LA ESTIMACIÓN DIARIA DE LA PRIMA DE RIESGO DE LA VOLATILIDAD

Gabriele Fiorentini; Angel León
Universidad de Alicante
Gonzalo Rubio
Universidad del País Vasco

RESUMEN

Este trabajo analiza el modelo de valoración de opciones con volatilidad estocástica propuesto por Heston (1993). Estimamos los parámetros del proceso de varianza estocástica que propone el modelo mediante la técnica de inferencia indirecta y la volatilidad diaria mediante una aproximación al proceso de varianza estocástica de Heston basada en un Nagarch(1,1). Esto nos permite estimar diariamente la prima de riesgo de la volatilidad implícita en los precios de las opciones. La prima de riesgo de la volatilidad resulta negativa por lo que los agentes parecen haber pagado (en lugar de requerir) una prima positiva por el riesgo asociado a la volatilidad. También se observa que durante nuestro período muestral el modelo de Black-Scholes tiende a infravalorar los precios de mercado de las opciones y el modelo de Heston infravalora las opciones en dinero y dentro de dinero, mientras que tiende a sobrevalorar las opciones fuera de dinero.
Agradecemos los comentarios de Eduardo Schwartz, Enrique Sentana, Ignacio Peña, Gregorio Serna, Rafael Salinas, José Luis Fernández, Eliseo Navarro, Alejandro Balbás y Rafael Santamaría. Gabriele Fiorentini y Gonzalo Rubio reconocen la ayuda financiera concedida por la Dirección Interministerial Científica y Técnica (DGICYT) a través de los proyectos PB96-0339 y PB97-0621 respectivamente. Los tres autores se han beneficiado asimismo de la ayuda a la investigación recibida del Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas (IVIE). El contenido del trabajo es de responsabilidad exclusiva de sus autores.

1. INTRODUCCIÓN

La idea fundamental que persiguen los contrastes empíricos de los modelos de valoración de opciones es analizar si la verdadera distribución del activo subyacente coincide con la distribución supuesta por el correspondiente modelo de valoración de opciones.

Sabemos que bajo el supuesto geométrico Browniano de la fórmula de Black-Scholes (1973) (BS a partir de ahora), todas las opciones sobre el mismo subyacente con la misma fecha de vencimiento pero distinto precio de ejercicio deberían tener la misma volatilidad implícita. Sin embargo, también sabemos que el patrón de volatilidades implícitas que recibe el nombre de "sonrisa de volatilidad" sugiere que la fórmula de BS tiende a valorar incorrectamente opciones muy fuera de dinero y opciones muy dentro de dinero[1].

Existen varios intentos de corregir el aparente fracaso del modelo de BS. En principio, como explican Das y Sundaram (1998), la existencia de la sonrisa puede ser atribuida a la presencia de un exceso de curtosis en la distribución de los rendimientos del subyacente. Es evidente que el exceso de curtosis hace que las observaciones más extremas tengan una mayor probabilidad de ocurrencia que bajo el movimiento Browniano supuesto por BS. Esta característica hace aumentar el valor de las opciones fuera y dentro de dinero en relación al valor de las opciones en dinero de forma que aparezca la sonrisa. Por otra parte, el patrón de mueca que tiende a encontrarse en el mercado norteamericano y en el mercado español tanto en 1997 como en 1998, sugiere que la asimetría de la distribución del subyacente acentúa un lado de dicha sonrisa[2].

---

[1] La denominada sonrisa de volatilidad aparece con mucha claridad después de la crisis bursátil de octubre de 1987. De hecho, como apuntan entre otros Rubinstein (1994), Aït-Sahalia y Lo (1997) y Dumas, Fleming and Whaley (1998), las volatilidades implícitas de las opciones sobre el índice S&P 500 disminuyen monótonamente al aumentar el precio de ejercicio en relación al nivel del subyacente. Así, este patrón deberíamos llamarlo más bien "mueca de volatilidad". La evidencia de las opciones sobre divisas es mucho más clara en cuanto a un auténtico patrón de sonrisa de volatilidad; véase Taylor y Xu (1994). Evidencia empírica sobre la sonrisa de volatilidad en el mercado de opciones sobre el IBEX-35 puede encontrarse en Peña, Rubio y Serna (1998) y Fiorentini, León y Rubio (1998).

[2] Un anális exclusivamente teórico de la sonrisa de volatilidad bajo un modelo de valoración de opciones con volatilidad estocástica puede encontarse en León y Rubio (1999).

Dados estos patrones de volatilidad, la literatura reciente de valoración de opciones ha propuesto modelos que incorporan la posibilidad de tener tanto curtosis como asimetría en la distribución del subyacente. Así, los modelos de difusión con saltos estocásticos y los modelos de volatilidad estocástica se han convertido en los modelos claves para la moderna valoración de opciones[3].

En este trabajo nos centraremos en el contexto de la volatilidad estocástica. Un modelo con volatilidad estocástica que no admita además saltos estocásticos parecería tener limitada su capacidad para incorporar la suficiente curtosis y poder explicar, por tanto, los patrones de sonrisa de volatilidad observados. Sin embargo, dado que trabajaremos con opciones sobre el IBEX-35 donde el supuesto de ausencia de saltos estocásticos parece más apropiado que en activos alternativos como divisas y recordando la evidencia presentada por Bakshi, Cao and Chen (1997) en favor del modelo de volatilidad estocástica en relación al modelo con saltos estocásticos al menos en términos de cobertura, nuestra decisión parece oportuna.

