

PRERREQUISITOS DEFICIENTES CON SOFTWARE MATEMÁTICO EN CONCEPTOS NUEVOS

Transformada de Laplace

LEONSIO RUIZ MORENO / PATRICIA CAMARENA GALLARDO / SOCORRO DEL RIVERO JIMÉNEZ

Resumen:

En esta investigación se persigue evaluar el desarrollo de habilidades operacionales de estudiantes de ingeniería, al resolver eventos contextualizados de la transformada de Laplace en circuitos eléctricos, al emplear el *software* Maple 13. El trabajo se centra en que el alumno aborde sus deficiencias en prerrequisitos matemáticos del conocimiento nuevo de la transformada de Laplace. La investigación se fundamenta en la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, es de tipo comparativo entre estudiantes de ingeniería electrónica (grupos control y experimental). Los resultados indican que el uso de *software* en prerrequisitos deficientes mejora las habilidades operativas al resolver eventos de la transformada de Laplace, porque los alumnos pueden entender mejor los conceptos cuando hay precisión tanto en cálculos como en gráficas, y tienen menos distractores para concentrarse en los conceptos que deben construir.

Abstract:

This research is aimed at evaluating the development of engineering students' operational skills in solving contextualized events of the Laplace transform in electrical circuits, with the use of Maple 13 software. The work is centered on the way students address their deficiencies in the mathematical prerequisites of new knowledge of the Laplace transform. The study, based on the theory of mathematics in the context of science, compares students in electronic engineering (control and experimental groups). The results indicate that the use of software in deficient prerequisites improves operational skills in solving events of the Laplace transform. Students can better understand the concepts when there is precision in calculations as well as graphs, and they have fewer detractors when concentrating on the concepts they must construct.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, educación superior, ingeniería, informática, México.

Keywords: mathematics teaching, higher education, engineering, computer science, Mexico.

Leonsio Ruiz Moreno: Instituto Tecnológico Superior de Cajeme, Departamento de Ciencias Básicas. Carretera Internacional a Nogales Km. 2 s/n, 85024, Ciudad Obregón, Sonora, México. CE: lruiz@itesca.edu.mx

Patricia Camarena Gallardo: Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, México. CE: pcamarena@ipn.mx

Socorro del Rivero Jiménez: Instituto Tecnológico Superior de Cajeme, Departamento de Ciencias Básicas, México. CE: srivero@itesca.edu.mx

Introducción

En la formación de un estudiante de ingeniería un aspecto muy importante es el uso de la matemática en sus diversas formas, en particular como un lenguaje, una herramienta y una materia formativa. Sin embargo, este objetivo no siempre se logra por diversas razones. Una es que se enseña una matemática aislada de la realidad, ya que generalmente no existe vinculación con la profesión de estudio, “los estudiantes no tienen en claro por qué estudiar matemáticas y esto demerita la motivación hacia esta ciencia” (Camarena, 1984). Otra es el tipo de enseñanza utilizada; Alanís (1996) comenta que existen investigaciones que han demostrado que la forma tradicional –que supone una transferencia simple del conocimiento del profesor hacia el alumno– ha fracasado debido a que genera un aprendizaje a corto plazo, originando altos índices de lo que, a su vez, produce en el estudiante una actitud de repudio, apatía y desinterés respecto de la matemática.

Algunos investigadores han trabajado sobre la problemática de desvinculación de la matemática con las áreas de estudio del alumno, entre ellos se puede mencionar a Muro (2004), Olazábal (2005), Trejo (2005), De Pavia (2006), Sauza (2006), Alvarado (2008), Rojas (2008), Accostupa (2009), Neira (2012), Flores y Camarena (2012), Camarena (1984, 2013a), quienes se fundamentan en la teoría denominada Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC). A través de algunos de estos trabajos, se identifica la importancia de la transformada de Laplace en ingeniería, como una herramienta que ayuda a entender qué sucede dentro de un circuito eléctrico, cuyo concepto fundamental es la función de transferencia (Suárez y Camarena, 2000).

Por otro lado, es importante mencionar la gran evolución, desarrollo e impacto del uso de las tecnologías electrónicas en el sistema educativo, en particular las de la información y comunicación. Es el caso, por ejemplo, de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las ciencias a través del uso de plataformas tecnológicas, donde el alumno tiene acceso a materiales didácticos y, a través de foros de discusión, puede interactuar ya sea con otros estudiantes o con sus profesores; asimismo, es relevante el uso de calculadoras y *software* matemático –como Derive, Maple, Matlab, Mathematica– que, además de servir como auxiliares en los cálculos, permiten el desarrollo de procesos cognitivos (García y Camarena, 2007).

