión inmediata con problemas prácticos. Pero fueron los griegos quienes, ya en el siglo IV antes de Cristo[22], habían descubierto que los números pueden ser indefinidamente extendidos y, más importante, que es posible discutir acerca de los números en general, y formular y probar teoremas generales acerca de ellos. Con lo cual contemplamos una transición a un nuevo nivel de abstracción "desde ciertos números (aunque abstractos) a los números en general, a cualquier número posible", según dicen los autores[23].

Con base en las observaciones anteriores, los rusos sostienen que "la aritmética, como vemos, no surgió del pensamiento puro, como suponen los idealistas, sino que es el reflejo de propiedades definidas de cosas reales, y surgió de una larga experiencia de muchas generaciones"[24]. "La historia de los conceptos de la aritmética muestra cuán errada es la

[21] *Cf. ibid.*, pp. 4-6 y 18.
[22] Los rusos dicen para el siglo III, quizá porque desconocen a Aristóteles y Platón, y se están basando en Euclides.
[23] *Cf. ibid.*, pp. 7-16.
[24] *Ibid.*, p. 10.

perspectiva idealista según la cual ellos surgieron del 'pensamiento puro', de la 'intuición innata', de la 'contemplación de formas *a priori*', o cosas semejantes."[25] La razón por la que los resultados de la aritmética son tan convincentes es que "sus conclusiones fluyen lógicamente de sus conceptos básicos y ambos, los métodos de la lógica y los conceptos de la aritmética, fueron elaborados y firmemente fijados en nuestra conciencia por tres mil años de experiencia práctica, sobre la base de uniformidades objetivas que se dan en el mundo que nos rodea"[26].

Todo parece claro. Pero se soslayan algunos problemas, implícitos en la propia exposición de los rusos. Veamos los textos relevantes: "Los teoremas generales acerca de cualquier propiedad de un número arbitrario contienen ya de forma implícita muchas aserciones acerca de las propiedades de los números individuales y son, por tanto, cualitativamente mucho más ricos que cualquier afirmación particular que pudiera verificarse acerca de números específicos. Por esta razón los teoremas generales deben probarse con argumentos generales que proceden de la regla fundamental para la formación de la secuencia de los números. Aquí percibimos una profunda peculiaridad de la matemática: toma como objeto no sólo relaciones cuantitativas dadas, sino todas las posibles relaciones cuantitativas y, por tanto, la infinitud."[27] A la pregunta de por qué la matemática puede tener un campo tan vasto de aplicaciones responden que "generaliza una enorme cantidad de experiencia, refleja en forma abstracta aquellas relaciones del mundo real con las que nos encontramos constantemente y en todas partes", que "la posibilidad de la amplia aplicación está garantizada por la misma abstracción de la aritmética, aunque es importante que no se trata de una abstracción vacía, sino derivada de una amplia experiencia práctica"[28]. Y añaden, finalmente, que la "abstracción de todo lo que no es esencial descubre el núcleo de la materia y garantiza el éxito en esos casos donde un papel decisivo es jugado por las propiedades y relaciones escogidas y preservadas por la abstracción"[29].

[25] *Ibid.*, p. 17.
[26] *Ibid.*, pp. 17-18. ¿Se recogerá aquí un aspecto de la biología de Lysenko: las adaptaciones al medio ambiente se transmiten a las generaciones futuras de un modo lamarckiano?
[27] *Ibid.*, p. 16.
[28] *Ibid.*, p. 18.
[29] *Ibid.*, p. 19.

Lo que siempre llamó la atención de filósofos como Platón, Leibniz[30] o Kant fue que en las cosas concretas de las que tenemos experiencia no se da nunca la perfección propia de las definiciones matemáticas, de la geometría, por ejemplo. Y nuestros sentidos no nos dan nunca una idea universal y necesaria, sino, en el mejor de los casos, imágenes vagas que pueden abarcar, por su misma vaguedad, diversos individuos. Por más experiencias sensoriales que tengamos de infinidad de cosas concretas, jamás podremos descubrir en la realidad sensible, ni con nuestros sentidos, un concepto universal y necesario cuyo análisis pueda dar lugar a demostraciones igualmente universales y necesarias. En Platón, además, se encuentra una explicación de por qué puede darse un aprendizaje gradual de la matemática o de la ciencia en general, que es precisamente uno de los temas centrales del *Menón*: la anámnesis de las ideas separadas se da poco a poco, y con la ayuda de los dioses o de un maestro.