El marco de trabajo bajo volatilidad estocástica fue propuesto en primer lugar por Hull y White (1987). Cuando la volatilidad es estocástica pero no está correlacionada con el activo subyacente, estos autores muestran que el precio de una opción europea es el precio de BS integrado sobre la distribución de probabilidad de la variance promedio durante la vida de la opción[4]. Sin embargo, este contexto a diferencia del marco de trabajo tradicional de BS, requiere introducir en el modelo el precio del riesgo de la volatilidad. En otras palabras, con volatilidad estocástica se introduce un segundo factor de riesgo al permitir que el Wiener asociado al precio del subyacente sea diferente del Wiener asociado a la volatilidad. Así, la opción debe satisfacer una ecuación diferencial estocástica bivariante. Como el riesgo de volatilidad, que juega el papel de un segundo factor de riesgo, no puede cubrirse mediante los activos existentes, las técnicas habituales de valoración no resultan válidas. Debemos complementarlas con razonamientos de equilibrio donde introduzcamos exógenamente el precio del riesgo de la volatilidad.

Avances teóricos recientes incluyen los trabajos de Stein y Stein (1991), Heston (1993), y Bates (1996). En particular, Heston (1993) muestra que una fórmula cerrada de valoración de opciones europeas puede derivarse como una integral de la densidad del precio futuro del activo subyacente que, a su vez, puede calcularse como una transformación inversa de Fourier. Este método puede incluso utilizarse cuando se permite la correlación entre los incrementos de los Wiener que trasmiten las características estocásticas al precio del subyacente y a la volatilidad. Así, mientras que Hull and White (1987) es sólo una aproximación, los métodos basados en la metodología de inversión de Fourier son más precisos, aunque sin duda complejos en cuanto a su estimación empírica[5].

En este artículo nos centraremos en el modelo de valoración de opciones europeas de Heston. Este modelo nos permite enfrentarnos directamente con la estimación de la prima de riesgo de la volatilidad. Dicha prima aparece de forma explícita en los supuestos que Heston incorpora sobre el comportamiento de la varianza estocástica. Así, la estimación de la prima de riesgo de la volatilidad resulta factible aunque, sin duda, compleja.

Al menos que nosotros sepamos sólo existe un trabajo previo al nuestro que estima la prima de riesgo de la volatilidad. El trabajo de Guo (1998) presenta sin embargo una metodología que sólo le permite estimar la prima de riesgo de volatilidad promedio durante largos períodos de tiempo. Además, se ve obligado a suponer que la varianza a largo plazo que introduce el modelo de Heston coincide con la varianza muestral estimada durante el período analizado. A diferencia de Guo, nosotros estimamos la prima de riesgo de volatilidad día a día lo que nos facilita sacar conclusiones sobre su evolución temporal en el corto plazo, así como obtener evidencia sobre su variabilidad día a día.

Esta diferencia en cuanto a la capacidad de estimación que tiene nuestro trabajo respecto al presentado por Guo (1998) puede tener implicaciones importantes. Si necesitamos un marco temporal de

---

[3] Alternativamente, Corrado y Su (1996), y Backus, Foresi, Li y Wu (1997) adoptan la expansión en series de Gram-Charlier para una función de densidad normal de forma que obtienen unos términos de ajuste a la fórmula de BS que les permite corregir por la curtosis y asimetría de la distribución del subyacente. Eberlein, Keller and Prause (1998) proponen una densidad hiperbólica con el mismo objetivo y son capaces de obtener una fórmula cerrada de valoración de opciones. Rosenberg (1998) sugiere la denominada función de densidad flexible para estimar las densidades neutrales al riesgo implícitas en los precios de las opciones.

[4] Un enfoque relacionado (aunque no estocástico) que permite a la volatilidad depender funcionalmente del precio del subyacente es el denominado modelo de elasticidad constante de la varianza de Cox y Ross (1976).

[5] En la literatura reciente también se han propuesto los árboles binomiales implícitos como una forma de reconocer la evidencia de volatilidad no constante en la valoración de opciones. Así, tenemos los trabajos de Rubinstein (1994), Jackwerth y Rubinstein (1996) y Jackwerth (1996), y una serie de trabajos muy relacionados de Derman y Kani (1994), Dupire (1994), Chriss (1995), Derman, Kani, y Chriss (1996).

trabajo para estimar el modelo de valoración de opciones con volatilidad estocástica[6], será necesario disponer de estimaciones diarias de la prima de riesgo de la volatilidad. Dicha prima de riesgo podría tener importantes consecuencias para la valoración de opciones, por lo que disponer de series diarias de dicha prima puede ser de gran utilidad.

Nuestra evidencia sugiere que, efectivamente, la prima de riesgo de la volatilidad es muy volátil y negativa aunque, sorprendentemente, no parece ser muy relevante de cara a la valoración de opciones. El modelo de Heston tiende a infravalorar opciones en dinero y dentro de dinero mientras que sobrevalora opciones fuera de dinero.