Para el caso concreto de las carreras de ingeniería es fundamental el uso de la tecnología, ya que un profesional, en su práctica, actualmente

hace uso de ella de una u otra forma (Academia de Ingeniería, 2014). Si el estudiante para el aprendizaje de las ciencias emplea la tecnología, se irá familiarizando con esta herramienta, en particular con los diferentes tipos de *software* e identificará las ventajas y desventajas de su uso.

Esta investigación aborda la desvinculación de la matemática con la profesión de estudio y la importancia del uso de la tecnología electrónica en la formación del estudiante de ingeniería.

Planteamiento del problema

En ingeniería no solo es necesario solucionar las ecuaciones diferenciales que modelan problemas ingenieriles, también es importante el método empleado para su resolución (Camarena, 2001). Tal es el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que modelan circuitos eléctricos, cuya herramienta de solución en las ingenierías eléctrica y electrónica es la transformada de Laplace, la cual permite establecer la función de transferencia para analizar el circuito (Suárez y Camarena, 2000). Para su conceptualización y manejo operacional, esta herramienta requiere de conceptos y procesos matemáticos previos, denominados prerrequisitos, donde generalmente los estudiantes tienen problemas cognitivos. Ejemplos de estos prerrequisitos son los conceptos de integrales impropias con límites de integración infinitos, integrales propias, métodos de integración, propiedades operacionales básicas con límites de una variable, descomposición de una función racional en fracciones parciales, sistemas de ecuaciones lineales, etcétera.

Por otro lado, para la teoría de la MCC, los identificadores que se presentan en la construcción de conceptos matemáticos son tres: la conceptualización formal del concepto, la operacionalización de los procesos y la contextualización del concepto (Camarena, 2013b). Los tres identificadores de un concepto inciden en conocimientos nuevos; dependiendo del tipo de enfoque, teórico o de aplicación, que usa la ingeniería con el conocimiento nuevo, se requiere más un identificador que otro (Camarena, 2002 a y b). El caso de la transformada de Laplace para las ingenierías eléctrica y electrónica y sus ramas afines necesitan los correspondientes a la operacionalización de los procesos y contextualización del concepto, más que su conceptualización formal; esto no significa que se esté desechando esta última solamente es una ponderación de los identificadores según el currículo de matemáticas en ingeniería (Camarena, 1984, 1990, 2002 a y

b), mientras que sus prerrequisitos necesitan de la operacionalización de los procesos. De tal forma, se trata de identificar la operacionalización y contextualización de la transformada de Laplace en estudiantes de ingeniería electrónica y ramas afines.

Cabe mencionar que el caso de la transformada de Laplace ha sido abordado por investigaciones educativas. Miranda (2001) desde un punto de vista histórico, mientras que Suárez y Camarena (2000) la han estudiado desde su vinculación con la ingeniería. Sin embargo, no se han identificado estudios que aborden situaciones de operacionalización de procesos tratando las deficiencias en los prerrequisitos matemáticos previos de la transformada de Laplace.

Como se ha mencionado, la operacionalización de los prerrequisitos de la transformada de Laplace son deficiencias usuales en estudiantes de ingeniería. Por tal razón, el problema de investigación es el conflicto que subyace en la operacionalización de procesos en los alumnos cuando enfrentan eventos de un conocimiento nuevo, como la transformada de Laplace en el contexto de los circuitos eléctricos. De tal forma, dicha problemática se analiza en dos niveles: la transformada de Laplace como conocimiento nuevo y sus prerrequisitos una vez contextualizada.

Tomando en cuenta lo anterior, la pregunta de investigación es la siguiente: ¿el uso de *software* matemático en la operacionalización de los prerrequisitos de la transformada de Laplace, ayuda al desarrollo operacional en la resolución de eventos contextualizados de dicha transformada en el contexto de los circuitos eléctricos? Es decir, ¿resolviendo los problemas operacionales en prerrequisitos, las habilidades operacionales del conocimiento nuevo de la transformada de Laplace contextualizada se desarrollan sin dificultad?