Por otra parte, es cierto, como veremos, que la amplia aplicabilidad de la matemática es señal de que las relaciones cuantitativas de que trata se dan de alguna manera en el mundo sensible. Pero esto también es explicado por Platón: el mundo sensible participa de los objetos matemáticos o los imita, aunque no perfectamente. De allí la distancia entre la física y la matemática... Esa misma amplia aplicabilidad supone, además, como dicen los rusos, que la matemática no parte de una abstracción vacía. Mas ello implica que no puede ser una imagen vaga el núcleo de las nociones matemáticas[31]. Tiene que haber algo distinto. La captación del núcleo esencial tiene que ser intelectiva, no sensorial. Y si en lo sensible no existe nada tan perfecto como en las definiciones de la geometría (de nuevo, por ejemplo), y, además, nuestros sentidos no captan sino lo particular e imperfecto, ¿cómo podríamos formar las nociones básicas de la matemática a partir de lo sensible? Para rematar, ¿qué hay en el mundo sensible como nuestras operaciones aritméticas o algebraicas universales? Es obvio que nuestra mente no es un reflejo especular del mundo sensible, y que muchas de las nociones que usamos para expresarnos en la física y en la matemática o en el lenguaje

[30] Ver las magistrales críticas de Leibniz a Locke en los *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano.*

[31] Como lo sería si procedieran de una experiencia puramente sensorial, como lo saben claramente Platón (*cf. Teeteto*) y Kant (*cf. infra*, nota siguiente).

en general no han sido tomadas de nuestra experiencia sensible. Así, por ejemplo, la semejanza nunca la hemos visto, sino sólo cosas semejantes; y, en realidad, nunca hemos visto nada exactamente igual, sino cosas más o menos semejantes. (¿Cómo, de paso, sabemos qué significa "más semejante" o "menos semejante" si no sabemos qué es la semejanza o la igualdad? ¿Y cómo sabemos qué es, si no la hemos visto? ¿De dónde procede nuestra noción?).

D. Parece que la matemática procede de la intuición de una forma poseída a priori por la sensibilidad

Kant hubo de enfrentarse a una situación en la que la filosofía primera de tipo cartesiano-idealista había sido echada por tierra a consecuencia de la crítica de Hume; y, en cambio, la geometría y, sobre todo, la física estaban en su apogeo gracias al descubrimiento de la geometría analítica por parte de Descartes y Fermat, y a la formulación de la mecánica de Newton. El agudo crítico escocés suponía que la experiencia humana era puramente sensorial, y que las nociones de la razón eran un puro hábito. Veamos cómo lo dice Kant: "[Hume] creyó poder deducir que el tal principio [de causalidad] es absolutamente imposible *a priori*, y, según sus conclusiones, todo lo que nosotros llamamos metafísica descansaría sobre una simple opinión de un pretendido conocimiento racional, que en el hecho nace simplemente de la experiencia y que recibe del hábito cierto aspecto de necesidad. [Todo lo que nosotros captamos es la sucesión de los fenómenos, pero ella puede producir una costumbre y nosotros proyectar sobre ella la "causalidad" como principio necesario]. Esta afirmación, destructora de toda la filosofía pura, no se hubiera nunca emitido, al haber el autor abarcado en toda su generalidad este problema, porque entonces hubiera comprendido que, según su argumento, tampoco podrían existir las matemáticas puras, pues éstas contienen ciertamente principios sintéticos *a priori*, y su buen entendimiento hubiera retrocedido ante semejante aserto."[32]

[32] Kant, Immanuel, *Crítica de la razón pura*, Buenos Aires: Losada, 1938, p. 160. La concepción que tiene Hume del intelecto humano, de haberla aplicado a la matemática, hubiera supuesto que sus nociones fueran una imagen vaga, fruto de la fantasía, como todas las nociones *a posteriori* de Kant: si los conceptos de espacio y tiempo

Kant tomó mucho de Hume (en particular su noción de experiencia), pero introdujo luego importantes cambios. Las nociones o formas o categorías necesarias de la *razón* existían, pero no podían aplicarse al mundo porque, en definitiva, al hacerlo se incurría en una "ilusión trascendental". La causalidad, por ejemplo, es una noción de nuestra mente, *a priori*; pero no debe proyectarse al mundo, como si existiera "en sí". El famoso "pienso, luego existo" proyecta sobre el mundo una idea que está sólo en nuestra mente: que hay un sujeto del pensar y que existe en sí. Pero esta proyección es indebida. Para no mencionar la proyección de la existencia de Dios. En definitiva, del mundo exterior sólo tenemos experiencia sensorial, y ésta nos proporciona imágenes vagas o costumbres, pero no razonamientos necesarios ni nociones universales. ¿De dónde, por tanto, pueden proceder la física pura (que, según Kant, es *a priori*) y la matemática? Ya que la metafísica está en crisis, debe tomarse como modelo del conocimiento humano a la física y a la matemática, que obviamente han alcanzado resultados incontestables. Ahora la rama teórica de la metafísica se limitará a desvelar las condiciones trascendentales de la matemática y de la física newtoniana. A mostrar que ellas son disciplinas serias, y cómo es esto posible[33].

fueran *a posteriori*, "serían sólo creación de la fantasía cuya verdadera fuente debe buscarse en la experiencia, porque de sus relaciones abstraídas se ha valido la fantasía para formar algo que contenga lo que de general hay en ella, aunque no sin las restricciones que la naturaleza le ha impuesto" (*o.c.*, p. 190, § 7 en la Sección Segunda de la "Estética trascendental").

