*Revista de Humanidades de Valparaíso* Año 4 / 2016 / 1er semestre / N° 7 Págs. 67 - 107
ISSN 0719-4242

# Dialogique des matrices†

**Pierre Cardascia***

**Résumé**

La logique dialogique ordinaire propose un traitement de la mémoire sous la forme d'un historique des dialogues. Rechercher une référence (*la justification*) dans cet historique est un processus ambiguë en cas de répétition, ce qui peut rendre complexes ou impossibles les questions de composition de dialogue. Ainsi, deux recherches de justification peuvent se superposer en une double justification problématique. De plus, ce traitement de la mémoire coûte techniquement beaucoup de ressources.

Nous proposons un formalisme de la dialogique qui résout ces problèmes: double-justification, composition, économie de mémoire. Pour ce faire, nous internaliserons des règles analysées comme "spéciales", reconfigurant en grande partie le formalisme et à sa suite les notions philosophiques voire métaphysiques mises en jeu dans ce système logique et dans ses interprétations.

Cet article se découpe en trois parties :

1. Une présentation du cadre dialogique orientée vers la présentation du problème de la double justification.
2. Une ré-interprétation de ce cadre en termes de matrices : les formules logiques calquées sur la lecture linguistico-mathématique du langage sont remplacées par un concept emprunté à la *game semantic*, celui de position (sous la forme de matrices de formules).
3. Une brève synthèse des nouvelles perspectives offertes par cette méthode : réaffirmation de la séparation claire entre les différents niveaux d'analyse et économie sur la quantité de mémoire requise (payée en complexité).

† Recibido: Julio 2015. Aceptado: Noviembre 2015.

* UMR STL Universit de de Lille3, Lille, France. p.cardascia@yahoo.fr

# 1. La logique dialogique

## 1.1 Le cadre général

La dialogique est un cadre formel pour la logique inspirée par les travaux de Paul Lorenzen à la fin des années 50 puis développée par Kuno LORENZ.

Une manière "naturelle" et intuitive mais quelque peu simplificatrice, antihistorique, de comprendre l'émergence de ce cadre serait d'expliquer qu'après l'apparition de la logique moderne et du calcul de prédicat, destinée d'une part à automatiser la démonstration mais d'autre part à éclaircir le langage, on s'est rendu compte que le langage ne fonctionnait pas qu'en monologue. En effet, le processus du calcul est vu comme une activité "solitaire" par excellence; on imagine difficilement plusieurs personnes travaillant sur un seul calcul. Mais une argumentation est par contre une activité sociale "par excellence" : on n'argumente pas pour soi-même. C'est donc dans cet interstice entre la preuve calculatoire, le calcul des vérités (logique mathématique), et la théorie de l'argumentation plus proche des sciences humaines (voire de la rhétorique) que renait l'idée de dialogique, déjà présente chez Aristote et dans la doctrine scholastique.

Cette présentation cache les "vrais" problèmes techniques de la logique intuitionniste, des questionnements sur l'articulation entre les procédures opératoires de cette logique et le niveau épistémique[1].

## 1.2 Les deux niveaux de règles

### 1.2.1 Règles des particules

Une des particularités du cadre dialogique est de remplacer la sémantique "dénotationnelle", c'est-à-dire une théorie du sens qui projette le sens des expressions et des opérations en externe via une théorie de la dénotation[2], par une sémantique "opérationnelle", où le sens est généré en interne par des paires de mouvements : un challenge et une défense. Ainsi, le sens d'un opérateur logique, c'est qu'il peut être mis en question d'une certaine manière, mise en question à laquelle on peut répondre ou on ne peut pas répondre, d'une certaine manière. Ces paires **challenge/défense** ou encore parfois **question/réponse**, sont appelées **règles des particules** et forment ensemble le niveau "local" de la compréhension du sens. Il existe bien sûr de nombreuses paires de règles de particules, interprétant ou réinterprétant différemment les différents opérateurs logiques, permettant de décrire en terme d'interactions dialogiques[3] les logiques particulières.

---

[1] Il n'est pas aussi évident que cela de trouver des ouvrages sur l'histoire "contemporaine" de la dialogique qui ne soient pas en même temps des ouvrages techniques. On peut toutefois lire SCHRÖDER-HEISTER [7], RAHMAN & KEIFF [5].

[2] Pointeurs, Oracle... L'idée générale de ces sémantiques, c'est que le sens n'est pas contenu à l'intérieur du formalisme mais dans "un extérieur" plus ou moins défini. Certains diraient, le "réel".

[3] J'ajoute l'adjectif "dialogique" pour spécifier le terme "interaction", trop général.

| Asser. | $X - A \wedge B$ | $X - A \wedge B$ | $X - A \vee B$ | $X - A \rightarrow B$ | $X - \neg A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Chall. | $Y - ?\wedge_L$ | $Y - ?\wedge_R$ | $Y - ?\vee$ | $X - ?[A]$ | $Y - ?\neg[A]$ |
| Def. | $X - !_\wedge[A]$ | $X - !_\wedge[B]$ | $X - !_\vee[A]$<br>$X - !_\vee[B]$<br>*X choisit.* | $X - !_\rightarrow[B]$ | |

| Utter. | $X - \forall x f(x)$ | $X - \exists x f(x)$ |
|---|---|---|
| Chall. | $Y - ?\forall x/c$ | $Y - ?\exists$ |
| Def. | $X - !_\forall[f(x/c)]$ | $X - !_\exists[f(x/c)]$<br>*X choisit.* |

Pour cette présentation[4], nous avons choisi de nous concentrer sur l'ensemble suivant de règles de particules, servant à décrire la **logique classique**. En voici la table :

1. Chaque colonne décrit le comportement de chaque connecteur logique spécifique, c'est-à-dire comment un joueur peut interroger ou défendre une formule. La première ligne, *Assertion*, indique la forme de la formule prérequise. La seconde ligne *Challenge* donne la forme de l'interrogation et finalement, la troisième donne la forme de la défense. Les entrées dans chacune des cellules sont exprimées ainsi : <*joueur – marqueur de force* [*formule*]. Le *joueur* est donné par **X** ou **Y**, chacun pouvant correspondre au proposant ou à l'opposant, avec toutefois cette réserve : **X≠Y**. Le *marqueur de force*[5] indique si le mouvement est un challenge ? ou une défense !. La *formule* donnée entre crochets[6] doit être donnée/assertée/concédée par le *joueur* pour effectuer le mouvement.

2. L'information importante de la première colonne est son connecteur principal. Par exemple, première ligne première et deuxième colonnes, nous avons *Asser.* $X - A \wedge B$, cela signifie que le joueur X doit avoir joué $A \wedge B$ quelque part dans le dialogue avant que l'autre joueur *Y* ne puisse jouer un des deux challenges suivants. Pour notre exemple, nous choisissons **X** = **P**.

---

4 L'extrême vivacité des recherches en dialogique rend difficile de trouver un ouvrage d'introduction qui soit "à jour". Le livre *How to play dialogues : an introduction to dialogical logic* [6] de 2011 est sans doute le plus progressif mais qui ne contient pas le dispositif important des rangs de répétition, qui est introduit en 2013 par Nicolas Clerbout dans sa thèse [1] et dans son article [2].

5 L'absence de marqueur, dans la ligne des *assertions* indique que l'origine de la formule n'a aucune importance. Seule importe que la formule ait été assertée pour défendre ou bien pour attaquer une autre formule...

6 Son absence signifie juste qu'aucune formule n'est requise pour ce mouvement.

3. La seconde ligne indique comment la formule de la première ligne peut être interrogée. Dans notre exemple, **Y** devra être l'opposant (l'autre joueur). Il dispose de deux possibilités : $?\wedge_L$ ou bien $?\wedge_R$. La différence entre ces deux coups se trouvera dans la ligne suivante.

4. La troisième ligne indique la défense que le joueur peut opposer au challenge de son partenaire. Continuons notre exemple : si l'opposant avait choisi $?\wedge_L$, le proposant lit la ligne $Y$ –! $\wedge$ [$A$] dans la table des règles de particules, et sait désormais qu'il a à défendre son assertion en soutenant/assertant $A$, s'il le peut !

5. Chaque coup accompagné d'une formule entre crochet exige de vérifier la possibilité d'assertion de ladite formule. Par exemple, dans un **dialogue formel** (c'est-à-dire sans RS5[7]), chaque joueur peut asserter n'importe quelle formule, atomique ou non. Mais toutefois, dès qu'on introduit RS5, nous introduisons une restriction asymétrique dans les assertions... Dans notre exemple, avec RS5, pour $X$–! $\wedge$ [$A$] avec $X = P$, le proposant doit asserter $A$ pour défendre **pour cela**, il doit dupliquer[8] un usage précédent de la formule $A$ fait par l'opposant.

6. La ligne "X choisit" signifie que le challenge peut recevoir différentes réponses, laissées au choix du joueur défié. Ces défenses sont différentes, et on pourrait les distinguer plus au niveau de l'écriture : par exemple, nous pourrions écrire $?\wedge_L$ et $?\wedge_R$ (L pour gauche/left, R pour droite/right). Toutefois, comme seule la formule assertée apparaîtra dans le dialogue, cette distinction est ici superflue.

Le dialogue commence avec une formule donnée par le proponent. Cette initialisation peut être pensée comme un "mouvement spécial", appelée la **thèse** et étant de rang 0. Si nous la lisons ainsi, comme un coup, alors il faut assumer que ce coup n'est ni une défense, ni une requête. On pourrait ainsi l'introduire dans les tables avec ce formalisme : $P$ – [*formula*], sans aucun marqueur de force.

### 1.2.2 Règles structurelles

Il existe toutefois un autre niveau, que nous appelons "le niveau global", qui gouverne le déroulement du jeu, indépendamment du fonctionnement des particules. Les règles qui dirigent ce niveau s'appellent des "règles structurelles". Si nous souhaitons faire la comparaison usuelle avec le jeu d'échecs, les règles des particules expliquent comment chaque pion peut se déplacer : par exemple, le pion peut avancer

---

[7] Voir plus bas, dans les règles structurelles.

[8] "Copy-cat" est d'un usage si répandu en anglais qu'on l'utilise directement comme verbe pour désigner l'action : "suivre une stratégie de duplication". En toute rigueur, "copy-cat strategy" se traduit par "stratégie de duplication", c'est-à-dire créer un double, ce qui est plus fort que la simple copie dans le langage informatique, où l'on connait le fameux "copier puis coller". Il est donc insuffisant de traduire "copy-cat strategy"' par "stratégies de copies"'. D'où le choix du verbe "dupliquer". En argot de logicien, on a aussi "copy-catter" ...

d'une case dans une case inoccupée ou peut capturer une pièce adverse qui lui fait face diagonalement, c'est-à-dire une case en face de lui, mais dans une colonne adjacente. Par contre, une règle structurelle pourrait être la suivante : "le joueur blanc commence en premier", ou encore, l'alternance des joueurs, c'est-à-dire que chaque joueur joue un coup l'un après l'autre, ou encore "l'interdiction de passer son tour"[9].

1. **Règle de départ (RS1s) :** La partie commence avec une assertion faite par le proposant. Cette assertion n'est ni une question, ni une réponse.
2. **Règle de l'alternance (RS1a) :** Les coups sont joués alternativement par les joueurs **P** et **O**. Ces coups doivent être soit des questions/challenges, soit des réponses/défenses.
3. **Règles de victoire (RS2) : X** gagne la partie si **Y** ne peut plus jouer aucun coup à son tour (aucune question ni réponse disponible).
4. **Règle de l'opportunité classique (RS3c) : X** peut attaquer/questionner n'importe quelle assertion faite par le joueur **Y** ou défendre contre n'importe quel challenge/répondre à une question faites par **Y**, *en respectant, bien sûr, les règles des particules*.

**Ces règles sont les 4 règles structurelles "régulières**". Elles sont indépendantes des règles de particule et nous pouvons modifier ces dernières sans modifier le niveau global de la compréhension. Pourtant, ces règles mises ensemble ne suffisent pas à capturer tous les aspects dynamiques des logiques, comprendre par là que certaines irréversabilités des processus logiques nécessitent une connexion entre le niveau local des règles de particules et le niveau global des règles de structure.