En la presente investigación se utiliza Maple 13 debido a que es un *software* matemático bastante completo y didáctico y no requiere de una sintaxis complicada. Además, incluye diversos tutoriales donde el alumno puede trabajar y experimentar con diferentes registros de representación para fortalecer la comprensión de conceptos matemáticos y el desarrollo de algoritmos.

De acuerdo con lo anterior, el objetivo de investigación es evaluar el desarrollo de habilidades operacionales de los estudiantes, al resolver eventos contextualizados de la transformada de Laplace en circuitos eléctricos, cuando se emplea Maple 13 para que el alumno aborde sus deficiencias

en prerrequisitos matemáticos del conocimiento nuevo de la transformada de Laplace.

Respecto de las variables, la independiente es el uso de *software* matemático (Maple 13) en prerrequisitos de la transformada de Laplace; la variable dependiente es el desarrollo de habilidades operacionales en eventos contextualizados de la transformada de Laplace en circuitos eléctricos.

Marco teórico

La Matemática en el Contexto de las Ciencias

Uno de los principales problemas que enfrenta diariamente el docente en el aula es la aversión que muestran la mayoría de los estudiantes hacia la matemática, generada principalmente por la forma como se enseña, esto es, fuera de su realidad. Al respecto se comenta que:

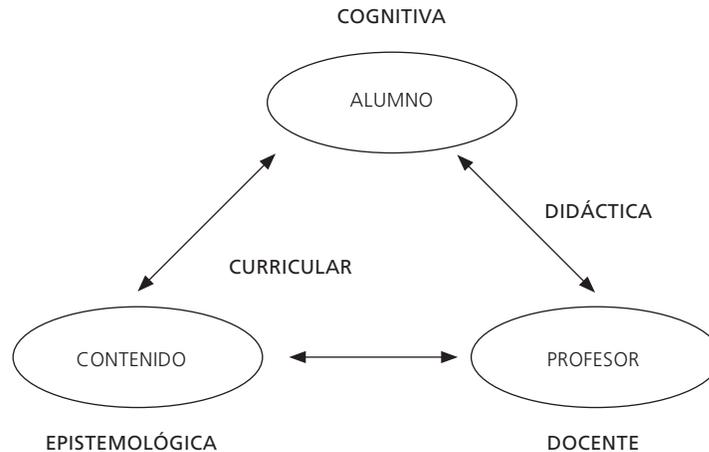
En el trayecto del tiempo la matemática que se emplea en ingeniería ha perdido su contextualización de origen y se presenta como un conocimiento acabado, el cual origina una formalidad y estructura matemática que la hace demasiado abstracta para los estudiantes que tratan de utilizarla en su formación de ingeniería (Camarena, 2001).

Esta forma de recibir los cursos repercute en los futuros profesionales, pues se les dificulta modelar matemáticamente problemas y fenómenos del área de ingeniería. Tratando de abordar esta problemática, entre otras más, nace en el Instituto Politécnico Nacional de México la teoría denominada la Matemática en el Contexto de las Ciencias, donde se pretenden aprendizajes significativos, en el sentido de Ausubel.

La MCC se origina, desde 1982, en la línea de investigación de la matemática social, la cual reflexiona acerca de la relación que debe existir entre la matemática y: *a)* las diferentes ciencias que la requieren, *b)* las futuras actividades profesionales y laborales y *c)* las tareas de la vida cotidiana, puesto que se pretende una matemática para la vida (Camarena, 1984, 2008, 2013a).

En el ambiente de aprendizaje se presentan las cinco fases de la teoría: la curricular, que nace desde 1984; la didáctica, originada en 1987; la epistemológica, que emerge desde 1988; la docente generada desde 1990; y la cognitiva, que surge en 1992. Las cinco fases interactúan en un ambiente de tipo social, económico, emocional y político, sin estar aisladas unas de las otras (figura 1).

FIGURA 1
Fases de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias



Por el tipo de investigación que se deseaba desarrollar, la MCC es la fundamentación teórica y metodológica de este trabajo, especialmente en su fase didáctica. Ésta considera dos ejes rectores: la contextualización y la descontextualización (Camarena, 1984). En la primera se realiza trabajo interdisciplinario a través de la resolución de eventos contextualizados, los cuales pueden ser problemas en contexto o proyectos, donde el contexto se toma de tres fuentes: los demás cursos del estudiante, actividades profesionales y situaciones de la vida cotidiana. En la descontextualización el trabajo es disciplinario y se lleva a cabo a través de actividades didácticas específicas.