[33] *Cf. ibid.*, pp. 137 (Prefacio a la segunda edición, donde se dice que sólo la razón pura moral, no teórica, se extiende más allá de los límites de la sensibilidad); 144, nota (final del Prefacio a la segunda edición, donde se dice que era un escándalo para la filosofía y la razón que el idealismo supusiera la existencia de los objetos exteriores cuando no podía probarla); 148-149 (Introducción, donde se dice que el principio de causalidad es un *a priori,* y que hay otros muchos principios semejantes, como puede verse en la matemática); 157-159 (Introducción, donde se comparan la matemática, la física y la metafísica en lo que se refiere al uso por ellas de juicios sintéticos *a priori*, y a la violación por la última de los límites de esos juicios); 162-163 (donde se muestra el descrédito en el que ha caído la metafísica). Nótese, por ejemplo, que toda la argumentación dirigida a probar que el tiempo es una forma de nuestra intuición interna, *a priori*, intenta salvar "la ciencia general del movimiento, que no es poco fecunda" (*cf.* nuevamente la Sección Segunda de la "Estética trascendental", § 5). Aristóteles, tal como se desprende del capítulo primero del libro Épsilon de la *Metafísica*, hubiera predicho el resultado final de una aventura de filosofía primera emprendida en esas condiciones: no podrá decirse cómo son las cosas en sí mismas, porque la disciplina a la que toca investigar el "qué es" (la

Que tal sea el problema central de la rama teórica de la metafísica, y que ésta simplemente determine las condiciones de posibilidad de las ciencias existentes, se dice de modo explícito en la *Crítica*: "En la resolución del precedente problema [del fundamento de nuestras nociones racionales] está también comprendida al mismo tiempo la posibilidad del empleo de la razón pura en la fundación y construcción de todas las ciencias que contienen un conocimiento teórico *a priori* de los objetos, es decir, está contenida la respuesta de estas preguntas: *¿Cómo son posibles las matemáticas puras?, ¿Cómo es posible la física pura?* No se puede preguntar de estas ciencias más que *cómo* son posibles, porque al existir como reales demuestran ya que lo son. [Y añade Kant, aquí, una nota que deja fuera de dudas cómo era la situación histórica de su obra: 'Respecto de la física pura, podríase aún dudar; pero puédese tan sólo considerar las diferentes proposiciones que se tratan al principio de la Física propiamente empírica, como la permanencia de cantidad de la materia, la de la inercia, la de la igualdad de acción y reacción y bien pronto se alcanza la convicción de que constituyen una física pura (o racional), que bien merece ser expuesta separadamente, en toda su extensión como ciencia especial.'] Por lo que toca a la metafísica, como sus pasos han sido hasta hoy tan desdichados, tan distantes del fin esencial de la misma, que puede decirse que todos han sido en vano, perfectamente se explica la duda acerca de su posibilidad y de su existencia."[34]

A estas preguntas, Kant responde, para la geometría, que es posible por la intuición de la forma *a priori* de nuestra sensibilidad que es el espacio. Y, para la física, que procede de la intuición de las formas de espacio y tempo, y que el tiempo es también una forma *a priori*. La física empírica sería fruto de la copulación de las formas *a priori* de la sensibilidad (espacio y tiempo) con la experiencia sensorial, pero no la física pura.

¿En qué se basa Kant para afirmar que el espacio y el tiempo son formas *a priori*? En los siguientes argumentos: a) El espacio y el tiempo tal como los conciben los físicos son absolutos. Y un espacio y un tiempo

filosofía primera) es la misma a la que toca investigar el "si es". La matemática no puede decir ni en qué sentido es el número, porque no sabe tampoco qué es. Algo semejante ocurre con la física. Es que ambas suponen la existencia o constitución de su objeto: una lo toma por inducción y la otra por abstracción.

[34] *Ibid.*, pp. 160-161.

absolutos son unas quimeras, inexistentes en la naturaleza. b) Los metafísicos leibniziano-wolfianos conciben al espacio como relaciones entre los objetos. Mas los objetos se "perciben" en la experiencia. Si, pues, el espacio fuera el conjunto de relaciones entre los objetos, sería de experiencia. Pero de la experiencia (puramente) sensorial no puede provenir una noción perfecta de cuyo análisis se desprenda una disciplina con razonamientos que gocen de una certeza apodíctica o sean necesarios (y nosotros conscientes de su necesidad)[35]; y de la intuición de la forma de espacio proviene la geometría. Luego, el espacio no puede entenderse como relaciones entre los objetos. Es, más bien, una forma poseída *a priori* por la sensibilidad. Y constituye el "medio" en el que percibimos los objetos. Algo semejante puede decirse de la forma de tiempo y de los razonamientos necesarios de la física. Luego, nuestra experiencia, en particular la que es explicada por la física newtoniana, resulta de una copulación de la experiencia puramente sensorial, por una parte, y las formas de nuestra sensibilidad, por otra. Es por esto que no podemos saber cómo son las cosas en sí mismas. Porque sólo sabemos cómo son los "objetos", pero éstos se nos dan en la experiencia; es decir, en el marco de las formas *a priori* de espacio y tiempo[36].