### 1.2.3 Comment représenter un dialogue ?

Nous ne représentons que rarement le dialogue sous la forme d'une séquence de coups comme dans l'exemple précédent. Nous préférons le représenter sous la forme d'un double tableau, avec 2 fois 3 colonnes :

| | *Opposant* | | | *Proposant* | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Rang* | *Coup* | *ChR* | *ChR* | *Coup* | *Rang* |
| | ... | | | ... | |

[9] Récemment, les rédacteurs de règles de jeu se sont mis d'accord pour considérer cet interdit comme redondant. En effet, si un tour, c'est jouer un ou plusieurs coups et si "passer son tour" n'est pas dans la liste de coups, on considère qu'il n'y a pas lieu d'ajouter une règle spéciale pour l'interdire.

où Rang désigne le rang de ce mouvement dans la séquence de mouvement et *ChR* désigne le rang du mouvement interrogée ou défié par un challenge (et cela bien sûr uniquement si le mouvement dans la colonne central correspondante est un challenge). Cette représentation suit quelques conventions supplémentaires :

1. Chaque mouvement doit être placé dans la colonne centrale du joueur l'ayant joué. Nous n'écrivons pas les mouvements comme ils sont données dans la table des règles de particules, mais sous une forme réduite. La disposition de la formule dans le double-tableau fournit les informations manquantes.
2. La forme réduite du mouvement est la formule entre crochets qui a été assertée pour effectuer le mouvement. Si le mouvement n'a aucune formule entre crochets, c'est le marqueur de force ainsi que le connecteur concerné et les éventuels choix qui sont mis dans le dialogue. Exemples : la forme réduite de $O$–$!_{\wedge}[A]$ est $A$ et la forme réduite de $P$–$?_{\wedge R}$ est $?_{\wedge R}$.
3. Chaque fois qu'un joueur interroge une formule, il met ce challenge dans une nouvelle ligne, cela ouvre en quelque sorte un nouvel échange. Il doit en plus indiquer le rang de la formule qu'il interroge dans la colonne *ChR* correspondante, en vue d'un éventuel suivi...
4. Chaque fois qu'un joueur défend face à un challenge, cette défense est mise dans la même ligne que le challenge, du côté du défenseur, en face.

### 1.3 Règles "spéciales"

#### 1.3.1 Pourquoi des règles sont dites spéciales ?

Une règle est dîte **spéciale** quand elle interdit/autorise dans certaines circonstances globales du jeu l'usage d'un coup qui d'un point de vue local serait possible/impossible.

Pour prendre l'exemple des échecs, un pion a un ensemble de règles qui gère son déplacement, c'est-à-dire qu'il peut avancer d'une case et qu'il prend capturer les pions adverses en diagonale vers l'avant. Ce sont ses règles **régulières**. Il dispose toutefois de **règles spéciales**: à savoir la possibilité d'avancer de deux cases lors de son premier mouvement ou pour contrer cela, de la "prise en passant". Ces règles ne peuvent pas être définies uniquement au niveau local : elles exigent d'introduire des références sur le cadre global du jeu[10], à savoir "le pion n'a pas **encore** bougé" ou bien "un pion **vient juste** de faire une avancée de deux cases dans une colonne adjacente". Nous aurions pu aussi parler du roque, grand ou petit, qui est aussi une règle spéciale, ainsi que la règle du \textit{pat} qui régit les parties nulles.

Ces règles "spéciales" commandent une distinction entre les **coups possibles** et les **coups légaux**, qu'on peut formuler ainsi :

1. Un coup est **possible** en vertu des règles de particules ...

[10] Ces règles expliquent pourquoi les pièces et l'échiquier ne suffisent pas à décrire l'avancement de la partie.

2. mais un coup est **légal** s'il est possible et qu'aucune règle ``spéciale" ne l'empêche.

Cette distinction toutefois est incomplète, car elle suppose que les seules règles "spéciales" servent à interdire dans certaines circonstances des coups possibles en vertu des règles de particules. Or, l'exemple des échecs suggèrent que les règles spéciales peuvent aussi à autoriser des coups autrement "impossibles".

L'existence de telles règles ne fait l'unamité dans la littérature consacrée à la logique dialogique, où l'on préfère privilégier la thèse de la séparation entre les deux niveaux de règles, en forçant l'analyse de ces règles comme des règles structurelles. On argumente de la sorte : bien qu'elles soient formulées pour des raisons pratiques, comme des interdictions de coups dans certaines circonstances, les règles suivantes[11] effectuent **en fait** une restriction sur l'ensemble des jeux possibles quand on étudie le dialogue. Elles définissent donc bien une structure et n'interfèrent pas avec les règles de particules, puisque qu'au moment même où l'on applique lesdites règles, les parties "illégales" ont déjà été éliminées du champs des possibles. On n'interdit donc pas réellement un coup possible de se produire, on évacue *a priori* la situation où ce possible s'actualise. Ce n'est pas vraiment une interdiction qui se passerait sur un plan "juridique"; c'est une manipulation "métaphysique" du monde pour qu'il exclut ces scénarii.

Cet argument (métaphysiquement très coûteux) ne résout pas tous les problèmes. D'une part, il accepte la supposition déjà mentionnée de règles spéciales **uniquement restrictives**. D'autre part, cette manière de faire produit le problème de la double justification en dialogique. La résolution de ce problème technique-là est plus importante et plus déterminante qu'une simple discussion sur le statut des règles RS4 et RS5.

### 1.3.2 RS4 et RS4' : règles de non-répétition et non-repetition stricte :

Une façon d'incorporer quelque notion de progrès dans les dialogues est d'interdire la répétition de certains mouvements. De telles restrictions préviendraient l'apparition de certains **cercles vicieux**, quand un joueur choisirait de répéter toujours le même challenge, auquel l'autre répondrait toujours de la même façon, exactement comme on l'entend parfois dans des querelles d'enfants. Nous pouvons formuler une telle interdiction de la sorte :

**Règle de non-répétition (RS4):** Une formule ne peut être interrogée ou défendue qu'une seule fois.

L'application de cette loi, toutefois, a pour conséquence non-désirée que le proposant n'arrive pas à gagner certains dialogues sur des tautologies qui nous

[11] Que nous disons "spéciales" mais qui seraient dites "structurelles".

tiennent vraiment à coeur. Considérons par exemple le *Modus Ponens*, $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$. On aimerait bien avoir cette formule qui dit "Si j'ai "A entraîne B" et que j'ai "A", je peux déduire "B"". Voyons ce que cela donne avec (RS4)[12]:

| | $O$ | | | $P$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ | 0 |
| 1 | $A \wedge (A \rightarrow B)$ | 0 | | | |
| 3 | $A$ | | 1 | $?\wedge_L$ | 2 |
| | | | | lost | |

**$?\wedge_L$-tentative**

| | $O$ | | | $P$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ | 0 |
| 1 | $A \wedge (A \rightarrow B)$ | 0 | | | |
| 3 | $A \rightarrow B$ | | 1 | $?\wedge_R$ | 2 |
| | | | | lost | |

**$?\wedge_R$-tentative**

Ces deux tentatives échouent pour deux raisons différentes : la tentative $?\wedge_L$ se solde par un échec pour le proposant car il n'a pas le droit d'interroger à nouveau le mouvement (1), il perd la tentative $?\wedge_R$ car il ne peut pas réutiliser/dupliquer/asserter/copy-cater $A$[13], formule atomique requise pour interroger le mouvement (3), $A \rightarrow B$. Dans l'état, le proposant ne peut pas gagner le *modus ponens* ...

Nous pouvons donc rechercher une manière d'affiner la règle de répétition avec une seconde règle moins restrictive : **la règle de non-répétition stricte (RS4')**.

Avant tout, donnons une définition de strict et de non-strict pour une répétition :

Soient $M$ et $M'$ deux mouvements du dialogue $\Delta$. Nous disons que $M'$ est une **répétition** de $M$ si et seulement si il existe un mouvement $N$ tel que $b(M) = r(N)$ et $b(M') = r(N)$ et que $r(M) < r(M')$[14]. Si $M$ et $M'$ sont des ?-mouvements, $M'$ est la répétition d'un challenge, et respectivement, avec un !-mouvement, nous avons une répétition d'une défense.

---

[12] Conjointement avec (RS5), voir plus bas.

[13] Voir en dessous, la règle formelle (RS5).

[14] C'est-à-dire que les deux mouvements se réfèrent au même mouvement tiers. Pour le dire autrement, $M$ et $M'$ sont des attaques sur le même coup, ou des défenses sur la même attaque. Naturellement, c'est le coup qui arrive le plus tard dans la partie qui est dit être la répétition du premier.

De plus, si $M'$ est une répétition de $M$ et que $M'$ utilise la même règle de particule que $M$, alors $M'$ est une **répétition** stricte de $M$. Il est donc important de considérer que les seuls cas où nous pouvons avoir des répétitions non strictes sont ceux où les règles autorisent un choix entre plusieurs règles de particules[15]. Dans l'ensemble des règles de particules que nous considérons, nous constatons que les **répétitions non-strictes** peuvent apparaître au niveau des challenges $?\wedge_L$, $?\wedge_R$ et $?\forall x/c$ ou des défenses $!\vee_L$, $!\vee_R$ ou sur $!_\exists$.

Avec ces définitions, nous pouvons désormais formuler la règle :

**Règle de la non-répétition stricte (RS4'):** Un mouvement ne peut pas être une stricte répétition d'un mouvement précédent.

Désormais, remplaçons (RS4) par cette nouvelle règle (RS4') pour constater que le proposant peut désormais gagner le dialogue du *Modus Ponens* :

| | $O$ | | | $P$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $(A \wedge (A \to B)) \to B$ | 0 |
| 1 | $A \wedge (A \to B)$ | 0 | | $B$ | 8 |
| 3 | $A \to B$ | | 1 | $?\wedge_R$ | 2 |
| 5 | $A$ | | 1 | $?\wedge_L$ | 4 |
| 7 | $B$ | | 3 | $A$ | 6 |

**Victoire du proposant ¡**[16]

### 1.3.3 Une approche plus moderne : les rangs de répétition

Les travaux les plus récents menés par Nicolas Clerbout dans [1] et [2], ont jeté une toute nouvelle lumière sur la question de la répétition dans les jeux dialogiques. De plus, les résultats qu'il obtient dans la sémantique suffisent à rendre presque obsolète l' "ancienne manière de faire".

Son approche consiste à transférer la responsabilité de la répétition non pas sur une règle formelle, que ce soit **RS4** ou bien **RS4'**, mais sur un système plus proche d'un jeu d'annonce, tel qu'on peut en trouver par exemple au Tarot : chaque joueur annonce au préalable de la partie le nombre de répétitions de coups qu'il s'accorde. Cette annonce prend la forme de deux coups supplémentaires (une annonce pour chaque joueur) qui vont se placer juste après l'assertion de la thèse par le proposant. L'opposant déclare un rang de répétition (on note ce coup ($n{:=}r_O$) avec $n \in \mathbb{N}^*$), puis suivant la règle de l'alternance, c'est au proposant de déclarer son rang (($m{:=}r_P$) avec $m \in \mathbb{N}^*$).

---

15 Par simplification, nous mettons parfois les choix dans une seule règle, comme par exemple dans le cas des quantificateurs. On pourrait en effet décliner les multiples manières de questionner un quantificateur universel $\forall x$ en autant de règles, autant qu'il y a d'éléments dans le domaine, donc généralement, ça fait une petite infinité.

16 Nous pourrions échanger l'ordre des challenges $?^\wedge_R$ et $?^\wedge_L$, sans que cela ne modifie le résultat final.

L'effet de ces rangs est ensuite implémenté au niveau structurel par une règle qu'on pourrait appeler **(RS4'')**[17], "Règle de répétition limitée" :

**Règle de la répétition limitée (RS4''):** Une formule ne peut être interrogée ou défendue par un joueur $X$ plus de fois que le rang $r_X$ qu'il a choisi.

A notre niveau d'analyse, cette répétition limitée permet d'englober la règle (RS4) qui correspond à un choix de répétition 1 de la part des deux joueurs; pour un autre choix, on arrive à capturer les mêmes avantages que la répétition "non-stricte" sans le téléguidage de cette dernière. Le coût se paie en faisant une exception définitive à la classification de tous les coups en attaque et en défense[18], et en renforçant l'importance de la dimension stratégique[19].

### 1.3.4 RS5 : Règle de duplication :

L'autre règle spéciale se concentre sur les autorisations de donner les formules atomiques. Ces formules atomiques requièrent une attention toute particulière dans l'analyse logique, car elles représentent la base de l'économie logique, puisque que ce sont les "porteurs de vérité" de base et par là, ce sont à partir d'eux qu'on fabrique les valeurs de vérité des propositions[20]. Dans ces conditions-là, le contrôle des formules atomiques est le véritable enjeu des interprétations sémantiques des logiques compositionnelles.

Dans ces "guerres" pour le sens, les joueurs ne sont pas égaux : le proposant doit défendre sa thèse, l'opposant doit déjouer cette défense et ils ne partagent pas la même "charge de la preuve"[21]. En logique dialogique, le proposant n'a aucune "arme" atomique : l'argumentation est indirecte, il doit copier les formules atomiques déjà utilisées par l'opposant auparavant, à un moment antérieur dans l'histoire du dialogue. L'opposant, lui, peut utiliser toutes les formules atomiques qu'il souhaite, mais il ne doit pas **abuser de ce droit** car il ne peut révoquer les formules déjà utilisées : il est engagé. Si l'opposant peut utiliser toutes les formules atomiques qu'il souhaite, il ne peut pas interdire au proposant de les réutiliser. Ce que nous formulons de la sorte :

---

17 Bien que ce terme n'apparaisse pas explicitement dans les travaux de Nicolas Clerbout, qui fait le choix de réunir les règles *RS3c* (ou sa version intuitionniste qu'on appelle parfois *RS3i*) et cette version de *RS4* dans une seule règle appelée **Règle de développement classique**.