La fase didáctica de la teoría de la MCC incluye una estrategia didáctica denominada Matemáticas en contexto, que comprende nueve etapas metodológicas y, para implementarlas, el maestro selecciona equipos formados por tres estudiantes con una característica especial, uno deberá ser el líder académico, otro el emocional y el tercero el operativo (Camarena, 1984, 2008). A continuación se muestran las etapas de dicha estrategia.

- 1) Identificar los eventos contextualizados
- 2) Plantear el evento contextualizado
- 3) Determinar las variables y las constantes del evento

- 4) Incluir los temas y conceptos matemáticos y del contexto necesarios para el desarrollo del modelo matemático y solución del evento
- 5) Determinar el modelo matemático
- 6) Dar la solución matemática del modelo matemático
- 7) Determinar la solución requerida por el evento
- 8) Interpretar la solución en términos del evento y disciplinas del contexto
- 9) Presentar una matemática descontextualizada.

Las etapas de la estrategia didáctica del contexto que se han mostrado incluyen actividades de enseñanza y de aprendizaje. Entre estas últimas se identifican las correspondientes a los numerales 3, 5, 6, 7 y 8, que constituyen el proceso de contextualización de la matemática y son aquellas que los alumnos abordan en su trabajo colaborativo por equipos. De esta forma, se usa la contextualización de la matemática, en particular de la transformada de Laplace en los circuitos eléctricos, donde se requieren procesos operacionales; con ello se abordan los dos identificadores mencionados con anterioridad para la construcción del concepto matemático de la transformada de Laplace en las ingenierías. De acuerdo con el objetivo, se emplea el *software* Maple 13 cuando el estudiante tiene que realizar procesos operacionales con los prerrequisitos, por ello debe saber de qué forma emplear el programa en los momentos necesarios.

Tecnología electrónica en el aprendizaje de la matemática

Actualmente en el mercado existen diferentes tipos de *software* matemático, que son utilizados como herramientas para programar, realizar cálculos, hacer simulaciones matemáticas, etcétera. Entre los paquetes más conocidos se pueden mencionar el Mathematica, MatLab o Maple. Algunas de las características más comunes que reúnen estos paquetes, según Trujillo (2002, citado en Vilches, 2007), son:

- 1) Son potentes manipuladores simbólicos.
- 2) Permiten usar algoritmos de cálculo numérico basados en el método de almacenamiento denominado de Coma Flotante, típico de los lenguajes de programación científicos tradicionalmente usados para la solución numérica de problemas matemáticos y en la aritmética racional, que permite al usuario llegar a obtener la precisión que desee en la solución del problema en cuestión.

- 3) Es posible trabajar con ellos de modo interactivo, contando con una amplísima biblioteca de funciones y una interface gráfica muy potente y cómoda de usar.
- 4) Cuentan con un lenguaje de programación de alto nivel, tipo “C”, que permite al usuario desarrollar sus propios paquetes o funciones.
- 5) Son versátiles en su relación con otros programas o lenguajes de programación.

Meza (2001) propone que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistida por computadora debe basarse en los siguientes principios:

- 1) La computadora debe incorporarse solo cuando sea más eficaz o eficiente que otros medios.
- 2) La incorporación de la computadora permite aumentar la eficiencia y eficacia de algunas estrategias que el docente utilizaba antes.
- 3) El empleo de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática permite diseñar algunas estrategias didácticas que no es posible desarrollar con otros medios.

Hay varios autores que trabajan con tecnología en las clases de matemáticas, como Costa, Di y Vacchino (2010), Escudero *et al.* (2004), Galán (2003), Maita (2005) y Kolman (1980, citado en Vilches, 2007), quienes comentan que se favorece la motivación y la curiosidad intelectual del estudiante. Sin embargo, su uso por sí solo no garantiza el éxito de los procesos didácticos (Rueda y Camarena, 2006). Con ello se puede concluir que las computadoras tienen un impacto positivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, solamente si hay la capacidad de utilizarlas apropiadamente. Más aún, su empleo en algunos casos puede resultar contraproducente si el docente no cuenta con estrategias didácticas adecuadas que permitan en los alumnos un aprendizaje más significativo.