Hay una objeción obvia que hacer a la "estética trascendental" de Kant, a esta rama teórica de su metafísica: las experiencias de los físicos y geómetras del final del siglo XIX y comienzos del XX llevaron a abandonar la noción newtoniana y euclidiana de espacio[37]. Si ésta fuera

[35] Como decía Kant en la primera edición de la *Crítica de la razón pura*: "Si esta representación del espacio fuera un concepto *a posteriori*, producto de la experiencia general externa, no serían más que percepciones los primeros principios de la determinación matemática. Tendrían, pues, toda la accidentalidad de la percepción, y no sería necesario que entre dos puntos sólo hubiera una línea recta, sino que sería la experiencia la que en todo tiempo lo mostraría. Lo que se toma de la experiencia no tiene más que una universalidad comparativa, a saber: la que pueda dar la inducción. Podríase, pues, decir solamente que en todo tiempo que ha transcurrido, no se ha hallado un Espacio que tenga más de tres dimensiones." (*o.c.*, pp. 176-177, nota).

[36] *Cf. ibid.*, "Estética trascendental", secciones primera y segunda, §§ 2-8.

[37] Nótese que ahora me refiero a los aspectos de la geometría no euclidiana que no tienen que ver con los espacios de más de tres dimensiones. A estos "espacios" me referí en el primer acápite para mostrar que lo son sólo en sentido metafórico. Pero ahora hablamos del espacio en sentido estricto, concebido como "no plano", por ejemplo, como curvo.

una forma *a priori*, no sería posible que la experiencia la alterara. Esta objeción provocó que muchos kantianos corrigieran la filosofía de su maestro, y afirmaran que las categorías y la experiencia se interrelacionan en la historia y evolucionan juntas. Así lo dijo, por ejemplo, Manuel Granell entre nosotros, siguiendo a Scheler, en *Del pensar venezolano*[38]. Con ello, se acercan admirablemente en un punto crucial, y sin saberlo, a la filosofía de Aristóteles, donde la experiencia humana no es puramente sensorial ni pasiva, pero la acción de la mente no consiste en unas formas que se impongan a lo percibido, sino en la inmaterialización de las formas que caen en nuestra experiencia. Veamos directamente al Estagirita y a su mayor discípulo cristiano, Santo Tomás de Aquino.

E. Parece que la matemática procede de la experiencia, pero gracias a un acto de inmaterialización

Los autores rusos tienen razón en que la matemática se ha desarrollado por la experiencia. Incluso, en Egipto, según Eudemo de Rodas[39], gracias a las inundaciones del Nilo y a la necesidad de resolver las controversias acerca de la propiedad o posesión de la tierra. Pero los autores innatistas, en sus dos clases, tienen razón en que las demostraciones generales y necesarias o la perfección de las definiciones de la geometría no pueden venir de una experiencia puramente sensorial. Hace falta una reflexión no servil, además, para desarrollar esta ciencia pura. En el mismo Egipto fue la casta de los sacerdotes la que dio mayor impulso a la matemática, porque gozaba de ocio, según los conocidos textos del libro Alfa (I) de la *Metafísica* de Aristóteles.

Es cierto que los platónicos pueden explicar el vínculo entre la experiencia y el aprendizaje, por medio de la anámnesis: los hombres recordarían las ideas, contempladas antes de la encarnación del alma, gracias al parecido de las cosas sensibles con su modelo. Pero la crítica aristotélica a la teoría de las ideas me parece definitiva[40]. Por su parte,

---

[38] Granell, Manuel, *Del pensar venezolano*, Caracas: Fundación Manuel Granell/ UNESCO-IESAL/Cátedra UNESCO de Filosofía, 2000, pp. 24-25 y 270ss.

[39] *Cf*. Aleksandrov, Kolmogrov y Laurent'ev (eds.), *o.c.*, p. 20.

[40] Por ejemplo: si la forma "triángulo" se encuentra en los equiláteros, no está en los

los kantianos se toparon con la gravísima dificultad de que las formas supuestamente *a priori* resultaron cambiadas por la experiencia.