En la siguiente sección el trabajo describe los datos empleados, la sección tercera presenta brevemente el contexto teórico utilizado, mientras que los resultados se presentan en la sección cuarta. La quinta sección concluye el artículo.

2. LOS DATOS

Nuestro banco de datos en este trabajo está compuesto por todas las opciones de compra sobre el IBEX-35 que se negociaron diariamente durante el período comprendido entre enero de 1996 y abril de 1996. Dada la gran concentración en liquidez que caracteriza este mercado, nuestros datos sólo contienen opciones de compra con el vencimiento más próximo. Además, eliminamos todas las transacciones que tuvieron lugar durante la última semana justo antes del vencimiento. En otras palabras, para cada ciclo mensual de vencimientos, sólo tenemos en cuenta los cruces producidos durante las tres primeras semanas.

Como es habitual en la literatura empírica de opciones debemos ser cuidadosos con la simultaneidad entre los precios de las opciones empleadas y los precios del activo subyacente. Nuestro banco de datos, que contiene todas las transacciones que ocurrieron en cada día, no nos permite observar simultaneamente opciones con el mismo vencimiento sobre el mismo subyacente pero con diferentes precios de ejercicio. Para evitar fuertes oscilaciones en el precio del subyacente, restringimos nuestros datos a la ventana diaria de 45 minutos comprendida entre las 16:00 horas y las 16:45 horas. En promedio, durante esta ventana se cruzaron aproximadamente un 25% de todas las transacciones diarias. Este porcentaje convierte a nuestra ventana en un intervalo suficientemente representativo de la negociación total de las opciones sobre el IBEX-35. Asimismo, esta ventana elimina los minutos cercanos al cierre del mercado de forma que nuestros precios no incorporan posibles actuaciones de los operadores influenciadas por necesidades de cubrir requisitos o márgenes de depósitos. Por último, el empleo del mismo intervalo día tras día evita potenciales problemas de estacionalidad intradiaria del mercado.

Estos criterios nos permite trabajar con una muestra final diaria de 768 observaciones de opciones de compra. La volatilidad implícita de nuestras 768 opciones la estimamos tomando como precio del subyacente el promedio del precio de oferta y demanda del futuro sobre el IBEX-35 disponible en el momento en que se produjo el cruce de la opción[7]. El tipo de interés lo aproximamos por el tipo repo sobre letras anualizado con una, dos o tres semanas de vencimiento. Las características principales en términos de precios, horquillas relativas y número de opciones disponibles según el grado en dinero se encuentra en el Cuadro 1. Las opciones fuera de dinero, en dinero y dentro de dinero representan el 51%, 32% y 17% respectivamente. Los precios medios comprenden el intervalo desde 12.88 pesetas para opciones muy fuera de dinero hasta 185.42 pesetas para opciones muy dentro de dinero. Finalmente, la horquilla relativa definida como la diferencia entre el mejor precio de oferta y mejor precio de demanda dividido entre el promedio de ambos, se mueve exactamente en dirección opuesta al nivel de los precios. En particular, la horquilla se mueve desde 0.39 para opciones muy fuera de dinero y 0.10 para opciones muy dentro de dinero.

[6] Este sería el caso en mercados de opciones donde la disponibilidad de datos de corte transversal es limitada en relación a mercados como el norteamericano. Sin duda, es un marco de trabajo relevante para la valoración de opciones sobre el (futuro del) IBEX-35.

[7] Nótese que estamos utilizando la fórmula de valoración de opciones sobre futuros propuesta por Black (1976).

3. UNA BREVE DESCRIPCIÓN DEL MARCO TEÓRICO DE VALORACIÓN DE OPCIONES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

Como ya hemos mencionado en la introducción analizaremos el modelo de valoración de opciones propuesto por Heston (1993)[8]. Este autor obtiene una fórmula cerrada de valoración de opciones europeas sobre subyacentes con volatilidad estocástica. Heston trabaja con una transformación inversa de Fourier sobre las probabilidades condicionadas de que la opción termine dentro de dinero. La caracterización de estas probabilidades se logra a través de sus funciones características.

El modelo de volatilidad estocástica de Heston generaliza el proceso geométrico Browniano del subyacente al permitir que la varianza evolucione de forma estocástica mediante un proceso de reversión a la media en raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_{1t} \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_{2t} \\ \lambda(S,V,t) &= \lambda V_t \end{aligned} \tag{1}$$

donde μ es la tasa de rendimiento esperado instantáneo del subyacente S_t, V_t es la varianza estocástica instantánea, θ es la media de la varianza a largo plazo, κ determina la tasa de convergencia de la varianza estocástica hacia su media a largo plazo y σ representa la volatilidad del proceso de la varianza estocástica (la denominada volatilidad de la volatilidad). Los parámetros del proceso de la varianza estocástica, $\theta, \kappa, \text{and } \sigma$ son todos constantes estrictamente positivas. W_{1t} and W_{2t} son los movimientos Brownianos asociados al subyacente y a la varianza respectivamente y que permitimos que estén correlacionados con una correlación instantánea ρ. Finalmente, la prima de riesgo de la volatilidad, $\lambda(.)$, se supone proporcional a la varianza instantánea y su signo depende del signo de la correlación entre el Browniano de la varianza y el Browniano del consumo agregado.