18 Le dialogue se déroule en deux phases : une phase de qualibrage où l'on se met d'accord sur les règles et sur l'objet du débat (ce qualibrage prend la forme d'annonce); une seconde phase où l'on joue en respectant ses annonces et où cette dualité question/défense est valable. A quel point tous les choix contenues dans les règles structurelles ne seraient pas transcriptibles en un tel jeu d'annonces ? Y gagnerait-on quelque chose ?

19 Ce qui nous semble être plus un gain qu'un coût...

20 La plupart des logiques sont compositionnelles, c'est-à-dire que la vérité des formules complexes est déterminée par celle de ses éléments plus simples, voire de ces éléments les plus simples, à savoir ce qu'on appelle les formules atomiques.

21 La notion de "charge de la preuve" thématise toutes les questions autour de "qui doit prouver quoi ?" Dans une quérelle d'opinions, chacun défend ses affirmations, auxquelles il doit croire. Mais un accusateur sceptique n'est pas engagé à défendre des affirmations, il doit contrer l'argumentation de l'autre sans être engagé à croire aux objections qu'il formule. Il teste la solidité des affirmations de l'autre.

**Règle de duplication : (RS5)** Le proposant ne peut pas introduire une nouvelle formule atomique et ne peut que dupliquer une formule atomique déjà assertée par l'opposant précédemment dans l'histoire du dialogue.

On appelle **conditions d'assertabilité** toutes les conditions liées à la possibilité d'asserter ou non une formule atomique. Quand on demande de vérifier ces conditions, on ne demande pour ainsi dire rien à l'opposant. Mais au proposant, on demande de vérifier s'il peut effectivement dupliquer une assertion antérieure de cette même formule atomique par l'opposant.

### 1.4 Dialogue & Parties

### 1.5 Outils techniques supplémentaires

Une **partie classique formelle** pour une formule donnée est une séquence de coups usant l' **ensemble des règles de particules pour la logique classique**, ayant pour hypothèse la formule donnée et respectant les règles structurelles suivantes : RS1s, RS1a, RS2, RS3c et RS4'.

Une **partie classique** respecte cette règle supplémentaire : RS5.

Un **dialogue** (ou jeu dialogique) pour une formule donnée est l'ensemble des parties qu'on peut jouer en prenant cette formule comme hypothèse. Les adjectifs qui qualifient les parties s'appliquent aussi au dialogue.

Pour suivre les progrès des parties, nous introduisons quelques outils techniques supplémentaires, servant à rendre plus intelligibles les règles formulées. Pour bien les concevoir, encore faut-il savoir quelles sont les informations qu'il faut suivre :

1. Chaque coup $m$ est associé à un rang, $r(m)$, égal à son rang dans la séquence de coups moins 1 (le rang de la thèse du proposant est donc 0). Comme conséquence directe de l'alternance des joueurs, nous avons la situation suivante : *rang pair = coup du proposant, rang impair = coup de l'opposant*.
2. A chaque coup est associée une nature : *challenge/question ou défense/réponse*[22]. Le plus souvent, les conventions d'écriture suffisent à capturer cette information. Toutefois, dans certains cas[23], les auteurs font le choix de

[22] Nous trouvons les deux vocabulaires, ils sont interchangeables selon qu'on souhaite se rapprocher d'une discussion en dialogue naturel (question/réponse) ou bien d'une "dispute" avec (challenge/défense).

[23] L'assertion qui peut être utilisée soit comme défense, soit comme manière de défier une implication.

la simplicité et laissent au lecteur le soin de déterminer tout seul de quoi il s'agit. On peut toujours y parvenir, à condition de disposer du dispositif suivant :

3. Une fonction de poursuite (**backtrack**) $b$, qui à chaque coup $m$ associe le rang du coup sur lequel nous sommes en train de jouer (la référence). Autrement dit, si $m$ est un challenge, le coup de rang $b(m)$ contient une assertion qui est mise à l'épreuve et si $m$ est une défense, le coup de rang $b(m)$ doit être un challenge.

Ainsi, pour chaque coup $m$ dans une partie, nous avons un triplet $< r(m), N, b(m) >$ où $r(m)$ est le rang de ce coup, rang qui donne l'identité du joueur ayant joué ce coup, $N$ sa nature est $b(m)$ est le rang du coup auquel $m$ fait référence.

Avec ces définitions, nous pouvons donner une formulation étendue de la règle d'opportunité, (RS3c).

Au tour du joueur $X$, il a à jouer un coup au rang $n$. Il peut :

1. **Opportunité pour ?:** S'il existe un coup $k$ de rang $r(k) < n$, qui n'est pas un $?_{\wedge}R$, $?_{\wedge}L$ *ou* $?_{\vee}$, joué par l'autre joueur $Y$ ($Y \neq X$), associé avec une formule $f$, jusqu'ici pas encore questionnée[24], alors $X$ peut défier le coup $k$ en utilisant la règle de particule correspondant au connecteur principal de la formule associée $f$. **De plus**, si nous ne sommes pas dans un dialogue formel, $X$ doit vérifier s'il satisfait ou non la condition d'assertabilité.
2. **Opportunité pour !:** S'il existe un challenge $?k$ avec rang $r(?k) < n$, joué par l'autre joueur $Y$ ($Y \neq X$) n'ayant encore reçu aucune réponse[25], alors $X$ peut défendre contre ce challenge $k$, en utilisant le coup adéquat (après vérification dans la table des règles de particules quelle est le coup adéquat ). **De plus**, si nous ne sommes pas dans un dialogue formel, $X$ doit vérifier s'il satisfait ou non la condition d'assertabilité.

**La condition d'assertabilité** est la conséquence de la règle formelle (RS5) sur l'opportunité. Si un joueur désire utiliser une formule complexe, il le peut toujours. Mais le proposant doit vérifier une condition additionnelle dans le cas de l'utilisation d'une formule atomique : l'opposant doit l'avoir utilisée au moins une fois auparavant. Formellement parlant, nous devons ajouter ceci aux précédentes règles d'opportunité:

---

[24] Il n'existe pas d'autre coup $m'$ dans cette séquence telle que $b(m') = r(k)$.

[25] Il n'existe pas d'autre coup $m'$ dans cette séquence, telle que $m'$ soit un !-coup **et** tel que $b(m') = r(k)$. Mais il peut exister un challenge sur ce challenge : ce qu'on appelle une contre-attaque, mais qui peut aussi être interpréter comme une requête pour plus d'informations. Exemple informel : "Où est le docteur ? - Le docteur qui ?" (*"Where is the doctor ? - The doctor who ?"*).

Au tour du joueur $X$, si $X = P$ et s'il a l'opportunité de jouer un mouvement adéquat $A$ après vérification dans les règles de particule, si ce mouvement adéquat requiert une formule atomique[26], $X$ peut jouer ce coup si et seulement si il existe un autre mouvement $A'$, associé aussi à la formule $A$, avec $r(A') < n$, jouée par $O$[27].

Le même vocabulaire peut servir à donner une version des règles **RS4** concernant la répétition. Comme elle contient en quelque sorte les deux autres, on se bornera à formuler la version **RS4", la répétition limitée**, en l'intégrant aux règles de l'opportunité. Pour cela, il faut remplacer les parties "jusqu'ici pas encore questionnée (il n'existe pas d'autre mouvement $m'$ dans cette séquence telle que $b(m') = r(k)$.)" et "n'ayant encore reçu aucune réponse (il n'existe pas d'autre mouvement $m'$ dans cette séquence, telle que $m'$ soit un !-coup **et** tel que $b(m') = r(k)$)" par des tournures comptant les nombres d'usage précédent. Respectivement : "jusqu'ici pas questionnée dans les limites du rang de répétition fixé par le joueur $X$ (il existe au plus $r_X - 1$ autres coups $m_i$ dans cette séquence telle que $b(m_i) = r(k)$.)" et "n'ayant encore le nombre maximum de réponses (il existe au plus $r_X - 1$ autres coups $m_i$ dans cette séquence, telle que $m_i$ soit un !-coup **et** tel que $b(m_i) = r(k)$)".

## 2. Dialogue des matrices

### 2.1 Règles spéciales et histoire dans le dialogue

Nous avons vu que les règles dîtes "spéciales" pouvaient capturer certains dispositifs temporels dans le dialogue. Ainsi, une idée de succession est capturée par la règle spéciale, qui interdit l'usage d'une formule atomique par le proposant **avant** que l'adversaire n'en use. De même, une idée de la non-répétition (et donc un des aspects de l'irréversibilité du temps[28]) est capturée par les règles du même nom.

Ces deux règles ont pour point commun de se référer à un "quelque part dans le passé", bien que cette référence puisse se situer n'importe où dans toute l'histoire du dialogue et n'a pas à être contenue dans le mouvement autorisant/appelant le mouvement envisagé. Cela nous force à **garder la trace de toute l'histoire de la partie**, mais en maintenant cette "mémoire" au niveau global, "en dehors" du processus même du dialogue. De là d'abord un souci technique pour les compositions des dialogues entre eux : si nous ne regardons que la dernière formule d'une séquence et la première formule d'une autre séquence, il est impossible de décider si ces deux séquences peuvent réellement ou non s'enchaîner l'une à l'autre.

---

26 Pour simplification, on va confondre le coup et la formule associée. Donc ce $A$ désignera aussi la formule atomique associée.

27 Le point intéressant pour le problème de la double justification est celui-là : $b(A) \neq A'$. La formule dupliquée A n'est pas justifiée par l'usage préalable de A par l'opposant; en fait, les deux formules n'ont aucun rapport entre elles. La fonction de poursuite b ne garde pas la trace de l'usage des ressources. On ne sait pas d'où viennent les ressources, si ce n'est un vague "quelque part dans la séquence", quelque part dans l'histoire...

28 Irréversibilité et non-répétition sont deux concepts ne se recouvrant pas. La non-répétition désigne le fait que deux situations identiques ne se reproduisent jamais. L'irréversibilité du temps ordonne un "cours du temps". Rien n'empêche ce cours du temps de passer à plusieurs reprises par la même situation.

Puis, philosophiquement parlant, cette "mémoire globale" et "externe" pose le problème d'être une hypothèse trop lourde, si on la met en rapport avec certaines sémantiques dialogiques. Si le sens provient de l'usage, et que le bon usage[29] exige une telle mémoire, alors soit on restreint l'usage à un tout petit système isolé mais qu'une mémoire d'homme suffit à traiter, ou bien on prend usage "au sens large" mais nous sommes alors contraints de reconnaître que nous n'aurons jamais vraiment assez de mémoire pour générer le fameux sens par un usage "toujours incomplet"[30].

L'origine de ce rapport à la mémoire provient d'une extension du projet même de la logique. Une des idées bien connues : il s'agit de dire que certains aspects des propositions de la langue naturelle peuvent être traduits par une formule logique. Cette analyse logique est traditionnellement comparée à un microscope servant à mieux voir certains aspects du langage naturel[31]. Si on comprend les dialogues en langage naturel comme des échanges de propositions et/ou de requêtes plus un contexte, on comprend que le cadre dialogique simule ces **échanges de phrases** par d'autres échanges, cette fois soit de questions formelles : les fameux challenges/défis, soit de formules[32]. Les logiciens ajoutent diverses constructions pour modéliser les contextes.

Dès lors, la seule place susceptible d'accueillir un enregistrement de l'histoire doit se situer dans la "composante contextuelle" de la théorie et non pas dans sa "composante sentencielle". Mais la fonction de poursuite[33] a pour domaine et co-domaine un élément de la composante "sentencielle": le rang des mouvements. Conséquence directe de cette séparation: impossibilité de capturer les "règles spéciales" au niveau local; ces dernières sont renvoyées "de force" au niveau structurel et dans le contexte[34].

Nous nous proposons d'élargir la conception de ce que sont les "phrases" : nous souhaitons les comprendre non pas comme des propositions ou des assertions, qui existent comme *porteurs de vérité* ou comme *attitudes propositionnelles*, mais comme des **rapports entre propositions** (ou entre attitudes) ou des modifications desdits rapports. La théorie de la référence "externe", c'est-à-dire la recherche de la connexion entre les "phrases" et le monde extérieur, passe derrière une théorie internaliste, consacrée aux intéractions internes du langage.

---

29 Le bon usage, c'est celui qui exige la compositionnalité. Un usage qu'on ne peut pas jamais reprendre, ça ne semble pas être compatible avec le sens de l'usage. Enfin, le sens usuel... Ou du moins, usité...

30 L'usage n'est pas un objet aussi bien défini que cela. Nous nous en servons comme abréviation de "histoire de toutes les utilisations faites", pour proposer un nouveau sens d'"usage" comme trace au présent de **certaines** utilisations du passé. Ce n'est donc pas quelque chose qu'on devrait chercher dans le passé mais un artefact au présent, qu'on entretient, qu'on fabrique... **L'usage est actualité**.

31 Dans cette visée, la logique n'a pas vocation à épuiser le langage naturel et s'assume comme étant "réductionniste".

32 Les formules pouvant avoir valeur de question.

33 Indispensable pour la formalisation des règles "spéciales".

34 Etrange confusion de la structure et du contexte, mais conséquence directe de l'analyse... L'explication des "règles spéciales comme règles structurelles" semble n'être qu'une manière d'assumer et de justifier a posteriori cette conséquence imprévue de la machinerie technique.