En Aristóteles encontramos una respuesta que explica todos los aspectos del problema. En el último capítulo del libro II de los *Analíticos posteriores* sostiene que los axiomas proceden de la experiencia sensible y la inducción[41] (*epagogué*), aunque pertenecen al hábito del intelecto[42]. En el libro III del *De Anima* introduce, sin embargo, la figura del intelecto agente, distinta al intelecto posible. ¿Cuál es la experiencia originante de esta figura en la obra de Aristóteles? Sólo Santo Tomás tiene una respuesta a esta pregunta, y por esa razón sólo él puede ayudarnos a entender un tema sobre el que se ha gastado mucha tinta. Destruida la teoría de las ideas, había que dar cuenta del salto que se da desde lo sensible hasta nuestras nociones intelectuales. No bastaba el intelecto como "ojo del alma" porque no hay en la naturaleza sometida a nuestra experiencia unos objetos como los que puede concebir el intelecto; es decir, inmateriales, universales, inmóviles. El "ojo del alma", por tanto, en el mundo sensible estaría como a oscuras, sin poder percibir nada. Se necesitaba un "artesano de las ideas" (o de los conceptos), que inmaterializara las formas existentes en lo sensible. Un principio agente en nuestra alma que hiciera posible nuestra intelección. Pero es un principio que no "crea" las formas, sino que las inmaterializa, como se dijo. Por eso se le compara también con una "luz", para indicar que sólo hace inteligible en acto lo que lo es únicamente en potencia. Así como la luz hace visibles los colores (o cualidades presentes en los cuerpos, por las que reflejan éstos determinadas longitudes de onda y no otras).

isósceles; pero si está parcialmente en ambos grupos, ninguno de sus individuos es plenamente triángulo. Aristóteles diría que Platón confundió nuestro modo de conocer las cosas con las cosas conocidas, y –por ello– proyectó sobre el mundo (de las ideas) unas entidades semejantes a nuestros conceptos.

[41] Aquí la "inducción" se entiende en sentido amplio, como origen de todos los axiomas, incluidos los de la matemática. En sentido restringido, sólo la física necesita un continuo recurso a la inducción, no la matemática.

[42] No puedo reproducir aquí la polémica con autores como Le Blond, que ven una contradicción en el texto de los *Analíticos*, por decir que los principios proceden de la experiencia y la inducción, por una parte; y de la "intuición", por otra. Le Blond refleja la influencia de Descartes y Kant en su lectura de Aristóteles. En el Estagirita no hay nada como una "intuición" kantiana de las formas *a priori*. Aristóteles se está refiriendo, como muestra de modo muy claro Santo Tomás en su comentario, primero al origen de los axiomas (experiencia e inducción), y luego al hábito al que pertenecen (que no es el de "ciencia", sino el de "intelecto").

Con ese principio agente y el "ojo del alma", estamos preparados para adquirir la experiencia intelectiva, en lo sensible. Porque nuestra experiencia es la de un intelecto sensiente o la de unos sentidos inteligentes, penetrados por una potencia superior que pertenece a un solo ser, la persona humana. Mas, al inicio de nuestra vida, sólo los sentidos están maduros para actuar o ser actuados, como se ha hecho evidente por la experiencia de los "niños lobo", el desgraciado francesito y la infortunada norteamericanita que, rescatados muy tarde del descuido en que fueron criados, nunca pudieron aprender a hablar. Por eso necesitamos, como también señala Aristóteles en el libro III del *De Anima*, de un intelecto en acto, de un adulto que nos señale lo que debemos reconocer en la experiencia como perteneciente a una clase o tipo. Hacen falta unas "categorías", pero no *a priori*, para ordenar el caos de nuestros sentidos. Nos las dan nuestros padres o los adultos en general. Claro que esas "categorías", en realidad, lo que hacen es señalarnos lo que tenemos que descubrir por nosotros mismos. La función del maestro no es dar la vista, sino señalar en la dirección adecuada, como dijo Platón en *República* VII. En este período de nuestra vida, captamos todas las nociones y el contexto de inteligibilidad que necesitamos para la matemática. Por eso puede parecer que ella es una ciencia que procede de nociones o formas *a priori*, porque nuestra mente, matemática cuando su nivel consciente es aún débil, alcanza todo lo que necesita para encerrarse en sí misma y hallarla.

Todavía los platónicos podrían hacer una pregunta más: ¿cómo reconoce el hombre un hallazgo inteligible, incluso el más elemental, como que un objeto puede ser significado por una palabra? Si no sabe lo que busca, ¿cómo reconocerlo? Y si lo sabe, ¿para qué lo busca? A esto responderían Aristóteles y su discípulo que en la naturaleza humana hay un amor innato a la verdad. Y que el amado está en el amante, de alguna manera. Que, por tanto, el "reconocimiento" no se debe a un conocimiento *a priori*, sino a un amor innato o natural, a una "semilla" de verdad[43].

Según Aristóteles, hay una diferencia crucial entre la matemática y la física. Ésta procede por inducción y la otra por abstracción. Por eso la ciencia natural necesita volver continuamente a la experiencia; y la

[43] *Cf. Metafísica*, Alfa (I); y comentario al *De Trinitate* de Boecio.

matemática, en cambio, es adecuada para los niños, que no tienen mucha experiencia. La física, para usar el ejemplo clásico del Estagirita, estudia la "nariz cóncava", con su materia sensible; en cambio, la matemática estudia la concavidad misma, sin materia sensible[44]. Una forma real, la categoría "cantidad" –que abarca a la cantidad discreta (los números) y a la continua (el espacio) y a todas las relaciones cuantitativas–, es su objeto, como sostenían los rusos. Y se trata de una forma accidental, pero que es el primero de los accidentes, que influye decisivamente en todos los demás y en la propia sustancia material. De allí su aplicabilidad tan profunda a tantas materias.