Bajo la probabilidad neutral al riesgo (medida de probabilidad P*), el modelo es:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_{1t}^* \\ dV_t &= \kappa^*\left(\theta^* - V_t\right)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_{2t}^* \\ dW_{1t}^* dW_{2t}^* &= \rho dt \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\kappa^* = \kappa + \lambda$, $\theta^* = \kappa\theta/(\kappa+\lambda)$.

Sea $c(S,\upsilon,t)$ el valor de una opción de compra europea donde para simplificar escribimos $S \equiv S_t$ y $\upsilon \equiv V_t$. La fórmula de Heston es:

$$c(S,\upsilon,t) = S_t P_1 - Ke^{-r(T-t)} P_2 \tag{3}$$

donde P_1 and P_2 son las dos probabilidades neutrales al riesgo que tienen la misma interpretación (aunque no la misma magnitud) que las probabilidades que aparecen en la expresión tradicional de BS.

En la aplicación que hacemos de esta fórmula empleamos opciones sobre futuros de forma que la versión que proponemos utilizar, ligeramente diferente de la originalmente sugerida por Heston, viene dada por:

$$c(F,\upsilon,t) = e^{-r(T-t)}\left(F_t P_1 - KP_2\right) \tag{4}$$

donde F es el futuro sobre el activo subyacente y las probabilidades son:

$$P_j\left(x,\upsilon,T-t;\ln[K]\right) = \mathrm{Prob}\left(x_T \geq \ln[K] \,|\, x_t = x, \upsilon_t = \upsilon\right) \tag{5}$$

donde, $x \equiv \ln[F_t]$, j = 1 or 2 (la probabilidad del suceso $\{x \geq \ln[K]\}$ depende de si escogemos el futuro para j = 1, o el activo libre de riesgo para j = 2), y P_j es, por consiguiente, la probabilidad condicional de que la opción termine dentro de dinero. Estas probabilidades dependen del vector de pa-

[8] El modelo de Heston (1993) ha sido contrastado por Bates (1996), Bakshi, Cao y Chen (1997), Nandi (1998) y Fiorentini, León y Rubio (1998).

rámetros dados por el proceso supuesto por Heston bajo la medida de probabilidad original ($\kappa, \theta, \lambda, \sigma, \rho$). Las fórmulas específicas de estas probabilidades aparecen en el Apéndice A.

4. LOS RESULTADOS EMPÍRICOS: PRIMA DE RIESGO DE VOLATILIDAD Y VALORACIÓN DE OPCIONES

4.1 LA INFERENCIA INDIRECTA

Para estimar el proceso bajo la medida de probabilidad original dado por (1), tenemos que reconocer que los datos disponibles son observaciones discretas de un proceso continuo. Si empleamos métodos econométricos habituales a la aproximación discreta de dicho proceso, tendríamos un serio sesgo de estimación producido en el inevitable proceso de discretización de los datos. Con la intención de evitar este sesgo, empleamos el procedimiento de inferencia indirecta propuesto por Gouriéroux, Monfort y Renault (1993). Este procedimiento consiste en dos pasos. En primer lugar, estimamos mediante máxima verosimilitud el denominado modelo auxiliar que, en nuestro caso, es un NAGARCH $(1,1)$[9]. Este modelo viene dado por la siguiente expresión: Sean $x_t \equiv \ln S_t$

y $R_t \equiv x_t - x_{t-1}$, entonces

$$R_t = \mu + \xi_t;\ \xi_t = h_t^{1/2}\varepsilon_t;\ \varepsilon_t \overset{iid}{\approx} N(0,1)$$
$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha\left(\xi_{t-1} + \gamma h_{t-1}^{1/2}\right)^2 \tag{6}$$

donde γ representa la relación entre los cambios que experimenta el IBEX-35 y su varianza condicional dada por h_t. Nótese que estimamos bajo la probabilidad original por lo que nuestro activo de partida debe ser necesariamente el IBEX-35.

En segundo lugar, los estimadores del modelo auxiliar se comparan con las estimaciones basadas en la simulación del sendero del proceso en tiempo continuo dado por (1). Más concretamente, introducimos el modelo en tiempo discreto análogo al proceso (1) y correspondiente a una unidad temporal pequeña τ, tal que $1/\tau$ es un número entero. Esto lo hacemos mediante la tradicional aproximación de Euler[10]. Así, escribamos (1) como:

$$dx_t = (\mu - V_t/2)dt + V_t^{1/2}dW_{1t} \tag{7}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma V_t^{1/2}dW_{2t} \tag{8}$$

$$dW_{1t}dW_{2t} = \rho dt$$

mientras que la discretización de (7) con frecuencia τ resulta igual a:

$$x_t = x_{t-\tau} + \mu\tau - \frac{V_{t-\tau}}{2}\tau + V_{t-\tau}^{1/2}\tau^{1/2}\eta_{1t} \tag{9}$$

y la discretización de (8) también con frecuencia τ es:

$$V_t = \kappa\theta\tau + (1-\kappa\tau)V_{t-\tau} + \varepsilon_t \tag{10}$$

donde,

$$\varepsilon_t = \sigma\tau^{1/2}V_{t-\tau}^{1/2}\left[\rho\eta_{1t} + (1-\rho^2)^{1/2}\eta_{2t}\right]$$

y,

$$(\eta_{1t}, \eta_{2t})' \overset{iid}{\approx} N(0,I)$$

---

[9] Véase Mora y León (1999) para una descripción de este modelo en un contexto más general que comprende toda una familia de modelos GARCH. Asimismo, estos autores estiman toda una batería de modelos GARCH con una serie de datos del IBEX-35 entre 1990 y 1996. En particular, el NAGARCH(1,1) tiene especial interés al admitir la correlación entre los precios del subyacente y su volatilidad.

[10] También utilizamos la discretización sugerida recientemente por Nowman (1997) obteniendo resultados similares. Véase Fiorentini, León y Rubio (1998) para los datalles.

Así, para unos valores dados de los parámetros simulamos el proceso y obtenemos unos valores simulados para las fechas de las observaciones disponibles simplemente seleccionando aquellos valores correspondientes a los índices enteros. Este procedimiento produce simulaciones precisas de V siempre que τ sea suficientemente pequeño.

Todo este proceso lo estimamos con rendimentos horarios continuamente compuestos del IBEX-35 entre el 2 de enero de 1994 y el 2 de enero de 1996. Esto supone un total de 2.450 observaciones horarias. Estas estimaciones las actualizamos día a día desde el 2 de enero de 1996 hasta el 30 de abril de 1996 siempre con el mismo número de observaciones obteniendo, por tanto, estimaciones diarias del vector de parámetros que conforman el proceso de varianza estocástica supuesto por Heston. Así, tenemos el vector recursivo de parámetros dado por $\hat{\Omega} \equiv \left(\hat{\mu}, \hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}\right)$ y que será empleado como *input* en la estimación implícita de la prima de riesgo de la volatilidad.

4.2 La prima de riesgo de la volatilidad

Dado el vector de estimadores $\hat{\Omega}$, y siempre pensando en el contexto de la medida de probabilidad original, tenemos que estimar la varianza instantánea, V_t, y la prima de riesgo de la volatilidad, λ. Nótese que la varianza instantánea es precisamente la varianza que aparece en la fórmula de valoración de Heston en la función característica tal que como se indica en el Apéndice A.

Desafortundamente no es posible estimar simultáneamente la varianza instantánea y la prima de riesgo de volatilidad dado el número de opciones de compra disponibles en nuestro corte transversal diario. Por ello, procedemos a una estimación en dos etapas. En primer lugar suponemos que el proceso de varianza estocástica dado por (1) puede aproximarse por un proceso discreto como el NAGARCH(1,1)[11]. Así, podemos estimar diariamente la varianza desde el 3 de enero de 1996 hasta el 30 de abril de 1996. La Figura 1 representa la evolución de la varianza condicional obtenida del NAGARCH(1,1) y que se emplea como *input* para llevar a cabo la estimación implícita de la prima de riesgo de la volatilidad a través de la fórmula de Heston y los precios de mercado de las opciones de compra disponibles. En definitiva, en nuestra aproximación esta es la varianza que juega el papel de varianza instantánea en la expresión de Heston.

En la segunda etapa, utilizamos diariamente nuestra muestra de corte transversal de opciones para inferir la prima de riesgo de la volatilidad de forma similar a la que se estima la volatilidad implícita bajo la fórmula de BS. Así, minimizamos la suma de los errores al cuadrado (SSE) para cada día del período muestral. Dado el conjunto de paramétros de la inferencia indirecta para cada día t en la muestra, $\hat{\Omega}_t = \left(\hat{\kappa}_t, \hat{\theta}_t, \hat{\sigma}_t, \hat{\rho}_t\right)$, y la varianza, $\hat{V}_t$, estimada por el NAGARCH(1,1), definimos el error de valoración para cada opción, i (i = 1, . . ., n) y cada día t como:

$$e_{it}\left(\hat{V}_t, \lambda; \hat{\Omega}_t\right) = \hat{c}_{it}\left(K_i\right) - c_{it}\left(K_i\right) \tag{11}$$

donde $\hat{c}_{it}\left(K_i\right)$ es el precio teórico de la opción de compra i en el día t, y $c_{it}\left(K_i\right)$ es su correspondiente precio de mercado.

Queremos encontrar la prima de riesgo de la volatilidad, λ, que soluciona en cada día t:

$$SSE_t \equiv \min_{\{\lambda\}} \sum_{i=1}^{n} \left[e_{it}\left(\hat{V}_t; \lambda; \hat{\Omega}_t\right)\right]^2 \tag{12}$$

Los resultados aparecen en el Panel A del Cuadro 2. Asimismo la Figura 2 muestra el comportamiento diario de la prima por riesgo de la volatilidad. Puede apreciarse que su comportamiento es muy volátil y consistentemente negativo a lo largo de los cuatro meses del período muestral, siendo su promedio aproximadamente igual a -16.