Meza (2001) presenta algunas estrategias didácticas de cómo hacer un buen uso de *software* y calculadoras, entre éstas se encuentran las que se describen brevemente a continuación.

La estrategia de “Jugarle la vuelta al *software*” consiste en hacer cálculos con él de manera directa aun cuando un alumno no conozca del todo un concepto en particular; por ejemplo se pueden calcular de manera operativa límites, derivadas e integrales de funciones sin tener en claro

sus conceptos. Para una descripción más detallada se puede recurrir a la referencia de Meza (2001).

La estrategia de pizarrón electrónico pretende que el alumno adquiera por sí mismo conceptos matemáticos para lo cual el maestro presenta el concepto o resultado con una exposición tradicional, adicionando la incorporación de *software* mediante procesos de animación.

La estrategia de ejercitación y práctica es simple de llevar a cabo con el uso de la tecnología, ya que el estudiante puede emplear programas especializados para trabajar de manera autónoma.

Asimismo, la estrategia “De herramienta” permite usar las calculadoras y/o *software* para la realización de cálculos cuando dicha tarea pueda interferir con el objetivo educacional del tema, mientras que si el fin es aprender a realizar cálculos no es recomendable el uso de la tecnología.

Metodología de investigación

Tipo de investigación

La investigación fue de tipo comparativo, con la finalidad de probar la propuesta de uso de la tecnología (*software* matemático) en el desarrollo operacional de prerrequisitos y evaluar la ejecución de los procedimientos para resolver eventos contextualizados del conocimiento nuevo de la transformada de Laplace en circuitos eléctricos.

Método de trabajo

La investigación se llevó a cabo con dos grupos de alumnos, uno control y otro experimental, con aplicación de un postest. La propuesta de uso de tecnología en prerrequisitos se aplicó al grupo experimental, al mismo tiempo que el de control recibió clases tradicionales, ambos cursaban el tema de transformada de Laplace. Las clases fueron impartidas en el mismo horario en ambos grupos y en aulas con infraestructura física similar, por dos maestros diferentes pero con igual formación profesional. El método consistió de dos momentos.

En el primer momento, para familiarizar al estudiante con la herramienta tecnológica y reforzar los prerrequisitos de la transformada de Laplace, se ejecutaron tres estrategias didácticas: “Jugarle la vuelta al *software*”, “Pizarrón electrónico” y “Ejercitación y práctica”. Específicamente se usaron en los temas sobre: límites de funciones, integral definida, teorema fundamental del cálculo, integral indefinida y métodos de integración.

En el segundo momento se diseñaron e implementaron, de acuerdo con la teoría de la MCC, eventos contextualizados de la transformada de Laplace en circuitos eléctricos, que los alumnos de ambos grupos resolvieron; el grupo experimental usando el *software* y aplicando la estrategia “De herramienta” solamente en aquellos aspectos que formaban parte de los prerrequisitos curriculares del tema en estudio, en este caso, elaboración de gráficas y cálculos operacionales, como descomposición en fracciones parciales, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y otros cálculos operacionales requeridos por el evento contextualizado.

Los eventos contextualizados empleados tratan sobre circuitos eléctricos en serie con un resistor y un condensador, es decir son del tipo RC, con fuente de voltaje constante, exponencial y sinusoidal:

- *Evento 1:* considerar un circuito en serie RC con fuente de voltaje $E(t) = 600$ voltios. Si $R = 20$ ohmios, $C = 0.01$ faradios y $q(0) = 0$ coulomb. Determinar la carga $q(t)$ en el capacitor y la intensidad de la corriente $i(t)$, en cualquier instante de tiempo t . Determinar además en qué tiempo la carga en el capacitor es de 4 coulombs.
- *Evento 2:* considerar un circuito en serie RC con fuente de voltaje $E(t) = 230e^{-10t}$ voltios. Si $R = 12$ ohmios, $C = 0.5$ faradios y $q(0) = 0$ coulomb. Determinar la carga $q(t)$ del capacitor y la intensidad de la corriente $i(t)$ en cualquier instante de tiempo t ; además, encontrar la carga máxima en el capacitor y en qué valor de t se obtiene, e indicar el valor de la corriente cuando la carga en el capacitor es máxima.
- *Evento 3:* considerar un circuito en serie RC con fuente de voltaje $E(t) = 300\text{sen } 5t$ voltios. Si $R = 4$ ohmios, $C = 0.01$ faradios y $q(0) = 0$ coulomb. Determinar la carga $q(t)$ en el capacitor y la intensidad de la corriente $i(t)$ en cualquier instante de tiempo t , además indicar el valor de la carga en el capacitor después de pasados 5 seg.