Dans cette formulation, les mouvements précédents[35] subsisteront dans les rapports entre propositions, aussi longtemps, qu'ils auront un effet sur l'état actuel du dialogue

Une **position dialogique** est une matrice **2 ∗ 2** :

$$\begin{pmatrix} S_O & S_P \\ R_P & R_O \end{pmatrix}$$

avec

$S_O$ est la liste des formules indexées stockées par l'opposant, avec au plus un rang de répétition $r = n$.

$S_P$ est la liste des formules indexées stockées par le proposant, avec au plus un rang de répétition $r = n'$.

$R_O$ est la liste de formules indexées requises par l'opposant, avec au plus un rang de répétition $r = n''$.

et $R_P$ est la liste de formules indexées requises par le proposant, avec au plus un rang de répétition $r = n'''$.

... Ainsi, quand nous désirerons vérifier une condition spéciale, comme l'assertabilité, nous n'aurons plus à creuser jusqu'à une profondeur inconnue dans l'histoire intégrale mais nous chercherons dans les traces **au présent** de ces mouvements passés[36].

La mémoire du jeu n'est donc plus un registre des coups passés, mais une présence actuelle d'informations, pouvant être effacées dès qu'elles deviennent inutiles[37]. Ce n'est donc plus réellement une mémoire archivée ou un rapport privilégié avec le temps des origines. C'est une mémoire de travail qui s'actualise en permanence et écrase les informations une fois qu'elles ont perdues leur pertinence.

---

[35] Nous essayons de réserver le terme "coup" pour la dialogique usuelle et le terme "mouvement" pour la dialogique des matrices.

[36] Pour formaliser la répétition, nous devons ajouter quelques informations aux formules. Mais ces informations supplémentaires sont dans l'état actuel du dialogue, pas en extérieur ...

[37] "Paradoxalement, oubli et mémoire partagent une même fonction : l'optimisation". [3]

### 2.2 Les matrices de formules

#### 2.2.1 Positions

Quelles relations entretiennent les formules entre elles ? La question n'est pas la même que la question classique "quelles sont les relations entre les mouvements ?", mais est connectée avec cette dernière. Les relations qu'entretiennent les mouvements entre eux sont les règles structurelles; le lieu où cette connexion s'actualise est le dialogue. Mais il n'y a pas de lieu en logique dialogique ordinaire où l'on pourrait capturer les relations entre les formules. Notre travail sera donc d'ouvrir un tel espace, en introduisant **les positions**.

D'un point de vue abstrait, la **position** est une structure qui garde la trace de toutes les informations pertinentes pour effectuer un mouvement et qui efface toutes les informations sans pertinence. Plus techniquement, nous pouvons décrire la **position** comme la structure **minimale** telle que chaque mouvement puisse être défini par et seulement par une paire de positions[38]. Philosophiquement parlant, pensons les positions comme des cellules logiques minimales : elles ont l'autonomie des cellules mais elles peuvent être connectées avec d'autres cellules pour former des complexes "organiques" au lieu des complexes "moléculaires" fabriqués avec les atomes logiques. Nous pouvons penser ces positions comme des monades ouvertes contrairement aux monades leibniziennes[39].

Mais pouvons-nous définir de telles positions ? Quelles sont les bonnes positions pour la logique dialogique ? Nous sommes en effet poursuivi par l'idée d'une "mauvaise position", c'est-à-dire d'une position qui ne capturerait pas assez d'informations[40] ... C'est-à-dire qu'il y a des notions de position plus faibles qui peuvent nous induire en erreur. Ces notions faibles de position empruntent chacun un peu des quatre réponses[41] à la question : "Qu'est-ce qui détermine un mouvement ?" : **la totalité du jeu** (approche historique), **le dernier mouvement** (stimulus/réaction), **la position actuelle** (mais la notion faible sans exigence d'informations locales et sans aucune exigence sur le *board*), **la vue des joueurs** (chaque joueur voit une partie du jeu, c'est donc une version raffinée des trois précédentes).

La notion forte de position contient localement toute l'information pertinente d'informations si bien que "la profondeur de vue du joueur" est concentrée sur la position actuelle ...

---

38 Nous voulons avoir le schéma *Position* $\xrightarrow{\textit{Mouvement}}$ *Position* et rien d'autre.

39 La monade leibnizienne est fermée dans la mesure où elle contient dans ses plis le monde entier; une seule chose "la traverse", l'harmonie préétablie par Dieu. La position n'a pas besoin de contenir "le monde du langage" entier mais doit "être traversé" par la dynamique du dialogue. Elle est "autonome", mais vide sans dialogue "organique" autour d'elle.

40 Ou trop, mais ce cas-là est moins grave : juste "pas économique".

41 J'emprunte cette manière d'introduire différentes sortes de *game semantics* à Martin Hyland, [4]. Chaque réponse commande une approche différente des problèmes.

### 2.2.2 Les deux dimensions de l'``assertabilité" et les matrices

En relisant les conditions de l'opportunité du **2.5**, nous constatons que trois types d'information sont utilisés dans la formulation technique de ces conditions : le fait de savoir si une formule n'a jamais été questionnée ou bien si l'entrée est une question ouverte, c'est-à-dire qui n'a pas encore reçu de réponse, quel joueur a joué le coup, et le rang de ce coup dans la séquence.

Ce troisième élément, le rang du coup dans la séquence, n'est pertinent que s'il est utilisé dans un protocole de poursuite (*backtrack*). Cette conception du rang et de la fonction de poursuite découle de l'approche historisante du dialogue. L'approche actualiste élimine dans son projet même la fonction de poursuite : les informations pertinentes sont conservées au présent et plus besoin d'aller les poursuivre dans un historique exhaustif ! Le "rang dans la séquence" n'est donc pas une "dimension de l'assertabilité".

Les deux autres informations gardent leur pertinence. Chaque formule et chaque terme possèdent ces deux dimensions indépendantes :

1. Une formule est soit disponible pour être interrogée (**formule stockée**), soit elle est requise par un challenge (**formule requise**). Quand une formule stockée est attaquée/interrogée, cela peut générer une **nouvelle** formule requise[42]. Dans ce processus d'interrogation, la formule stockée peut être consommée mais cela n'est pas indispensable, tout dépend des régles choisies et en particulier, du rang de répétition.
2. Chaque formule a été jouée par l'un des joueurs. La thèse appartient au proposant. Jamais une formule n'est "partagée" entre les deux joueurs. On refuse donc l'interprétation du *copy-cat* comme "formules atomiques partagées" et on refuse d'interpréter la règle formelle comme une "ré-utilisation de la formule atomique donnée". Le proposant n'attend pas plus que l'opposant ne partage. Le proposant copie la formule atomique, se fait un double pour son usage personnel et cette copie est un nouvel objet.

Nous pouvons donc répartir les formules de deux manières différentes, suivant l'un ou l'autre de ces deux critères. Le mieux étant naturellement de garder toutes ces informations dans une seule formulation avec une répartition qui puisse mettre en valeur ces deux "dimensions de l'assertabilité" : l'usage de matrices **2*2** s'impose alors !

### 2.2.3 L'indexation par le rang de répétition

Dans les travaux les plus récents sur la logique dialogique menée par Nicolas Clerbout[43], le choix du rang de répétition n'est pas traité comme une règle structurelle,

[42] Généralement, une sous-formule de celle interrogée, mais pas toujours.

[43] *cf.* [1] et [2].

un dispositif externe, mais bien à l'intérieur du jeu comme une sorte de préambule. Le choix du rang n'est pas une décision préliminaire prise par un arbitre extérieur (la structure), mais est pensé comme un pari fait par les joueurs lors de l'ouverture[44].

On pourrait imaginer décliner chaque répétition stricte ou non-stricte comme s'il s'agissait d'un nouvel état des formules (et donc les traiter en ajoutant de nouvelles lignes). Toutefois, quelques tests convainquent rapidement qu'il est préférable d'adopter une approche par **rang de répétition**, en raffinant les matrices **2 * 2** par indexation des formules.

Chaque formule dans les matrices reçoit pour index le nombre de fois où elle a été utilisée[45]. Toutes les nouvelles formules reçoivent l'index 0.

Nous introduisons un nouveau terme, le marqueur de rang de répétition $r = n$ (avec $n$ le nombre maximum de répétition[46]), qui gardera dans la position la trace des rangs choisis.

Voici la définition complète de la position en logique dialogique, avec les rangs de répétition

Les formules sont stockées parce qu'elles sont disponibles pour être interrogées, les formules requises peuvent être fournies par le joueur intéressé.

Il est important de remarquer qu'on ne peut pas mettre plus d'un rang de répétition par cellule de la matrice, mais que pour la notation, nous n'avons pas besoin de démultiplier les $r$ car la position dans la matrice permet de les différencier et de connaître leur rôle. Notons aussi qu'une cellule peut aussi ne pas contenir de rangs de répétition : c'est ce qui se passe "au tout début" d'un dialogue, avant le choix du rang de répétition.

La disposition des formules dans les matrices peut être difficile à comprendre. Aussi, proposons une petite analogie : imaginons que l'opposant est assis du côté gauche du plateau de jeu qui est la matrice. Le proposant est face à lui, de l'autre côté du plateau. Chacun a à portée de main ses formules stockées et celles requises par son adversaire. Défendre signifie être capable, sous certaines conditions, de déplacer une formule d'une de ses mains vers l'autre[47].

### 2.2.4 Ajustements philosophiques

1. **Sur la compréhension de l'atomicité :** Où devons-nous placer les formules atomiques assertées ? En effet, dans les dialogiques usuelles, elles ne peuvent jamais être attaquées ou interrogées. Si bien que si nous pensons que les

[44] L'image qui me semble être la meilleure est celle de l'annonce au jeu de Tarots : chaque joueur annonce en combien de répétitions il prétend "le faire".

[45] Questionnée si c'est une formule stockée, fournie si c'est une formule requise.

[46] $n$ est un entier naturel normalement supérieur à 0, sauf si on veut faire dégénérer le système.

[47] Pour le proposant, cela signifie de faire passer des formules de main gauche à main droite. Pour l'opposant, de main droite à main gauche. Du point de vue du plateau-matrice, du bas vers le haut.

formules stockées le sont uniquement en vue d'un challenge, dans l'attente d'un questionnement, jamais nous n'accepterons de placer les formules atomiques dans les stocks. Mais nous ne pouvons pas non plus nous contenter de ne les trouver que comme formules requises. Où mettre alors les formules atomiques utilisées par l'opposant que le proposant peut dupliquer ? Nous ne pouvons pas les faire disparaître ...

La solution adoptée consiste à ré-interpréter le **stockage** de formules dans un sens différent du simple "stockées en vue d'un challenge". **Une formule stockée est soit une formule disponible pour un challenge, soit une formule pour laquelle aucun challenge n'existe pour elle**. La formule atomique "classique" correspond à une telle définition, mais nous nous imposons de traiter d'éventuelles composantes "non-analysables" du langage comme s'il s'agissait de "matériel atomique"[48]. Par exemple, dans les mathématiques, les axiomes sont des énoncés complexes mais non-questionnables : on pourrait les dire **atomiques pour ce langage**.

Ainsi, les formules atomiques peuvent être stockées dans $S_O$ et $S_P$ sans nécessiter de traitement séparé. Ce traitement commun aura des conséquences sur la manière d'intégrer la règle structurelle : les formules atomiques utilisées par un joueur iront dans son stock et ne le quitteront normalement plus[49].

Le coût de cette interprétation, c'est que notre conception de l'**atomicité** n'est désormais plus un "absolu" syntaxique : l'atomicité devient désormais la borne de notre capacité à interroger. Trouvons de nouvelles questions, de nouvelles manières d'interroger, c'est faire reculer l' "atome".

2. **Sur l'usage du rang de répétition :** Là où l'usage des rangs de répétition dans les travaux de Nicolas Clerbout sert à limiter les répétitions pouvant être infinies[50], notre exploitation des mêmes outils doit être pensée comme une autorisation d'usage restreint. L'usage original et historique est un usage **déflationniste** des rangs de répétitions, là où le nôtre est un usage **inflationniste** (même si ces termes sont un peu malheureux). Ou et c'est la même chose, par analogie entre les répétitions et les limites mathématiques, nous pouvons dire qu'il atteint son rang de répétition par valeur supérieure, tandis que nous l'atteignons par valeur inférieure.

   Jusqu'ici, cette différence de conception n'a pas eu d'impact sur les applications de la théorie et n'a pas de "coût" métaphysique évident.

---

48 Est considérée comme atomique toute formule pour laquelle il n'existe ni ?-mouvement, ni !-mouvement.

49 Ce n'est pas nécessairement vrai pour chaque logique qu'on peut désirer capturer. Si nous introduisons la notion de "consommation de ressources", on peut penser que dans certains cas, la duplication d'une formule atomique puisse consommer l'originale.

50 Dans le prolongement du contre-argument à la notion de "règle spéciale" du **2.3**, le travail de Nicolas Clerbout *pourrait* être utilisé comme argument en faveur du "il n'y a pas de règles spéciales, il y a juste des règles structurelles qui effectuent une sélection dans tous les modèles possibles". Nous pensons toutefois que cet usage irait contre les idées de son auteur. En effet, la notion de modèles est très controversée dans le cadre dialogique et à notre connaissance, Mr Clerbout la rejette.