El hecho de que sea una "forma", pone la respuesta de Aristóteles muy lejos de todos los mecanicismos (presocráticos, o postcartesianos), nominalismos, etc., y lo acerca a Platón. También lo acerca a su maestro la consciencia de que la forma está en nuestra mente con una perfección que no tiene en el mundo sensible. Éste no es lugar para responder de modo completo a quienes critican las formas, aunque sí para observar que la crítica de Hume a la metafísica no toca a Aristóteles, sino a los postcartesianos, precisamente por lo que éstos tenían de nominalistas[45]. En cambio, sí es lugar para responder a algunas críticas fáciles que se han pretendido hacer a la posición aristotélica. La primera, que es un realismo "ingenuo", que cree que nuestra mente es un "espejo del mundo". La segunda, de seguidores de Husserl, que "obviamente" los números no proceden del accidente cantidad, sino de la numeración de las sustancias, y pueden extenderse hasta las sustancias inmateriales, como los ángeles.

Nada más lejano del aristotelismo que el pensar que la mente sea un espejo del mundo. La crítica más dura del Estagirita a la teoría de las ideas de su maestro residía en que las "ideas" eran una proyección al mundo de nuestras nociones mentales. Platón no distinguió lo bastante *aquello que* conocemos de *aquello por lo que* lo conocemos. Hay entes na-

[44] *Cf. Metafísica*, Épsilon (VI), 1.

[45] ¿Cómo podían, en efecto, proyectar sobre un mundo del que no tenían experiencia intelectiva sus nociones mentales? De ninguna manera: el "puente" estaba roto como consecuencia del nominalismo, primero; y del inmanentismo, después, que no fue sino una agravación de aquél. Hay que añadir que la unidad del hombre y de la acción humana constituyen el punto de partida para abandonar, por absurdo, el nominalismo que pretende expulsar las formas de la realidad.

turales y entes de razón. Transcribiré ahora un pasaje completamente aristotélico de Santo Tomás de Aquino, en el que se ve de modo muy claro esta distinción: “La especie recibida en el intelecto posible [el concepto] no se considera como ‘lo que’ se entiende. Pues como acerca de estas cosas que se entienden sean todas las artes y las ciencias, se seguiría que todas las ciencias versarían sobre las especies que existen en el intelecto posible, lo cual es obviamente falso, pues ninguna ciencia versa acerca de ellas, sino la lógica y la metafísica. Sin embargo, a través de ellas se conocen cualesquiera cosas hay en todas las ciencias. Se tiene, entonces, la especie inteligible en el intelecto posible cuando entiende no como lo que se entiende, sino como aquello por lo que se entiende. Como también la especie del color en el ojo no es aquello que se ve, sino aquello por lo que vemos. Pero eso que entendemos es la misma ‘ratio’ (razón o forma) de las cosas que existen fuera del alma, como también las cosas que existen fuera del alma se ven con la visión corporal. Pues para esto fueron halladas (o inventadas) las artes y las ciencias, para que se conocieran en sus naturalezas las cosas existentes fuera del alma. Pero tampoco se sigue que, porque las ciencias versan acerca de lo universal, existan fuera del alma universales subsistentes por sí, como afirmó Platón. Pues aunque para la verdad del conocimiento es preciso que el conocimiento responda a la cosa, sin embargo no es necesario que sea el mismo el modo [de ser] del conocimiento y el de la cosa. Pues las cosas que están unidas en la realidad, a veces se conocen separadamente, pues la misma cosa es blanca y dulce, pero la vista conoce sólo la blancura y el gusto sólo la dulzura. Así también el intelecto entiende la línea que existe en la materia sensible sin materia sensible, aunque también pueda entenderla con materia sensible. Pero esta diversidad ocurre según la diversidad de especies inteligibles recibidas en el intelecto, que alguna vez es semejanza de la cantidad solamente, alguna vez de la sustancia sensible y dotada de cantidad. De modo semejante, aunque la naturaleza del género y la especie nunca exista sino en los individuos, sin embargo, el intelecto entiende la naturaleza del género y la especie sin entender los principios individuantes. Y esto es entender los universales. Y así, estas dos cosas no se rechazan mutuamente, que los universales no existan fuera del alma y que el intelecto, entendiendo los universales, entienda las cosas que están fuera del alma. –Pero que el intelecto entienda la naturaleza del género o de la especie, despojada de principios individuantes, es posible por la condición de la especie inteligible recibida en él, que es hecha inmaterial por el intelecto agente, es decir, abstraída de la materia y de las condiciones de la materia, por las cuales algo se individúa. Y por ello no pueden las potencias sensitivas conocer los universales, porque no pueden recibir la forma inmaterial, pues siempre reciben en un órgano corporal."[46]