Además, para cada evento se les solicitó a los alumnos describir el comportamiento de la carga del condensador y de la corriente eléctrica del circuito en función del tiempo y la relación existente entre ambos.

Muestra

El tipo de muestreo fue convencional, debido a que al momento de realizar la experimentación se contaba solamente con dos grupos de alumnos que

estaban cursando ecuaciones diferenciales y circuitos eléctricos a la vez, en la carrera de Ingeniería en electrónica. El grupo control quedó formado por 12 alumnos y el experimental por 13. Es decir, fueron 12 unidades de estudio en un caso y en el otro 13.

Instrumentos de observación

La obtención de los datos para el análisis del desarrollo de habilidades operacionales se realizó mediante la producción escrita de los alumnos al abordar los tres eventos contextualizados.

Análisis de los resultados

Es importante mencionar que, por su extensión, en este artículo únicamente se presenta el análisis de los resultados de las diferentes etapas de contextualización de la Matemática en contexto y los niveles de desarrollo de las habilidades operacionales en el conocimiento nuevo de la transformada de Laplace, es decir, nos referimos solamente al momento 2 de la investigación.

Para el análisis de los resultados se elaboraron rúbricas (cuadros 1 y 2) para medir el desarrollo de habilidades operacionales alcanzado en cada una de las etapas de contextualización de la matemática. Para ello se renombraron estas etapas de la estrategia didáctica de la Matemática en contexto: la A se refiere a la 3, determinar variables y constantes; la B corresponde a la etapa 5, determinar el modelo matemático; la C sustituye a la 6, dar solución matemática; la D es la referente a la etapa 7, solucionar el evento y, por último, la E corresponde a la 8, interpretar la solución.

Para el análisis de los resultados, la etapa A no presenta diferencias en la comparación, ya que es de identificación de variables y constantes, ni requiere de actividad operativa. La B sí precisa de procesos operativos, pero no con los prerrequisitos, luego, no se necesita emplear el *software*. Cabe aclarar que el modelo matemático típico de los eventos propuestos es una ecuación diferencial y, frecuentemente en ingeniería, el tema de dichas ecuaciones se ubica en el mismo curso en donde se imparte la transformada de Laplace, por tal razón éstas no son consideradas como un prerrequisito. Así, el análisis de los resultados se centra en las etapas C, D y E para cada grupo. Como información adicional para el lector, este modelo matemático, la ecuación diferencial, se resuelve en ingeniería electrónica y ramas afines a través de la transformada de Laplace.

CUADRO 1
*Rúbrica para el desarrollo operacional
 en eventos contextualizados: etapas A, B y C*

Identificador	Desarrollo de habilidades operativas
Etapas A: determinar constantes y variables del evento	
No contesta	Nulo
Describe datos (variables y constantes) incompletos y no vincula conceptos con variables y constantes	Regular
Describe datos (variables y constantes) completos y no vincula conceptos con variables y constantes	Bueno
Describe los datos completos y sí vincula conceptos con variables y constantes	Muy bueno
Etapas B: determinar del modelo matemático	
No contesta	Nulo
Describe incorrectamente el modelo	Regular
Describe correctamente el modelo, sin condición inicial	Bueno
Describe correctamente el modelo, con condición inicial	Muy bueno
Etapas C: dar solución matemática	
No contesta	Nulo
Convierte adecuadamente la ecuación diferencial en algebraica y obtiene $I(s)$	Regular
Además de lo anterior: Grupo de control: efectúa de manera correcta el algoritmo al descomponer en fracciones parciales. Grupo experimental: utiliza de manera correcta el <i>software</i> al descomponer en fracciones parciales	Bueno
Además de lo anterior, se efectúa de manera correcta el cálculo de la transformada inversa de Laplace	Muy bueno