La aparente presencia de una prima de riesgo de la volatilidad puede tener consecuencias importantes para la tradicional valoración de opciones. En particular, nótese que la volatilidad implícita que suele estimarse mediante BS no puede interpretarse como la predicción que hace el mercado de la volatilidad futura. Dicha prima de riesgo no está valorada en el contexto de BS por lo que difícilmente puede entenderse la volatilidad implícita como una buena aproximación a la verdadera volatilidad que espera el

---

[11] Nótese que, en cualquier caso, el proceso discreto de la varianza bajo un NAGARCH(1,1) no converge en el límite al proceso de reversión a la media en raiz cuadrada supuesto por Heston para la varianza estocástica. Nuestro procedimiento es, en definitiva, una simple aproximación.

mercado. A su vez, dado dicho sesgo en la volatilidad implícita, una prima de riesgo de volatilidad relevante podría causar sesgos en la propia valoración de opciones basada en BS.

También es interesante observar la consistencia temporal en el signo negativo de la prima de riesgo de la volatilidad. Una prima de riesgo negativa es consistente con una correlación negativa entre los cambios en la volatilidad y el crecimiento del consumo agregado. En este contexto, los agentes aversos al riesgo pagan (en lugar de exigir como es habitual en renta variable) una prima positiva por el riesgo asociado a la volatilidad causando, por tanto, precios más elevados en la opciones. Al mismo tiempo, si un índice bursátil es representativo del consumo agregado, una prima de riesgo de volatilidad negativa es consistente con la correlación negativa entre la renta variable y su volatilidad. Así, el signo negativo de la prima de riesgo de la volatilidad sugiere que las opciones sobre renta variable se usan como cobertura ante cambios inesperados en el índice bursátil. Si una mayor volatilidad está relacionada con tendencias a la baja en el índice, estas pérdidas pueden compensarse al tener posiciones largas en opciones sobre dicho índice cuyos precios aumentarán con la mayor volatilidad.

4.3 LA PRIMA DE RIESGO DE LA VOLATILIDAD Y LA VALORACIÓN DE OPCIONES

Nos queda simplemente analizar cómo se comporta el modelo de Heston con volatilidad estocástica y con la correspondiente prima de riesgo de la volatilidad. Para ello, en cada día t del período muestral estimamos la *varianza instantánea implícita* del modelo de Heston imponiendo los parámetros estimados para dicho día t mediante la inferencia indirecta, $\hat{\Omega} = \{\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}\}$ y una prima de riesgo de la volatilidad igual a -15. Esta varianza se obtiene usando la fórmula de Heston y los precios de mercado de las opciones de forma que minimizamos la siguiente expresión para cada día t:

$$SSE_t \equiv \min_{\{V_t\}} \sum_{i=1}^{n} \left[e_{it}\left(V_t; \lambda = -15; \hat{\Omega}_t\right)\right]^2 \tag{13}$$

donde e_{it} es la diferencia entre el precio teórico de Heston y el precio de mercado para cada opción i en cada día t.

La Figura 3 muestra la evolución temporal de *la varianza instantánea implícita* de Heston para $\lambda = 0$ y $\lambda = -15$ y la tradicional volatilidad implícita de BS (en términos de volatilidades anualizadas)[12].

Para conocer cómo el modelo de Heston valora en relación al modelo de BS, estimamos el error absoluto de valoración (EAV) y el error porcentual de valoración (EPV) que vienen dados por las expresiones:

$$EAV = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} n_t} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n_t} \left|\hat{c}_{it} - c_{it}\right| \tag{14}$$

$$EPV = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} n_t} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n_t} \left(\frac{\hat{c}_{it} - c_{it}}{c_{it}}\right) \tag{15}$$

donde n es el número de opciones de compra disponibles en cada día t y el precio teórico de cada opción, $\hat{c}_{it}$, se calcula con los parámetros $\{\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}\}$ del día t-1, la *varianza instantánea implícita* del día t-1 y la prima de riesgo de volatilidad igual a -15[13]. Nótese que este procedimiento nos permite analizar la capacidad de valoración de los respectivos modelos en un contexto fuera de muestra.

En términos porcentuales puede observarse que el modelo de Heston tiende a valorar mejor que BS las opciones de compra en dinero y dentro de dinero pero, sorprendentemente, valora peor las opciones de compra fuera de dinero. Globalmente, la valoración es muy similar, conclusión que también obtenemos al medir los errores de valoración en pesetas. Lo que si parece evidente es que BS tiende a infravalorar los precios de mercado, al menos durante el período muestral analizado, y el modelo de Heston

---

[12] En el caso de BS, la volatilidad implícita de cada día se estima según una expresión similar a (13) donde la diferencia es que imponemos como precio teórico el precio de BS en lugar del precio de Heston. Naturalmente, en esta caso el vector de parámetros de la inferencia indirecta y la prima de riesgo de la volatilidad son todos igual a cero.

[13] De forma similar, en el caso de BS también empleamos la volatilidad implícita del día t-1 como *input* para la volatilidad del día t.

tiende a infravalorar las opciones de compra en dinero y dentro de dinero, pero sobrevalora las opciones de compra fuera de dinero[14].