### 2.3 Les mouvements

#### 2.3.1 Idées de base

Les mouvements sont définis comme **paires de positions**, c'est-à-dire comme couple de matrices **2*2** de formules indexées comme définies auparavant. Ils sont données donc sous la forme *position → position*, les listes de formules dans les cellules sous la forme ***alpha***, *formules actives*. La lettre grecque vaut pour toutes les formules **inactives** dans ce mouvement, c'est-à-dire les formules qui ne changent pas dans le mouvement (rang de répétition inclu), qui n'ont pas d'influence sur ses possibilités. Un mouvement peut, en effet, ne pas modifier une formule, mais avoir besoin de vérifier sa présence. De plus, certains mouvements, comme le "choix du rang de répétition", ajoutent uniquement des termes dans les listes et n'apportent pas d'autres changements.

Les joueurs ne se manifestent pas comme des indices ou des labels, mais comme un "côté" de la matrice : le côté gauche pour l'opposant, le côté droit pour le proposant. Une conséquence, la symétrie des mouvements n'apparaît pas de la même manière que dans le cadre dialogique classique[51], mais se manifeste visuellement sous la forme d'une "symétrie verticale" dans les mouvements. Cette simple distinction plus graphique que géométrique représente l'aspect formel des mouvements tandis que tout ce qui vient casser la symétrie graphique de la représentation est leur part matérielle[52].

De plus, **les mouvements**, bien qu'ils produisent la même sémantique, **ne fonctionnent plus comme des paires** : challenges et défenses ne se répondent plus que rarement comme couple construit autour d'un connecteur. Dans la plupart des cas, le challenge, devenu **?-mouvement**, casse le connecteur logique ciblé, qui n'est plus présent dans la formule requise produite. **Une requête** n'est pas exactement la même chose qu'une formule questionnée. Par exemple, le **?-mouvement** sur un $\wedge$ comme $A \wedge B$ casse le connecteur et produit seulement une des deux sous-formules dans la cellule des formules requises. Dans ce cas, il est impossible qu'un connecteur présent dans les formules requises soit le $\wedge$ original. Aussi est-il impensable d'appeler l'acte de satisfaire une requête une "défense d'un connecteur", ledit connecteur n'étant déjà plus présent ! Le !-mouvement qui satisfera la requête produite par ? sera le plus souvent l'assertion d'une formule, complexe ou atomique.

Pourtant, dans certains cas, quand un choix doit être fait par le joueur auquel on fait la requête, la formule requise conserve son connecteur. Dans ces cas-là, c'est le !-mouvement qui cassera le connecteur. Par exemple, nous verrons que le challenge sur la disjonction ne casse pas le $\vee$; mais la formule complète est mise dans la cellule de la requête, entre parenthèses[53]. Dans ce cas, les défenses ne sont plus des assertions

[51] Avec l'usage du joueur $X$ et $Y$, avec $X \neq Y$.

[52] Le "matériel" étant composé principalement par les formules atomiques et dans le cas de la logique intuitionniste, par le marqueur d'aggro.

[53] Ceci afin de ne pas confondre une disjonction sous le coup d'un ? et la disjonction requise comme une formule complexe.

sèches mais des !-mouvements avec les connecteurs correspondants[54]. Ces derniers sont activables par la présence du bon connecteur dans les cellules des formules requises.

### 2.3.2 Mouvement : Le choix du rang de répétition

Nous commençons l'exposition des mouvements par celui appelé "choix du rang de répétition", écrit $!r_O$ pour l'opposant et $!r_P$ pour le proposant

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!r_O} \begin{pmatrix} \alpha & \beta, r = n \\ \gamma, r = n' & \delta \end{pmatrix}$$

avec $\beta$ et $\gamma$ qui contiennent uniquement des formules indexées et aucun rang de répétition, et $n$ et $n'$ sont des entiers choisis par l'opposant[55].

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!r_P} \begin{pmatrix} \alpha, r = n & \beta \\ \gamma & \delta, r = n' \end{pmatrix}$$

avec $\beta$ et $\gamma$ qui contiennent uniquement des formules indexées et aucun rang de répétition, et $n$ et $n'$ des entiers choisis par le proposant.

La position des différents rangs de répétition peut sembler étrange; pourquoi le choix sur les ?-mouvements du proposant se trouve chez l'opposant ? (et réciproquement) ... Ce choix semblera "naturel" si on garde à l'esprit que le ?-mouvement dont on limite la répétition vise les formules stockées chez l'autre joueur, il convient de placer la limite à la source[56]. Le joueur parie sur une limitation de ses propres mouvements.

L'opportunité pour choisir un rang de répétition est couverte par une nouvelle règle structurelle :

**Choix du rang de répétition : (RS6)**: Le joueur $X$ doit jouer $!r_X$ si et seulement si $S_X$ ou $R_X$ ne contient pas de rang de répétition (avec $X = P$ ou $X = O$).

Cette règle suffit à assurer que le jeu commence bien avec le choix du rang de répétition.

### 2.3.3 Impact du rang de répétition sur les mouvements

Le système du rang de répétition limite le nombre d'utilisation des formules. Le ?-mouvement (ou !-mouvement) ne fait pas disparaître la formule défiée ou requise, mais ajoute 1 à l'indice. Quand l'indice de la formule atteint le rang de répétition,

---

[54] Ces !-mouvements sont toutefois des sortes d'assertations, mais avec un choix.

[55] On choisit les deux rangs à la fois. On pourrait séparer ces deux opérations, mais ces subtilités n'apportent rien pour notre analyse actuelle, si ce n'est de complexifier les preuves sans gain d'expressivité.

[56] Idem pour les restrictions sur les !-mouvements.

alors la formule est effacée (nous utilisons le mot **nettoyage**) de cette liste. Ainsi $r = 0$ ne signifie pas "pas de répétition" mais "pas d'usage possible"; $r = 1$ signifie "pas de répétition"; $r = 2$ signifie une seule répétition. La question est de fixer le moment où l'on doit vérifier ces indices (le problème du **nettoyage**[57]), question résolue par une règle structurelle supplémentaire.

Techniquement, les rangs choisis n'ont aucun impact sur la définition des mouvements, donc aucun impact sur les règles des particules. Mais ces rangs s'expriment au niveau de la structure par une nouvelle règle :

Règle de limitation de la répétition : (RS6') Si $S_X = \{\alpha, A_m, r = n\}$ (ou $R_X$) et si $m \geq n$, alors assumons que $S_X = \{\alpha, r = n\}$ (ou $R_X$). *(Nous retirons $A_m$ de cette liste.)*

D'un point de vue "algorithmique", cette étape de nettoyage a lieu **après l'application complète du coup**.

Certains cas peuvent interroger, bien qu'entrant dans le même cadre. Par exemple, le challenge sur une implication exige qu'on asserte un nouvel élément: l'"antécédent de l'implication". Nous pouvons nous demander quel est l'indice de la formule assertée ? Est-ce bien 0 ? Le même rang que le conséquent requis ? Nous allons donc discuter brièvement ces cas "problématiques" d'indexation que nous rencontrerons dans les logiques classiques et intuitionnistes[58].

1. Le cas le plus simple est celui d'un mouvement sans assertion nécessaire (tous les ?-mouvements sauf l'implication et la négation). Nous ajoutons 1 à l'indice de la formule-source, puis nous appliquons (RS6') pour "nettoyer". Les nouvelles formules ont pour indice 0. Par exemple, si le rang de répétition est 1, la formule source sera effacée et ne pourra donc plus être utilisée. Si le rang est 2, un autre usage est possible...

2. Pour les mouvements avec assertions, comme le ? sur l'implication ou la négation, ou le ! sur la disjonction : les nouvelles formules produites portent l'indice 0. Toutefois, la difficulté se pose quand le proposant a à dupliquer un usage précédent d'une formule atomique présente dans le stock de l'opposant. La stratégie du *copy-cat* consomme-t-elle ou non ces ressources ? La copie gâche-t-elle l'original ? Ou bien, et c'est la même chose, combien de fois peut-on utiliser une concession faite par l'opposant ? En logique classique ou intuitionniste, le *copy-cat* ne coûte rien[59]. Les formules atomiques ne peuvent pas être attaquées ni utilisées; nous avons juste à nous assurer de leur présence. Elles sont "intemporelles". Mais produites toutefois.

---

[57] Surveillons-nous tout le temps ? Surveillons-nous et nettoyons-nous après un coup ? Organisons-nous une rotation où chaque joueur ne nettoie que ses formules ? Avec un bon montage, on peut réduire encore le poids du niveau structurel. Mais cela nous écarterait encore des méthodes *mainstream*, pour un gain minime.

[58] Nous n'excluons pas que d'autres formes de temporalisation existent dans d'autres logiques, comme par exemple la possibilité de rafraîchir des formules, c'est-à-dire de réduire la valeur d'un index. Mais jusqu'ici, nous n'avons aucune application pour de tels mouvements.

[59] L'utilité des formules atomiques est d'être dupliquable à l'infini. Dès lors, les index sur les formules atomiques ne servent qu'à unifier l'écriture et on peut tout aussi bien l'alléger de cet index inutile. Sou-

3. La simple assertion (sans choix) d'une formule complexe $!f$ ou d'une nouvelle formule atomique $!a$ produit une nouvelle formule avec un index 0. Mais qu'arrive-t-il à la requête initiale, la formule requise, la formule source dans la liste des requêtes ? Naturellement, nous devons appliquer "index + 1" puis vérifier si ce dernier atteint ou non la limite de répétition. Mais nous devons être un peu plus pragmatique et nous demander ce qu'apporte réllement la capacité à ré-asserter une formule complexe ou atomique.

Pour les formules atomiques, cette répétition n'apporte rien puisque nous n'avons rien qui les consume (conséquence du *copycat* gratuit). Dès lors, pour des raisons de simplification, nous allons appliquer un **rasoir spécial** qui va revenir à considérer que les requêtes de formules atomiques ont toujours un maximum d'une 1 répétition possible[60].

Pour les formules complexes, si nous pouvons les asserter plusieurs fois après qu'elles aient été requises une fois, nous offrons artificiellement plusieurs opportunités pour ré-attaquer la formule assertée plusieurs fois. Par exemple, si nous avons un rang de répétition 1 en haut et 2 en bas et si une disjonction est requise, nous pouvons asserter deux fois la même disjonction. Dès lors, même si c'est très artificiel, le joueur donne deux opportunités à l'autre d'attaquer deux instances différentes d'une même disjonction. En termes de stratégie, c'est un mouvement pauvre (mais le plus pauvre des mouvements fut le choix des rangs de répétition). Tant que nous ne considérons pas l'analyse stratégique de ces jeux, nous ne devons pas interdire de tels mouvements pauvres, bien qu'ils n'apportent que des soucis d'organisation.

Nous avons vu l'impact du rang de répétition sur les mouvements. Détaillons ces derniers.

### 2.3.4 Mouvements: Assertions $!f$ et $!a$

L'assertion est le mouvement le plus simple en terme de compréhension, mais sans doute le plus complexe en terme de technicité. Asserter, c'est assumer une formule requise et c'est donc la défense la plus directe face à un challenge (la seule peut-être en logique). "Pouvez-vous vraiment dire $A$ ? – Oui, je le peux. Je dis $A$!" ... Simple. Mais cela pose tout le problème de la formule comme ressource : quand puis-je me permettre d'assumer quelque chose ? Combien coûte une telle assertion ? A ce point, l'analyse logique peut être pensée comme une économie élémentaire de l'information[61] et les choix qui seront faits à ce niveau élémentaire auront des impacts sur tout le système.

venons-nous toutefois que dans d'autres logiques, il se peut qu'on ait à "payer" ces copies.

60 Sémantiquement, nous sommes sous le régime du "qui peut le plus restrictif peut le moins restrictif".

61 **De l'information et pas du sens !**

Premier choix à faire : comment intégrer la "matérialité" des atomes ? La solution classique en dialogique est de l'assumer au niveau de la structure, avec la fameuse règle **(RS5)**, qui fait la différence entre jeux formels et matériels. Nous chercherons à transférer cette charge au niveau des particules, dans leur fonctionnement même.

Cela n'est pas gratuit : nous y perdons la symétrie entre l'opposant et le proposant. Nous devons aussi faire un second choix sur l'expression de cette asymétrie :

1. Comme la règle formelle n'affecte que les formules atomiques, nous pouvons séparer l'assertion en deux cas : l'assertion des formules atomiques, celle des formules complexes. Nous appelons cette solution **la forme étendue de l'assertion**. Le coût : 2 mouvements différents pour l'assertion. Le gain : un maximum de symétrie et une notation plus homogène.

2. Seconde solution, nous pouvons considérer les formules atomiques comme un cas spécial de formules et traiter cette condition additionnelle comme un "cas à part". Nous appelons cette solution la **forme compacte de l'assertion**. Le coût : utiliser un dispositif syntaxique additionnel pour marquer les cas spéciaux et perte de symétrie maximale. Le gain : on évite la prolifération des mouvements.

La première solution est plus propre mais aussi plus expansive, la seconde plus courte mais plus complexe. Nous proposons les deux notations : nous choisirons la première solution dans le cas d'assertions "simples", la seconde pour les assertions "complexes"[62].