CUADRO 2

Rúbrica para el desarrollo operacional en eventos contextualizados: etapas D y E

Identificador	Desarrollo de habilidades operativas
Etapas D: dar solución del evento	
No contesta	Nulo
Da la solución incorrecta	Deficiente
Determina correctamente uno de los tres elementos	Regular
Determina correctamente dos de los tres elementos	Bueno
Determina correctamente los tres elementos	Muy bueno
Etapas E: interpretar la solución del evento desde la gráfica	
No contesta	Nulo
Grafica incorrectamente las dos gráficas	Deficiente
Grafica correctamente una de las dos gráficas	Bueno
Grafica correctamente las dos gráficas	Muy bueno
Etapas E: interpretar la solución del evento desde el concepto de límite	
No contesta	Nulo
Determina incorrectamente los dos límites	Deficiente
Determina correctamente sólo uno de los límites	Bueno
Determina correctamente los dos límites	Muy bueno

Análisis de resultados del evento 1*Grupo de control*

El grupo control no usó el *software*, trabajó de forma tradicional. En cuanto a la etapa C, a través de la transformada de Laplace, los estudiantes convirtieron de manera correcta la ecuación diferencial en una algebraica para obtener $Q(s)$, luego procedieron con el uso de la transformada inversa de

Laplace para obtener la carga del capacitor en función del tiempo, donde requerían descomponer la fracción:

$$\frac{600}{s(20s+100)}$$

en una suma de fracciones parciales, pero cometieron un error, ya que la descomposición correcta era:

$$\frac{-6}{s+5} + \frac{6}{s}$$

y la encontrada por los alumnos fue otra (figura 2), originando un cálculo erróneo de la carga en el capacitor en función del tiempo. Además, hubo una falta de comprensión o conocimiento del área del contexto del evento ya que no se percataron de dicho error, pues la condición inicial indicaba que la carga del capacitor era cero, contrario a lo que presentaron, pues la carga en el tiempo cero les dio 5 coulomb.

FIGURA 2

Grupo control: etapa C del evento 1

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. It starts with the equation $q(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{600}{s(20s+100)} \right\}$. Below this, it shows an incorrect decomposition: $q(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+30} + \frac{6}{s} \right\}$. The next line shows the resulting function: $q(t) = -e^{-30t} + 6$. The final line shows the derivative: $i(t) = 30 e^{-(30t)}$. The work is written in black ink on a light-colored background.

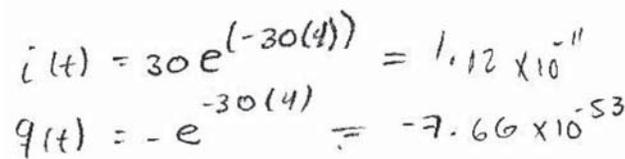
De esta manera, al no obtener una descomposición en fracciones parciales correcta, el desarrollo procedimental en esta etapa se evaluó, en términos de la rúbrica, como “regular”.

Como consecuencia de lo anterior, en la etapa D se presentó un resultado incorrecto en la descripción tanto de la carga en el capacitor como

de la corriente en función del tiempo. En cuanto a determinar el tiempo en que la carga del capacitor era de 4 coulomb no hubo comprensión de lo que se pidió, ya que hicieron una sustitución en la carga y la corriente para el valor de $t=4$, en vez de calcular el tiempo (figura 3).

FIGURA 3

Grupo control: etapa D del evento 1



$$i(t) = 30 e^{(-30(4))} = 1.12 \times 10^{-11}$$

$$q(t) = -e^{-30(4)} = -7.66 \times 10^{-53}$$

Aunado a lo anterior, es importante notar que los estudiantes no manejaron las unidades de medida para la carga y la corriente, lo que podría representar una falta de conocimiento del área de contexto del evento, por lo que en esta etapa obtuvieron, una evaluación de “regular”.

En relación con la etapa E, se observa nuevamente una falta de comprensión del problema puesto que la carga en el capacitor al inicio es de 0 coulomb, contrario a lo que presentaron los alumnos en la gráfica donde se observa que la carga es de 5 coulomb; es decir, es incorrecta; sin embargo la gráfica de la corriente en función del tiempo es acertada (figura 4), ya que:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

y como la carga correcta es $q(t) = -6e^{-5t} + 6$ y la incorrecta es $q(t) = -e^{-30t} + 6$, la derivada de la carga en ambos casos da el coeficiente de la corriente de “30” y la gráfica de e^{-5t} en relación con la gráfica de e^{-30t} , se observan prácticamente iguales. Este resultado de la corriente permitió que los estudiantes presentaran correctamente el cálculo de los límites pedidos (figura 5), los cuales indican hacia qué valor se estabilizan la carga y la corriente conforme transcurre el tiempo. De esta forma, el procedimiento en cuanto al trazo de las gráficas se puede evaluar como “bueno” y en cuanto al cálculo de los límites, “muy bueno”.