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado el modelo de valoración de opciones con volatilidad estocástica propuesto por Heston (1993). Hemos estimado los parámetros del proceso de varianza estocástica que propone el modelo mediante la técnica de inferencia indirecta y la volatilidad diaria mediante una aproximación al proceso de varianza estocástica de Heston basada en un NAGARCH(1,1). Esto nos ha permitido estimar diariamente la prima de riesgo de la volatilidad implícita en los precios de las opciones.

Los resultados sugieren que, durante el período muestral, la prima de riesgo de la volatilidad implícita en los precios de las opciones ha sido negativa. Una prima de riesgo negativa es consistente con una correlación negativa entre los cambios en la volatilidad y el crecimiento del consumo agregado. Así, los agentes aversos al riesgo parecen haber pagado una prima positiva por el riesgo asociado a la volatilidad causando, por tanto, unos precios más elevados en la opciones. Al mismo tiempo, también observamos que durante nuestro período muestral el modelo de Black-Scholes tiende a infravalorar los precios de mercado de las opciones y el modelo de Heston infravalora las opciones en dinero y dentro de dinero, mientras que tiende a sobrevalorar las opciones fuera de dinero.

APÉNDICE A

El modelo de volatilidad estocástica de Heston para opciones europeas sobre futuros

Dado que utilizamos opciones sobre futuros, la versión de la fórmula que empleamos viene dada por:

$$c(F, \upsilon, t) = e^{-r(T-t)}\left(F_t P_1 - K P_2\right)$$

donde F es el precio del futuro sobre el activo subyacente, K es el precio de ejercicio y las probabilidades vienen dados por:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\phi \ln[K]} f_j}{i\phi}\right) d\phi \; ; \quad j = 1,2$$

donde Re(y) es la parte real de una función y; i es el número imaginario i = $\sqrt{-1}$, y

$$f_j(x, \upsilon, T-t; \phi) = \exp\left[C(T-t;\phi) + D(T-t;\phi)\upsilon + i\phi x\right]$$

donde,

$$C(T-t;\phi) = \frac{a}{\sigma^2}\left\{\left(b_j - \rho\sigma\phi i + d\right)(T-t) - 2\ln\left[\frac{1-ge^{d(T-t)}}{1-g}\right]\right\}$$

$$D(T-t;\phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2}\left[\frac{1-e^{d(T-t)}}{1-ge^{d(T-t)}}\right]$$

[14] Debemos señalar que Fiorentini, León y Rubio (1998) tienden a encontrar los mismos resultados independientemente de la prima de riesgo de volatilidad que se considere.

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}$$

$$a = \kappa\theta$$

$$b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$$

$$b_2 = \kappa + \lambda$$

$$u_1 = 1/2; u_2 = -1/2$$

verificándose que C(0) = D(0) = 0, y donde C(T-t;ϕ) y D(T-t;ϕ) (y por tanto las probabilidades P_j; j = 1, 2) dependen del vector de parámetros, ($\kappa, \theta, \lambda, \sigma, \rho$) dado por el proceso supuesto por Heston bajo la medida de probabilidad original.

REFERENCES

AÏT-SAHALIA, Y., AND A. LO (1998). "NONPARAMETRIC ESTIMATION OF STATE-PRICE DENSITIES IMPLICIT IN FINANCIAL ASSET PRICES", JOURNAL OF FINANCE 53, PP.499-547.

BACKUS, D., FORESI, S., LI, K, AND L. WU (1997). "ACCOUNTING FOR BIASES IN BLACK-SCHOLES", WORKING PAPER, STERN SCHOOL OF BUSINESS, NEW YORK UNIVERSITY.

BAKSHI, G., CAO, C., AND Z. CHEN (1997). "EMPIRICAL PERFORMANCE OF ALTERNATIVE OPTION PRICING MODELS", JOURNAL OF FINANCE 52, PP. 2003-2049.

BATES, D. (1996). "JUMPS AND STOCHASTIC VOLATILITY: EXCHANGE RATE PROCESSES IMPLICIT IN DEUTSCHE MARK OPTIONS", REVIEW OF FINANCIAL STUDIES 9, PP. 69-107.

BLACK, F. (1976). "THE PRICING OF COMMODITY CONTRACTS", JOURNAL OF FINANCIAL ECONOMICS 3, PP. 167-179.

BLACK, F. AND M. SCHOLES (1973). "THE PRICING OF OPTIONS AND CORPORATE LIABILITIES", JOURNAL OF POLITICAL ECONOMY 81, PP. 637-659.

CHRISS, N. (1995). "HOW TO GROW A SMILING TREE", HARVARD UNIVERSITY, DEPARTMENT OF MATHEMATICS WORKING PAPER.

CORRADO, C., AND T. SU (1996). "SKEWNESS AND KURTOSIS IN S&P 500 INDEX RETURNS IMPLIED BY OPTION PRICES", JOURNAL OF FINANCIAL RESEARCH 19, PP. 175-192.

COX, J. AND S. ROSS (1976). "THE VALUATION OF OPTIONS FOR ALTERNATIVE STOCHASTIC PROCESSES", JOURNAL OF FINANCIAL ECONOMICS 3, PP. 145-160.

DAS, S., AND R. SUNDARAM (1998). "OF SMILES AND SMIRKS: A TERM-STRUCTURE PERSPECTIVE", PRÓXIMA PUBLICACIÓN EN EL JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS.