Second problème : la duplication consomme-t-elle ou non de la ressource ? Notre réponse est toujours la même : elle n'en consomme pas mais il se peut que cela soit différent dans une autre logique. Le choix a un impact au niveau de ce mouvement : la réponse est traduite en terme d'un changement ou l'absence de changement d'indice de la formule atomique copiée. Pas de consommation de ressources signifie qu'il n'y a pas de changement d'indice.

**Règles pour le proposant : forme étendue**

*Assertion de la formule complexe C:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta, C_n \end{pmatrix} \xrightarrow{!f_P} \begin{pmatrix} \alpha & C_0, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

*Assertion d'une formule atomique A:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A_m & \beta \\ \gamma & \delta, A_n \end{pmatrix} \xrightarrow{!\,a_P} \begin{pmatrix} \alpha, A_m & A_0, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

[62] Quand le proposant attaque une implication, il doit asserter l'antécédent. Si nous la traitons selon le premier choix, nous sommes obligés de créer deux ?-mouvements différents, ce qui est un peu contre-intuitif. La seconde proposition adhère mieux aux habitudes.

Les indices sur les formules atomiques sont "sur-informatifs". On peut soit les supprimer pour clarifier l'écriture, soit les conserver pour l'unifier.

**Règles pour l'opposant : forme étendue**

*Assertion d'une formule complexe C:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma, C_n & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!f_O} \begin{pmatrix} \alpha, C_0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

*Assertion d'une formule atomique:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma, A_n & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\,a_O} \begin{pmatrix} \alpha, A_0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

L'opposant n'a aucune contrainte sur l'usage des formules atomiques : les deux formes coïncident.

**Règle pour le proposant : forme compacte**

*Assertion:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, F^*_m & \beta \\ \gamma & \delta, F_n \end{pmatrix} \xrightarrow{!f_P} \begin{pmatrix} \alpha, F^*_m & F_0, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

L'étoile * a deux significations. Dans la matrice-source, cette étoile signifie "si $F$ est une formule atomique, vérifiez que $F$ est dans la liste des formules présente dans la cellule où se trouve $F$*". C'est la traduction syntaxique de la matérialité. Dans la matrice résultante, cela indique juste ce qui arrive à la condition additionnelle : elle reste inchangée.

**Règle pour l'opposant : forme compacte**

*Assertion:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma, F_n & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!f_O} \begin{pmatrix} \alpha, F_0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

**2.3.5 Mouvement :** Disjonction $\vee$

La disjonction prend la forme très simple suivante : un ?-mouvement et deux !-mouvements pour défendre, qui correspondent au choix à faire entre les deux assertions qui forment l'alternative de la disjonction[63]. La présence d'une assertion explique la présence du * dans les formulations du mouvement, respectant ainsi la

[63] Le schéma de la défense est donc "choix + assertion", une assertion complexe donc.

convention précédente sur les formes compactes. L'étoile rappelle la nécessité de vérifier la présence de la formule atomique correspondante dans le stock de formules de l'opposant.

La seule difficulté provient de l'écriture : il faut éviter de confondre un $A \vee B$ requis comme une formule complexe et un $A \vee B$ qui est sous le coup d'un ?-mouvement et qui attend donc un choix. La solution choisie est l'usage d'un marqueur syntaxique : les parenthèses. Nous décidons donc de mettre les parenthèses sur les disjonctions questionnées et en attente d'un choix, ce qui pourrait paraître contre-intuitif. En effet, si on a en tête que les parenthèses servent à isoler un bloc "devant être traité", le fait d'asserter en une fois une formule complexe semble être plus unitaire syntaxiquement que de faire un choix entre un côté de la disjonction... Mais contre cette intuition pas si intuitive, nous avons fait le choix des moindres parenthèses : pour unifier la notation, nous aurions du mettre des parenthèses sur toutes les formules complexes requises, ce qui aurait fait beaucoup de parenthèses pour une si petite difficulté.

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \vee B_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\vee_P} \begin{pmatrix} \alpha, A \vee B_{n+1} & \beta \\ \gamma, (A \vee B)_0 & \delta \end{pmatrix}$$

*Défense:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A^* & \beta \\ \gamma & (A \vee B)_n, \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee L_P} \begin{pmatrix} \alpha, A^* & A_0, \beta \\ \gamma & (A \vee B)_{n+1}, \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, B^* & \beta \\ \gamma & (A \vee B)_n, \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee R_P} \begin{pmatrix} \alpha, B^* & B_0, \beta \\ \gamma & (A \vee B)_{n+1}, \delta \end{pmatrix}$$

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta, A \vee B_n \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\vee_O} \begin{pmatrix} \alpha & \beta, A \vee B_{n+1} \\ \gamma & \delta, (A \vee B)_0 \end{pmatrix}$$

*Défense:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma, (A \vee B)_n & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee L_O} \begin{pmatrix} \alpha, A_0 & \beta \\ \gamma, (A \vee B)_{n+1} & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & (A \vee B)_n, \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee R_O} \begin{pmatrix} \alpha, B_0 & \beta \\ \gamma, (A \vee B)_{n+1} & \delta \end{pmatrix}$$

**2.3.6 Mouvement :** Conjonction ∧

La relation entre conjonction et disjonction est bien connue : elles sont similaires mais tous les choix y sont inversés. Ainsi, là où le joueur n'avait aucun choix pour la disjonction, c'est-à-dire en jouant le ?-mouvement, il peut désormais choisir quel côté de la conjonction il souhaite requérir. Là où le joueur avait un choix à faire pour la disjonction, le !-mouvement, il n'a plus aucun choix et doit se contenter d'asserter la formule requise par l'autre joueur.

Il y aura donc deux différents ?-mouvements et une défense qui n'est pas un mouvement spécifique, mais qui **coïncide** avec l'assertion. **!**∧ n'existe pas, nous utilisons, selon les cas, !*f* ou !*a*.

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \wedge B_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee L_P} \begin{pmatrix} \alpha, A \wedge B_{n+1} & \beta \\ \gamma, A_0 & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \wedge B_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee R_P} \begin{pmatrix} \alpha, A \wedge B_{n+1} & \beta \\ \gamma, B_0 & \delta \end{pmatrix}$$

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & A \wedge B_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee L_O} \begin{pmatrix} \alpha & A \wedge B_{n+1}, \beta \\ \gamma & A_0, \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & A \wedge B_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee R_O} \begin{pmatrix} \alpha & A \wedge B_{n+1}, \beta \\ \gamma & B_0, \delta \end{pmatrix}$$

**2.3.7 Mouvement :** Implication →

L'implication est un mouvement complexe, où plus d'une formule sont affectées à la fois. Elle fait un plein emploi de la multidimensionnalité des matrices.

En termes plus généraux, pour interroger une implication comme $A \rightarrow B$, le joueur doit assumer l'antécédent pour forcer l'autre joueur à lui donner le conséquent *B*. En langage naturel, cela ressemblerait à cet échange : "Okay, tu as dit "si *A* alors *B*. J'accepte *A*, maintenant montre-moi ton *B*!"

Donc, quand nous traduirons cela dans un ?-mouvement dans nos matrices, nous aurons deux aspects : le joueur entreprenant ce mouvement aura à asserter $A$ bien que $A$ ne soit pas dans les formules requises[64] et l'autre joueur aura à fournir $B$, $B$ qui apparaîtra dans ses formules requises.

Comme précédemment, nous usons de la forme compacte, nous indexons toutes les nouvelles formules 0 et ces nouvelles formules peuvent coexister avec les autres instances des mêmes formules. Une fois de plus, la duplication ne consomme pas la formule atomique copiée.

Il n'y a pas de défense spécifique liée à l'implication, le joueur devant asserter une implication l'asserte comme toute formule complexe : avec $!f$.

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \rightarrow B_n, A^*_m & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\rightarrow P}} \begin{pmatrix} \alpha, A \rightarrow B_{n+1}, A^* \ {}_m A_0, \beta \\ \gamma\beta_0 \quad \delta \end{pmatrix}$$

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & A \rightarrow B_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\rightarrow O}} \begin{pmatrix} \alpha, A_0 & B_{n+1}, \beta \\ \gamma & \beta_0, \delta \end{pmatrix}$$

**2.3.8 Mouvement** : Négation ¬

Le cas de la négation est toujours étrange pour quelqu'un qui n'est pas familier avec la logique. Si une formule représente une information, quelle est la différence entre une information positive et une information négative ? Est-ce seulement un changement de valeurs (comme le suggèrent les booléens) et alors la négation n'est qu'un double de l'assertion et nous n'avons pas besoin de règles spécifiques ? Si une formule représente un fait, qu'est-ce qu'un fait négatif ? En termes de phénoménologie, je peux voir qu'il y a une pomme sur une table mais je ne peux pas voir **ce qui n'est pas** sur une table. Et je ne peux faire aucune différence **purement sensible** entre l'expérience de l'absence d'une citrouille absente et l'expérience de l'absence d'un dinosaure dans cette salle[65]. Les faits négatifs ne s'observent pas directement. Les faits

---

[64] Nous avons les mêmes conditions que pour $!f$ et $!a$, sans nécessité d'avoir $A$ dans les formules requises. Et par conséquent, au niveau de l'écriture, nous devons faire le même choix que pour l'assertion et nous optons une fois encore pour la forme compacte.

[65] Bien que je puisse faire une différence affective et que cette différence affective a un impact sur ma perception, j'en conviens.

négatifs appartiennent au domaine des constructions langagières, dans le langage, par le langage et cela est important : ces faits négatifs sont construits indépendamment de l'idée de "valeurs de vérité".

Alors, comment sont-ils construits en termes d'intéractions dialectiques ?

Comment puis-je prouver à quelqu'un qu'il assume une proposition qu'il ne devrait pas assumer ? Naturellement, si cette proposition est complexe, une phrase complexe, je peux essayer de démêler cette complexité en développant les formules en posant des questions pertinentes. Mais comment dois-je me comporter dans le cas d'une négation sur une formule atomique, sur du "matériel" atomique[66] ? Je ne peux pas lui demander de me montrer un "contenu interne du fait négatif", nous n'avons pas un tel contenu. La solution est d'assumer soi-même le contenu nié. Si l'un dit "**Nul** ne peut assumer *A*", le seul comportement acceptable réside dans ce challenge dur à comprendre : "**Moi**, joueur un tel, j'assume *A*"[67].

Et il n'y a pas de réponse alors. Celui qui tenait la négation doit espérer que l'autre n'arrivera pas à assumer toutes les conséquences de son défi.

Comme nous le voyons, le challenge sur la négation contient une assertion, il suit donc les mêmes choix faits sur celles-ci.

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, \neg A_n, A^*_m & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\to P}} \begin{pmatrix} \alpha, \neg A_{n+1}, A^*_m & A_0, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \neg A_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\to O}} \begin{pmatrix} \alpha, A_0 & \neg A_{n+1}, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

**2.3.9 Mouvement :** Quantificateurs ∃ et ∀

Pour comprendre les quantificateurs, nous devons retourner aux "fonctions propositionnelles". Les fonctions propositionnelles ne sont pas des formules, mais ce sont les artefacts proto-linguistiques utilisés pour expliquer les "formules quantifiées" avant la résolution de la quantification ... Cette résolution, c'est tout simplement la détermination de la variable. C'est une levée d'indétermination. La grande différence entre ∃ et ∀ repose dans la charge de la détermination : qui détermine quoi ...

---

66 Souvenez-vous du petit ajustement de sens sur ce qui est "atomique". "Atomique" signifie qu'il n'y a pas moyen de les questionner.

67 Un changement subtil dans la charge de la matérialité. Anonyme "nul" de la négation, implication personnelle du "Moi" dans le !-mouvement.

Dans l'approche dialogique, nous n'avons plus besoin des fonctions propositionnelles[68]. Les intéractions et le jeu des ? et des ! devront déployer les formules quantifiées et le jeu des charges de la détermination. Nous ferons une approximation pleine de sens si nous pensons le ∀ comme une conjonction massive, un ∧ général sur tout le domaine de définition et le ∃ pour une disjonction massive, un ∨ qui s'étend sur tout le domaine.

Quand un joueur a un ∀ stocké, nous assumons qu'il prétend pouvoir le défendre quelque soit la variable choisie : la levée d'indétermination de la variable échoit alors à l'autre joueur, quand il questionnera cette formule. Pour la formule avec un existenciel ∃, le joueur qui interroge ne peut pas demander à l'autre une variable précise : il doit se satisfaire de ce que le défenseur veut bien lui donner. Nous nous retrouvons donc dans un cas similaire à celui de la disjonction où celui qui répond à la requête doit choisir quelle variable il souhaite donner, dans les limites de ses possibilités.

Nous rencontrons trois difficultés :

1. Nous n'avons pas de définition explicite de domaine. Généralement, nous prenons un domaine infini représenté par les différentes lettres de l'alphabet
2. Bien qu'il y ait des choix différents entre les variables, tous ces différents choix sont regroupés en une seule règle de coup. Ces différents choix peuvent toutefois impliquer des stratégies différentes et il sera peut-être utile de revenir là-dessus..
3. Comme pour la disjonction requise, nous avons un risque de confusion entre l'existenciel requis à titre de formule complexe, et l'existenciel requis suite à un !∃. Il faut éviter les confusions. Comme pour la disjonction, nous décidons de mettre entre parenthèses l'existenciel quand le choix est requis.