Para decirlo en términos claros y aplicados a nuestro problema, la matemática estudia una forma real, pero los conceptos matemáticos no tienen por qué tener una imagen especular en el mundo. Cuando los científicos reflexionan sobre sus conceptos para determinar su realidad, entonces necesitan de hábitos de pensamiento distintos a los que han usado en su ciencia, porque ellos lo que han estudiado son las cosas, no los conceptos. Sólo la metafísica puede estudiar en qué sentido existen los conceptos de las ciencias particulares, porque sólo ella versa acerca del "qué es", y corresponde a la misma ciencia estudiar el "qué es" y "si es"[47]. La física supone que existe su objeto, y lo toma por inducción. La matemática también lo supone, pero lo toma o por abstracción o por hipótesis[48]. Y la metafísica se da cuenta de que las ciencias conocen por proposiciones; que en la realidad no hay sujetos y predicados ni negaciones, etc., pero lo conocido no son esas proposiciones, sino las cosas a las que se refieren. Por eso los matemáticos suelen ser platónicos, como el citado Penrose, porque saben que no están "inventando" sus proposiciones o demostraciones, sino que sólo están formulando unas exigencias de su objeto. Aunque si se pregunta a uno de modo repentino si existen las igualdades de sus fórmulas o los números imaginarios probablemente no sepa qué responder o, si lo hace, lo hace con un hábito distinto al de la ciencia matemática.

Veamos ahora la segunda objeción, de los husserlianos. Según entiendo, ellos sostendrían que el número sería una suerte de conjunto

[46] Santo Tomás de Aquino, *Summa contra Gentes*, libro II, capítulo 75.
[47] Así, por ejemplo, un aritmético puede hacer demostraciones impresionantes en torno a los números, pero no corresponde a su hábito de pensamiento responder qué es el número. Y, sin esa respuesta, no se puede decir en qué sentido existe. Si el aritmético respondiera, no lo haría en cuanto aritmético, sino en cuanto hombre o en cuanto metafísico.
[48] Aristóteles, *Metafísica*, Épsilon (VI), 1.

mental con el que abarcamos cosas que tienen un género común. Si decimos “diez”, debe tratarse de “diez frutas” o “diez manzanas” o “diez cosas”. “Diez manzanas y peras” serían “diez frutas”, claro. De aquí quieren concluir que no puede decirse que el número sea una “forma accidental” abstraída, porque se puede aplicar a las sustancias; incluso a los ángeles, que son inmateriales. Y, hoy en día, además, a las cualidades, como los “diez grados centígrados” o la longitud de onda de los colores. En realidad, cuando Sócrates se extrañó tanto de que “uno y otro sean dos” y Platón afirmo que la causa era la participación en la dualidad[49], los antiguos llegaron a una solución semejante a la de Husserl, acerca de la naturaleza del número. Pero la forma estaba en el mundo, no sólo en nuestra mente. Aristóteles tuvo mucho que corregir a estos primeros pasos antiguos. Finalmente, llegó a descubrir que lo que de real tenía la matemática era esa forma abstraída (junto con la “materia inteligible”, de la que ahora no podemos hablar). Distinguió, además, entre la unidad como indivisión de la sustancia, que permite hablar de una pluralidad de sustancias, y la unidad como principio del número[50]. Es obvio que el poder contar sustancias materiales no es lo que da origen a los números (reales), que son un continuo: dividir a tres personas entre dos no es posible, pero dividir un continuo como la cantidad medida por los números, sí[51]. Era la unidad como principio del número la que podía incluirse en el género de la cantidad. El hecho de que se pueda hablar de “grados centígrados” o de longitudes de onda no muestra sino que lo que puede medirse es la cantidad o la base cuantitativa de las cualidades. Lo que se mide con la expresión “grados centígrados” es la altura de una columna de mercurio, tomando como base de medición la centésima parte de la diferencia de esa altura cuando el mercurio se encuentra a la temperatura de ebullición del agua o a la temperatura de congelación de la misma agua. Y la “longitud de onda” de un color sería la del rayo de luz

[49] *Fedón* 96-102.

[50] *Cf. Metafísica*, Zeta (IX).

[51] Una matemática amiga, la profesora Mercedes Rosas (USB, Caracas), me hizo observar que el conjunto de los números naturales no es un subconjunto de los números reales, y que, por ello, es posible que los números naturales sí sean una suerte de conjunto mental de cosas del mismo género. Para los números naturales, por tanto, el primer argumento dado en el texto no tendría fuerza, aunque sí el segundo y el tercero.

que es reflejado por la superficie de una sustancia opaca. En cuanto al contar las sustancias, debe decirse que la pertenencia a un mismo género, sin la cual no se puede contar, no se da en las sustancias inmateriales (como los ángeles), de modo que esta objeción es vacía.

Los rusos, al hablar del origen de la aritmética[52], parecen avalar la opinión de los husserlianos, de que es aplicable a las sustancias primariamente. Pero luego citan la *Aritmética general* de Newton y suscriben su opinión, apegada a Aristóteles, para definir los números reales: "por número entendemos no tanto una colección de unidades como una proporción abstracta de una cierta cantidad a otra cantidad tomada como unidad"[53].