DERMAN, E. AND I. KANI (1994). "RIDING ON A SMILE", RISK 7, PP. 32-39.

DERMAN, E., I. KANI AND N. CHRISS (1996). "IMPLIED TRINOMIAL TREES OF THE VOLATILITY SMILE", JOURNAL OF DERIVATIVES 3, PP. 7-22.

DUMAS, B., J. FLEMING AND R. WHALEY (1998). "IMPLIED VOLATILITY FUNCTIONS: EMPIRICAL TESTS", JOURNAL OF FINANCE 53, PP. 2059-2106.

DUPIRE, B. (1994). "PRICING WITH A SMILE", RISK 7, PP. 18-20.

EBERLEIN, E., KELLER, U. AND K. PRAUSE (1998). "NEW INSIGHTS INTO SMILE, MISPRICING, AND VALUE AT RISK: THE HYPERBOLIC MODEL", JOURNAL OF BUSINESS 71, PP. 371-405.

FIORENTINI, G., LEÓN, A. AND G. RUBIO (1998). "SHORT-TERM OPTIONS WITH STOCHASTIC VOLATILITY: ESTIMATION AND EMPIRICAL PERFORMANCE", DOCUMENTO DE TRABAJO, UNIVERSIDAD DE ALICANTE Y UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO.

GOURIÉROUX, C, MONFORT, A., AND E. RENAULT (1993). "INDIRECT INFERENCE", JOURNAL OF APPLIED ECONOMETRICS 8, PP. 85-118.

GUO, D. (1998). "THE RISK PREMIUM OF VOLATILITY IMPLICIT IN CURRENCY OPTIONS", JOURNAL OF BUSINESS & ECONOMIC STATISTICS, 16, PP. 498-507.

HESTON, S. (1993). "A CLOSED-FORM SOLUTION FOR OPTIONS WITH STOCHASTIC VOLATILITY WITH APPLICATIONS TO BOND AND CURRENCY OPTIONS", REVIEW OF FINANCIAL STUDIES 6, PP. 327-344.

HULL, J. AND A. WHITE (1987). "THE PRICING OF OPTIONS ON ASSETS WITH STOCHASTIC VOLATILITIES", JOURNAL OF FINANCE 42, PP. 281-300.

JACKWERTH, J.C. (1996). "IMPLIED BINOMIAL TREES: GENERALIZATIONS AND EMPIRICAL TESTS", UNIVERSITY OF CALIFORNIA AT BERKELEY, WORKING PAPER RPF-262.

JACKWERTH, J.C. AND M. RUBINSTEIN (1996). "RECOVERING PROBABILITY DISTRIBUTIONS FROM OPTION PRICES", JOURNAL OF FINANCE 51, PP. 1611-1631.

LEÓN, A. AND J. MORA (1998). "MODELLING CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY: APPLICATION TO THE IBEX-35 STOCK RETURN INDEX", FORTHCOMING IN THE SPANISH ECONOMIC REVIEW.

LEÓN, A. AND G. RUBIO (1999). "SMILING UNDER STOCHASTIC VOLATILITY", DOCUMENTO DE TRABAJO, UNIVERSIDAD DE ALICANTE Y UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO.

NANDI, S. (1998). "HOW IMPORTANT IS THE CORRELATION BETWEEN RETURNS AND VOLATILITY IN A STOCHASTIC VOLATILITY MODEL? EMPIRICAL EVIDENCE FROM PRICING AND HEDGING IN THE S&P 500 INDEX OPTIONS MARKET", JOURNAL OF BANKING AND FINANCE 22, PP. 589-610.

NOWMAN, K. (1997). "GAUSSIAN ESTIMATION OF SINGLE-FACTOR CONTINUOUS TIME MODELS OF THE TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES", JOURNAL OF FINANCE 52, PP. 1695-1706.

PEÑA, I., SERNA, G, AND G. RUBIO (1998). "WHY DO WE SMILE? ON THE DETERMINANTS OF THE IMPLIED VOLATILITY FUNCTION", PRÓXIMA PUBLICACIÓN EN EL JOURNAL OF BANKING AND FINANCE.

ROSENBERG, J. (1998). "PRICING MULTIVARIATE CONTINGENT CLAIMS USING ESTIMATED RISK-NEUTRAL DENSITY FUNCTIONS", JOURNAL OF INTERNATIONAL MONEY AND FINANCE 17, PP. 229-247.

RUBINSTEIN, M. (1994). "IMPLIED BINOMIAL TREES", JOURNAL OF FINANCE 49, PP. 771-818.

STEIN, E. AND J. STEIN (1991). "STOCK PRICE DISTRIBUTIONS WITH STOCHASTIC VOLATILITY: AN ANALYTICAL APPROACH", REVIEW OF FINANCIAL STUDIES 4, PP. 727-752.

TAYLOR, S. AND X. XU (1994). "THE MAGNITUDE OF IMPLIED VOLATILITY SMILES: THEORY AND EMPIRICAL EVIDENCE FOR EXHANGE RATES", THE REVIEW OF FUTURES MARKETS 13, PP. 355-380.