Pour des raisons de simplicités, nous écrirons $c_O$ la variable choisie par l'opposant $c_P$ la variable choisie par le proposant.

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha,\ \forall x A(x)_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\forall_P} \begin{pmatrix} \alpha, \forall x A(x)_{n+1} & \beta \\ \gamma,\ A(C_O)_0 & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha,\ \exists x A(x)_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\exists_P} \begin{pmatrix} \alpha, \exists x A(x)_{n+1} & \beta \\ \gamma,\ (\exists x A(C_O))_0 & \delta \end{pmatrix}$$

[68] Comme nous ne construisons pas les formules, mais que nous les "déconstruisons" /explicitons plutôt par le biais de questions adéquates, cet artefact proto-linguistique n'est plus utile.

*Défense:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A(b) & \beta \\ \gamma & \delta, (\exists x A(x))_n \end{pmatrix} \xrightarrow{!\exists_P} \begin{pmatrix} \alpha, A(b) & \beta\, A(b) \\ \gamma & \delta, (\exists x A(x))_{n+1} \end{pmatrix}$$

Si des choix multiples se proposent, c'est-à-dire que le proposant a à sa disposition pour "copier" plusieurs formules dans $S_O$, comme par exemple, $A(b), A(c), A(d)$, nous pourrions avoir à préciser l'écriture de la réponse pour souligner cette multiplicité. Dans ce cas précis, on pourrait écrire A($c_P$) avec $c_P = b$ ou $c_P = c$ ou $c_P = d$.

Pour la défense, si nous avons une formule en $\forall x$ parmi les formules requises, c'est qu'évidemment, elle est requise en tant que formule complexe et non pas comme un challenge : le $\forall x$ étant consumé lors d›une telle requête. Dès lors, on comprend qu›on satisfait à la requête en assertant la formule complexe correspondante.

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \forall x A(x)_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\forall_O} \begin{pmatrix} \alpha & \forall x A(x)_{n+1}, \beta \\ \gamma & A(C_P)_0, \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \exists x A(x)_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\exists_O} \begin{pmatrix} \alpha & \exists x A(x)_{n+1}, \beta \\ \gamma & (\exists x A(x))_0, \delta \end{pmatrix}$$

*Défense:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma, (\exists x A(x))_n & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\exists_O} \begin{pmatrix} \alpha, A(C_P) & \beta \\ \gamma, (\exists x A(x))_{n+1} & \delta \end{pmatrix}$$

**3. La logique classique**

Une fois ces règles de base fixées, les systèmes logiques les plus communs ainsi que les plus complexes qui se construisent à partir de ceux-là deviennent reconnaissables. Commençons par donner les spécificités de la logique classique.

La logique classique s'obtient avec le Système $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}*$.

**3.1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ?**

Cette manière d'écrire consiste tout simplement à fournir sous la forme d'une matrice les rangs de répétition choisis. Ce choix correspond au minimum requis pour capturer la logique classique, comme cela a été mis en lumière par les travaux de Nicolas Clerbout sur les preuves sémantiques avec rang de répétition.

### 3.2 * ?

L'étoile correspond à une variation apportée sur l'implication. En effet, la logique classique dispose d'une propriété, qui peut être décrite comme "lecture de la table de vérité booléenne" et qui peut valoir comme définition de l'implication, à savoir "$A \rightarrow B := \neg A \vee B$" .

Si on compare rigoureusement les dynamiques décrites par les deux formules dans le langage des matrices dialogiques, on s'aperçoit qu'elles ne coïncident pas exactement.

Il y a donc deux choix possibles, qui sont les deux facettes de ce qu'on appelle prosaïquement un **définirème** : soit on prend ce résultat comme un théorème et on prouve l'équivalence des stratégies pour $A \rightarrow B$ **et** $\neg A \vee B$[69], soit à forcer la définition de l'implication pour coïncider syntaxiquement avec la disjonction.

Pour la logique classique, nous choisissons d'implémenter $A \rightarrow B := \neg A \vee B$ directement au niveau de la syntaxe, comme définition de l'implication. C'est cette implication qu'on appelle l'implication étoilée et nous en donnons ici la définition explicite :

$$\begin{pmatrix} \alpha & A \rightarrow B_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\rightarrow^*_O} \begin{pmatrix} \alpha & A \rightarrow B_{n+1}, \beta \\ \gamma & (\neg A \vee B)_0, \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \rightarrow B_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\rightarrow^*_P} \begin{pmatrix} \alpha, A \rightarrow B_{n+1} & \beta \\ \gamma, (\neg A \vee B)_0 & \delta \end{pmatrix}$$

## 4. La logique intuitionniste

### 4.1 Motivations

La logique *intuitionniste* est née de la formalisation d'une position philosophique attribuée à Brouwer, l'*intuitionnisme*, qui refusait comme "non-évidentes" certaines formes de raisonnement mathématique. Cette critique a conduit à refuser toutes les formes d'argumentation qui ne construisent pas explicitement leur objet, c'est-à-dire les raisonnements par l'absurde et les objets mal-construits, c'est-à-dire ceux qui sont juste définis par des propriétés et pas par des procédés de construction. Après l'analyse philosophique, un consensus a émergé pour réduire cela[70] au refus du tiers-exclu, de la double négation et d'une certaine forme d'existenciel...

---

[69] Or, dans cet article, nous présentons la dialogique des matrices sans entrer dans les questions sémantiques.

[70] Techniquement, *constructif* et *intuitionniste* ne sont pas synonymes en termes philosophiques : les intuitions derrière les projets ne sont pas les mêmes et on peut donc prétendre avoir des logiques intuitionnistes non-constructives (hyper marginales) et des logiques constructives non-intuitionnistes. Mais tant que nous restons dans une approche non-spécialisée de ces problèmes, nous pouvons prendre les deux termes comme synonymes.

Le projet de la *logique intuitionniste* a par la suite connu de nombreux développements et de nombreuses interprétations et elle forme aujourd'hui la base de toutes les réflexions un peu élaborées sur la logique. Il était donc impensable d'en faire l'impasse et il nous fallait indiquer quel système de la dialogique des matrices l'implémentait.

### 4.2 La solution de la dialogique ordinaire

La solution usuelle dans la dialogique ordinaire pour interpréter cette logique consiste à la considérer comme une seconde restriction sur les parties légales, restriction qui s'opère en choisissant une version plus restrictive de la règle **RS3c**, à savoir **RS3i** :

**Règle de l'opportunité intuitionniste (RS3i) : X** peut attaquer/questionner n'importe quelle assertion faite par le joueur **Y** ou défendre contre le dernier challenge/ répondre à la dernière question non-répondue de **Y**, *en respectant les règles des particules*.

Cette toute petite règle permet de capturer tous les points précédents et c'est vraiment étonnant !

### 4.3 La solution en termes de matrices dialogiques

Le problème avec l'introduction d'une nouvelle règle structurelle, est que cette règle dite structurelle transforme tous les !-mouvements en mouvements "spéciaux", c'est-à-dire qu'ils tombent désormais sous le coup de ce qu'on appelait une **règle spéciale** : une loi qui dessine un cadre, mais qui en fait, règle le mouvement de l'extérieur, en dehors du niveau des particules ... En effet, **RS3i** ré-introduit le suivi de l›histoire des coups.

Or, le propos de cet article était d'intégrer ces règles spéciales dans les matrices, toutes ces règles. Une nouvelle règle spéciale semble être contre-productif : elle doit être internalisée, sinon tout notre travail n'aura été qu'en pure perte.

Pour intégrer la solution dialogique à l'intérieur de nos matrices et dans la formulation de mouvement, nous choisissons d'introduire syntaxiquement un marqueur appelé le marqueur d'aggro ↓, ou tout simplement, l'**aggro**[71], qui indique quel est le "dernier challenge non-défendu". Alors naturellement, ce n'est pas exactement le "dernier challenge", mais plutôt, la dernière formule produite par un ?-mouvement, ce qui produit les situations de neutralisation d'aggro[72]. Nous avons donc à réécrire tous les mouvements, exception faite du choix de rang de répétition, pour intégrer ce dispositif, suivant les trois idées directrices suivantes :

---

[71] Le terme est issu du monde ludique : l'aggro est le fait qu'un automatisme de l'IA adverse cible un joueur particulier, qui doit alors encaisser "cette mauvaise phase". On dit que ce dernier "prend l'aggro". On l'applique ici pour indiquer où il est urgent de défendre, avec le risque que l'opportunité de défendre ce point ne revienne jamais.

[72] Voir plus bas.

1. L'aggro apparait à côté des formules ou des termes générés par les ?-mouvements. Le petit problème est de choisir quelle formule recevra l'aggro, quand le mouvement génère de multiples formules (comme le challenge sur une implication). Notre choix est alors de toujours privilégier la formule qui apparaît dans les formules requises, c'est-à-dire de conserver l'aggro ouvert et de ne pas le neutraliser.

2. Il ne peut y avoir plus d'un aggro dans la matrice. Le nouveau marqueur efface toujours le précédent.

3. Nous redéfinissons tous les !-mouvements pour intégrer l'aggro dans la matrice-source. S'il y a un marqueur d'aggro dans la matrice, alors la formule "ciblée" dans la matrice-source doit l'avoir (implicitement l'aggro ne doit pas être sur une autre formule que celle "ciblée").

### 4.4 Règles ré-implementées

#### 4.4.1 Assertion

**Règle pour le proposant : Forme compacte**

*Assertion d'une formule:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, F_m^* & \beta \\ \gamma & \delta, F_n \downarrow^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{!f_P} \begin{pmatrix} \alpha, F_m^* & F_0, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

L'étoile * a deux significations. Dans la matrice-source, cette étoile signifie "si $F$ est une formule atomique, vous devez vérifier que $F$ est dans la liste des formules présente dans la cellule où se trouve $F^*$". C'est la traduction syntaxique de la formalité. Dans la matrice résultante, cela indique juste ce qui arrive à la condition additionnelle. Nous ne voyons qu'une chose ici : qu'elle reste inchangée.

Le $^2$ indique le fonctionnement de ↓. Le cas le plus simple est si vous avez l'aggro sur la formule que vous souhaitez asserter : cela ne change rien. Si l'aggro est sur une autre formule, vous ne pouvez pas faire ce mouvement. Mais il y a un troisième cas plus difficile à représenter élégamment : quand il n'y a pas d'aggro. Dans ce cas, vous pouvez faire l'assertion[73].

Donnons l'écriture propre et complète de ces deux points une bonne fois pour toute[74] :

Le mouvement $!f_P$ est réalisable si et seulement si

1. *(*-rappel)* Si $F$ est une formule atomique, alors il y a $F_m$ dans $S_O$ (où $m$ peut être n'importe quel entier naturel).

2. *et (2-rappel)*

---

[73] Ce cas se produit par exemple dans le Modus Ponens.

[74] On se contentera de rappels par la suite.

(a) $F$ dans $R_O$ porte l'aggro.

(b) *ou* il n'y a pas de formule avec l'aggro dans aucune des cellules de la matrice.

**Règle pour l'opposant : Forme compacte**

*Assertion de formule:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma, F_n \downarrow^2 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!f_0} \begin{pmatrix} \alpha, F_0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Où $^2$ indique que la formule doit porter l'aggro, ou bien qu'aucune autre formule dans la matrice ne porte l'aggro.

**4.4.2 Disjonction**

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \vee B_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\vee_P} \begin{pmatrix} \alpha, A \vee B_{n+1} & \beta \\ \gamma, (A \vee B)_0 \downarrow & \delta \end{pmatrix}$$

*Défense:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A^* & \beta \\ \gamma & (A \vee B)_n \downarrow^2, \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee L_P} \begin{pmatrix} \alpha, A^* & A_0, \beta \\ \gamma & (A \vee B)_{n+1} \downarrow, \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, B^* & \beta \\ \gamma & (A \vee B)_n \downarrow^2, \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee R_P} \begin{pmatrix} \alpha, B^* & B_0, \beta \\ \gamma & (A \vee B)_{n+1} \downarrow, \delta \end{pmatrix}$$

Souvenez-vous que le nombre d'usages n'a pas de pertinence pour les formules atomiques. Si vous êtes à l'aise avec cela et cette notation, vous pouvez simplifier en leur retirant l'indice.

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta, A \vee B_n \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\vee_O} \begin{pmatrix} \alpha & \beta, A \vee B_{n+1} \\ \gamma & \delta, (A \vee B)_0 \downarrow \end{pmatrix}$$

*Défense:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma, (A \vee B)_n \downarrow^2 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee L_0} \begin{pmatrix} \alpha, A_0 & \beta \\ \gamma, (A \vee B)_{n+1} \downarrow & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & (A \vee B)_n \downarrow^2, \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{!\vee R_O} \begin{pmatrix} \alpha, B_0, & \beta \\ \gamma, (A \vee B)_{n+1} \downarrow & \delta \end{pmatrix}$$

Le $^2$ indique que la formule doit porter l'aggro, ou bien qu'aucune autre formule dans la matrice ne porte l'aggro. Si après le !-mouvement, la formule ciblée avec l'aggro atteint le maximum de répétition et par là, est nettoyée, l'aggro est nettoyé en même temps, la matrice se retrouve sans marqueur d'aggro et **cela n'est pas un problème**.