F. ¿Puede decirse que el objeto de la matemática sea un conjunto de "hechos"?

Gian-Carlo Rota, un matemático que hizo reflexiones filosóficas acerca de su disciplina, nos dijo, en un capítulo titulado "The Pernicious Influence of Mathematics Upon Philosophy"[54], que la matemática trata primeramente con "hechos" (*facts*), como cualquier otra ciencia. Pone como ejemplos que las alturas de un triángulo se encuentran en un punto, que hay diecisiete tipos de simetría en el plano, que hay cinco ecuaciones diferenciales no lineales con singularidades fijas... Y afirma que estos hechos, por abstrusos que puedan parecer, encuentran siempre aplicaciones prácticas. Pero secundariamente la matemática trata acerca de pruebas. "Todo hecho de la matemática debe ser integrado en una teoría axiomática y probado formalmente si tiene que ser aceptado como verdad. La exposición axiomática es indispensable en la matemática porque los hechos de la matemática, a diferencia de los de la física, no son asequibles a la verificación experimental. El método axiomático de la matemática es uno de los grandes logros de nuestra cultura. Sin embargo, es sólo un método. Mientras los hechos de la matemática una vez descubiertos nunca cambiarán, el método por el cual estos hechos son verificados ha cambiado muchas veces y sería una locura esperar que tales cambios no ocurran en el futuro"[55].

[52] Aleksandrov, Kolmogorov y Lavrent'ev (eds.), *o.c.*, p. 18.
[53] *Ibid.*, p. 27ss.
[54] Rota, Gian-Carlo, *Indiscrete Thoughts*, Boston, Basel, Berlín: Birkhäuser, 1997, p. 89ss.
[55] *Ibid.*, pp. 89-90.

Esta distinción es sumamente interesante. Pero creo que el lenguaje de Rota induce a confusiones. Obviamente, el objeto de la matemática no es un conjunto de "hechos", puesto que "no son asequibles a la investigación experimental", porque la matemática no obtiene su objeto por inducción, sino por abstracción, como acabamos de ver. Por eso las demostraciones de la matemática son mucho más sólidas que las de la física. Será útil ver, en este sentido, un texto del *Traité de la Lumière* de Huygens, citado por Crombie en su *Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo*: "Se ha de encontrar aquí un tipo de demostración que no produce una certeza tan grande como la de la geometría, y que es en verdad muy distinta de la empleada por los geómetras, puesto que ellos demuestran sus proposiciones por medio de principios ciertos e incontestables, mientras que aquí los principios son comprobados por las consecuencias derivadas de ellos. La naturaleza del tema no permite ningún otro tratamiento. Sin embargo, es posible alcanzar de este modo un grado de probabilidad que con frecuencia es escasamente menos que la certeza completa. Esto sucede cuando las consecuencias de nuestros principios supuestos concuerdan perfectamente con los fenómenos observados, y especialmente cuando esas confirmaciones son numerosas, pero sobre todo cuando podemos imaginar y prever nuevos fenómenos que se seguirán de las hipótesis que empleamos y se ve luego que nuestras expectativas se cumplen."[56]

Por la misma razón Penrose estaría en desacuerdo con Rota, en cuanto a la distinción entre el conocimiento de las verdades matemáticas y su demostración. Según Penrose, la visión de una verdad matemática se transmite a otra mente no tanto por una explicación detallada como por un señalar hacia el "mundo platónico".

Pienso que la causa de la distinción de Rota reside en que debe distinguirse entre la *via inventionis* y la *via demonstrationis*, como en toda ciencia. Mas la demostración no es sino la recomposición que sigue a un resolver las verdades descubiertas en los principios de los que dependen[57]. Esa resolución se puede hacer mejor o peor, desde un punto de

[56] Crombie, *Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo*, Madrid: Alianza Editorial, 1993, p. 288.
[57] En sentido semejante, *cf. Mathematics, its Content, Methods and Meaning*, *o.c.*, p. 54. También Hilbert se pronunció de modo semejante, en un curso dictado en 1905

vista o desde otro, pero no es arbitraria y no está desligada de las verdades que luego se demostrarán, aunque esas verdades no sean conocidas por la demostración.

acerca de la axiomatización de la física: "El edificio de la ciencia no se construye como una vivienda, en la cual hay que establecer primeramente unas fundaciones firmes para poder después proceder a levantar y a ensanchar las habitaciones. La ciencia prefiere hacerse lo antes posible de confortables espacios por donde pasearse con holgura y es solamente después, cuando los primeros signos aparecen por aquí y por allá, que las inestables fundaciones no son capaces de sostener la expansión de los dormitorios, que ella se dispone a apuntalarlos y reforzarlos. Esto no es un signo de debilidad, sino más bien la vía correcta para su buen desarrollo." (citado por Corry, Leo, *o.c.*, p. 41).