### 4.4.3 Conjonction

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \wedge B_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\wedge L_P} \begin{pmatrix} \alpha, A \wedge B_{n+1} & \beta \\ \gamma, A_0 \downarrow & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \wedge B_n & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\wedge R_P} \begin{pmatrix} \alpha A \wedge B_{n+1} & \beta \\ \gamma, B_0 \downarrow & \delta \end{pmatrix}$$

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & A \wedge B_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\wedge L_O} \begin{pmatrix} \alpha & A \wedge B_{n+1}, \beta \\ \gamma & A_0 \downarrow, \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & A \wedge B_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?\wedge R_O} \begin{pmatrix} \alpha & A \wedge B_{n+1}, \beta \\ \gamma & B_0 \downarrow, \delta \end{pmatrix}$$

#### 4.4.4 Implication

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, A \to B_n, A^*_m & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\to P}} \begin{pmatrix} \alpha, A \to B_{n+1}, A^*_m & A_0, \beta \\ \gamma, B_0 \downarrow & \delta \end{pmatrix}$$

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & A \to B_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\to O}} \begin{pmatrix} \alpha, A_0 & B_{n+1}, \beta \\ \gamma & B_0 \downarrow, \delta \end{pmatrix}$$

#### 4.4.5 Négation

**Règles pour le proposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha, \neg A_n, A^*_m & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\neg P}} \begin{pmatrix} \alpha, \neg A_{n+1}, A^*_m & A_0 \downarrow, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

**Règles pour l'opposant**

*Challenge:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \neg A_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\neg O}} \begin{pmatrix} \alpha, A_0 \downarrow & \neg A_{n+1}, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

### 4.5 Point philosophique : l'aggro

Le marqueur d'aggro est présenté comme un pur artefact syntaxique; et c'est ainsi qu'il vaut mieux le présenter d'abord. Toutefois, si nous pensons que les rapports syntaxique/sémantique méritent d'être réexaminés, nous ne devrions peut-être pas nous précipiter pour trop vite et trop mal comprendre cet aggro. C'est certainement un élément syntaxique dans la mesure où il entre dans la composition des formules mises dans les matrices, mais peut-on vraiment le comparer à un terme, un connecteur ou même un indice de répétition ?

De tous ces éléments cités, c'est à l'indice de répétition que l'aggro ressemble le plus, en ce sens qu'il partage ce rôle d'exprimer à l'échelle locale la composante "structurelle" (structurante ?) d'une **règle spéciale**.

Toutefois, là où l'aggro diffère du rang de répétition, c'est qu'on ne peut pas le penser comme une manière de transformer en ressource les formules. L'aggro, au contraire, indique juste quand une ressource est menacée : il faut la défendre le plus vite possible sinon le joueur risque d'en perdre l'opportunité. Or, dans un jeu où la victoire et la défaite dépendent de la possibilité de garder des coups à jouer, en perdre un n'est jamais un sacrifice à faire à la légère !

De plus, autre différence, l'aggro ne supprime jamais une formule en la "nettoyant". Si l'on parvient à se débarasser de l'aggro, on peut revenir sur des formules laissées de côté[75]. En un sens, il ressemble plus au "service" au volley-ball, mais en inversé. Au volley-ball, on ne peut marquer des points que si on a le service; en dialogique des matrices intuitionnistes, mettre l'adversaire sous l'aggro représente une forme d'avantage[76]; mais une forme dynamique de l'avantage[77].

Intéressons nous à quelques usages particuliers de ce marqueur.

#### 4.5.1 La négation intuitionniste neutralise l'aggro

Dans les travaux préliminaires sur la négation intuitionniste, nous nous sommes interrogés sur la notion de "négation comme changement de rôles", en testant différentes manières d'implémenter une telle notion dans les matrices. Cela nous a fait expérimenter des manipulations de matrices plus ou moins douteuses, qui ne restituaient jamais le sens recherché. Toutefois, l'introduction de l'"aggro" nous a permis de mettre en évidence un fonctionnement original de la négation intuitionniste.

Le challenge sur la négation n'appelle pas de réponse, puisqu'il consiste tout simplement à asserter la proposition niée. Toutefois, une assertion simple de la proposition niée (c'est-à-dire qui suivrait la règle de l'assertion $!f$ ou même $!a$) devrait être, pour l'opposant :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \neg A_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\neg O}} \begin{pmatrix} \alpha, A_0 & \neg A_{n+1}, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Nous avons autre chose dans nos matrices, à savoir que la valeur de défi/challenge (c'est-à-dire le fait que c'est bien un ?-mouvement) est capturée par la modification de l'aggro, et donc la présence du ↓:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \neg A_n, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{?_{\neg O}} \begin{pmatrix} \alpha, A_0\downarrow & \neg A_{n+1}, \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Or, cet aggro est bien particulier, car aucun coup "ne défend" les formules stockées; elles ne sont pas requises. On appelle un marqueur aggro localisé dans

---

[75] Exemple : modus ponens intuitionniste.

[76] Attention : il ne faut pas en conclure que celui qui est sous l'aggro perd forcément. Un avantage, ce n'est pas une victoire ! Exemple : double négation du tiers exclu. De plus, on peut gagner sur une neutralisation de l'aggro...

[77] C'est-à-dire, pour employer un terme que j'aime utiliser par ailleurs, c'est peut-être le premier marqueur possèdant une dimension **tactique** que nous employons en logique.

les stocks de formules un **aggro neutralisé**. La conséquence directe d'un aggro neutralisé est donc qu'il bloque tous les mouvements de type "défense"[78] : la partie ne peut continuer que si le joueur dont c'est le tour propose un nouveau challenge et c'est en ce sens qu'on peut comprendre la tentation d'interpréter cette négation comme l'ouverture d'un "sous-dialogue"[79]. En effet, cet impératif de relancer un nouveau défi "fait penser" à la situation initiale, où l'opposant doit proposer un challenge, doit questionner la thèse.

Or, les "sous-dialogues" ne correspondent pas du tout au projet qui anime la dialogique des matrices. Il serait donc intéressant de se demander si toutes les situations en dialogique classique qui s'interprétent en ayant recours aux sous-dialogues, ne correspondent pas d'une manière ou d'une autre à des situations de neutralisation d'aggro (ou de marqueurs similaires).

### 4.5.2 La "contre-attaque" comme changement d'aggro

Le terme "contre-attaque" est employé officieusement dans le vocabulaire de la dialogique pour désigner un challenge émis par un joueur qui ne prend pas la peine de répondre ou qui ne peut pas répondre au challenge de son adversaire. Bien que le terme appartienne au jargon de la dialogique, il n'englobe précisément aucune notion spécifique et appartient à tout un vocabulaire hérité d'intuitions linguistiques.

L'introduction de la notion d'aggro pourrait permettre peut-être d'affiner ces intuitions et de donner un sens précis à ce terme jusqu'ici flou. En effet, si tous les challenges produisent un nouveau marqueur d'aggro en vertu du fait que chaque challenge devient automatiquement le "dernier challenge non défendu", l'opération de nettoyage de l'ancien marqueur d'aggro peut effacer ou ne pas effacer l'ancien marqueur, en fonction de la présence ou de l'absence de celui-ci. Par exemple, à l'ouverture de la partie, quand l'opposant doit commencer à attaquer la thèse du proposant, il n'y a pas encore de marqueur d'aggro. Le premier challenge n'efface donc pas ce marqueur. De même, il se peut que la formule requise portant l'aggro soit "défendue suffisamment de fois", si bien qu'elle se fait nettoyer par le biais du rang de répétition, et que la partie continue sur un nouveau challenge.

L'idée serait donc de réserver le terme de **contre-attaque** pour les cas où le challenge proposé par le joueur fait basculer l'aggro de ses formules requises aux formules requises de l'autre joueur. On exclut de la sorte de la définition de la contre-attaque les situations où il n'y a pas de marqueurs d'aggro et celles où l'aggro se fait neutraliser. Nous pensons saisir mieux les intuitions cachées dans le terme de contre-attaque[80].

---

[78] Un aggro neutralisé est donc différent d'un aggro nettoyé, suite à la disparition de la formule qui porte l'aggro. Dans ce second cas, les challenges et les défenses restent libres.

[79] Un nouveau dialogue, qui conserverait le contexte.

[80] Reste à déterminer si cette précision de vocabulaire peut être fructueuse.

## 5. Gains philosophiques

### 5.1 Economie de mémoire

Ceux qui ne sont pas habitués à manier les mémoires en informatique ne comprennent pas de suite où est le fameux gain de mémoire que nous évoquions au début de cet article. En effet, les matrices semblent plus complexes que les formules, si bien qu'à disposer face à face l'écriture d'une partie de dialogique ordinaire et une partie de dialogique des matrices, la plus simple semble bien être la première.

Toutefois, la simplicité de l'écriture sur une feuille de papier n'est pas un bon critère pour évaluer l'utilisation d'une mémoire : la feuille de papier n'embrasse pas tous les phénomènes dynamiques d'une vraie gestion de mémoire. Le grand avantage de la dialogique des matrices, c'est que **la nouvelle position écrase la précédente**, alors que la dialogique ordinaire accumule une histoire. Cette action d'écraser ainsi que le nettoyage des formules utilisées libèrent de la mémoire lors de la dynamique de la partie, tandis que la dialogique ordinaire accumule sans cesse de nouvelles formules, consommant ainsi toujours plus de ressources.

De plus, une grande qualité des positions est d'être *self-contained* ou *monadique*: on peut composer directement deux séries de mouvements tant que la position à l'interface est la même[81].

### 5.2 Réaffirmation de la séparation entre le niveau des particules et le niveau structurel

Le revers de la médaille toutefois se situe au niveau des preuves sémantiques de complétude et de robustesse. En effet, si on s'appuie sur les travaux déjà effectués par Nicolas Clerbout, nous prouvons la complétude et la robustesse de la dialogique des matrices en prouvant que les deux théories décrivent les mêmes formes extensives. Toutefois, là où le bât blesse, c'est que pour ce faire, nous sommes contraints de réintroduire une forme statique et historisante : l'arbre de toutes les parties possibles. Nous sommes obligés de retourner sur nos pas et de défaire notre travail[82]...

**Paradoxalement, on peut s'en réjouir :** cela confirme que notre volonté de fournir une formulation extrême pour le dynamisme et l'approche hyper-interne se heurte aux limites que nous cherchions à éprouver, à savoir la sémantique. Histoire, sémantique, structure confirment donc leur intrication[83].

Cependant, rien ne nous force à nous appuyer sur la preuve de Nicolas Clerbout: peut-être pourrait-on concevoir une autre preuve, qui conserverait les propriétés

---

[81] Alors que dans la dialogique ordinaire, une telle composition est impossible, puisque les "histoires" de chaque série de coups peuvent être incompatibles. Si un dialogue partiel va de la formule A à la formule B, et un autre dialogue partiel va de B à C, on ne peut pas déduire qu'il existe un dialogue (partiel ou non) qui va de A à C.}

[82] Ces preuves existent mais sont trop laborieuses par rapport à ce qu'elles apprennent.

[83] Ce n'est pas qu'un artifice de construction ou une interprétation philosophique, c'est une limite technique qui nous rattrape quand on s'efforce de la dépasser.

intéressantes de la dialogique des matrices ? C'est en tout cas le sens de nos recherches actuelles, et nous avons bon espoir de tirer quelques résultats d'une nouvelle catégorie d'objets : les objets tactiques ...

## References

[1] CLERBOUT, Nicolas (2013) : *Etude sur quelques sémantiques dialogiques. Concepts fonda- mentaux et éléments de métathéorie*, PhD thesis, Lille/leiden, Universities of Lille 3 and Leiden.

[2] CLERBOUT, Nicolas (2013) : "First-order dialogical games and Tableaux" dans *Journal of Philosophical Logic*, Online first publication - DOI : 10.1007/ s10992-013-9289-z.

[3] EUSTACHE, Francis, & alia (2014) : *Mémoire et Oubli*, Editions Le Pommier, Observatoire B2V des Mémoires.

[4] HYLAND, Martin (1997) : "Games semantics" dans *Semantics of logic and computation*, A.M Pitts & P. Dybjer (éditeurs), Newton Institute, Cambridge University Press, pp131-184.

[5] RAHMAN, Shahid et KEIFF, Laurent (2010) : "La Dialectique entre logique et rhétorique" dans *Revue de métaphysique et de morale*, 66:2, pp 149-178.

[6] REDMOND, Juan et Fontaine, Mathieu (2011) : *How to play dialogues : an introduction to dialogical logic*, London College Publications.

[7] SCHRÖDER-HEISTER (2008) : "Lorenzen's operative justification of intuitionistic logic" dans *One Hundred Years of intuitionnism* (1907-2007), van Attem, M & alii (éditeurs), Basel : Birkhäuser, pp.214-240.