FIGURA 4

Grupo control: gráficas etapa E del evento 1

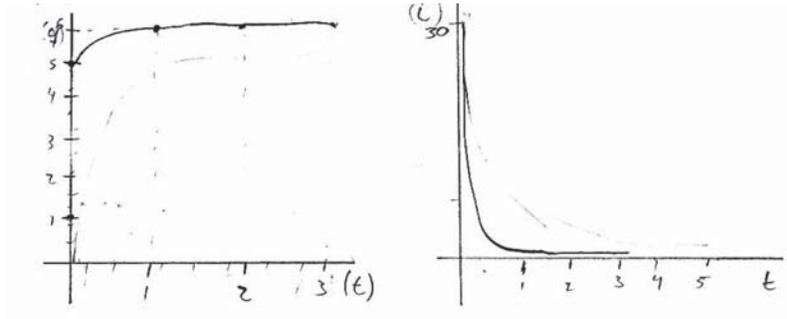


FIGURA 5

Grupo control: cálculos etapa E del evento 1

b) Describa el comportamiento de $q(t)$ conforme t crece e indique cual es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$.

$$-f \frac{-5t}{+6} = 6$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$ crece y el límite es 6

c) Describa el comportamiento de $i(t)$ conforme t crece e indique cual es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$

$$30 e^{(-50t)}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$ el límite es 0

d) ¿Cómo describirías el comportamiento de la relación entre $q(t)$ e $i(t)$ conforme pasa el tiempo?

la carga aumenta y se estabiliza en 6 amperios que la intensidad disminuye exponencialmente a cero.

Grupo experimental

En la etapa C, los estudiantes del grupo experimental usaron adecuadamente la transformada de Laplace para convertir la ecuación diferencial en una algebraica y efectuaron procedimientos adecuados para determinar la variable $Q(s)$; después emplearon el *software* para efectuar el cálculo de descomposición en fracciones parciales, prerequisite (figura 6), obte-

niendo de manera correcta, rápida y sin error el resultado, a diferencia del grupo control que al hacerlo a mano estuvo sujeto a cometer errores por las deficiencias previas con que contaba y, además, no se percató de ello. Posteriormente, calcularon la transformada inversa de dicha descomposición obteniendo correctamente la carga y la corriente en función del tiempo (figura 7). De este modo, la etapa C se evaluó como “muy buena”.

FIGURA 6

Grupo experimental: fracciones parciales con software en el evento 1

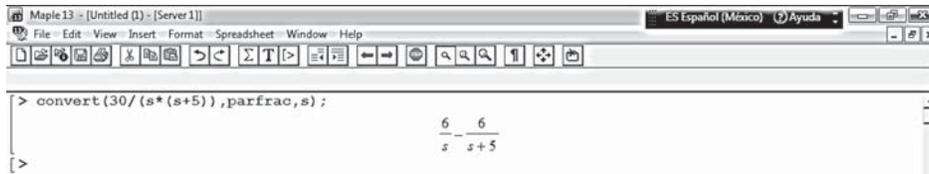


FIGURA 7

Grupo experimental: etapa C del evento 1

$$Q(s) = \frac{30}{s(s+5)}$$

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{30}{s(s+5)} \right\}$$

$$> \text{convert} \left(\frac{30}{s(s+5)}, \text{parfrac}, s \right);$$

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{6}{s+5} + \frac{6}{s} \right\}$$

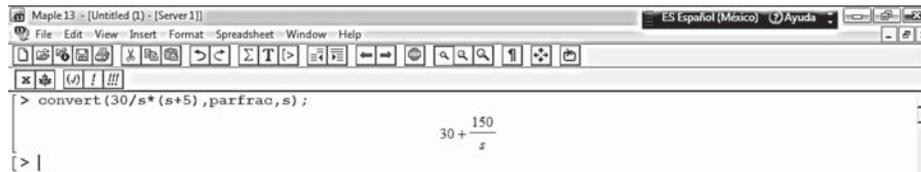
$$q(t) = -6e^{-5t} + 6$$

$$i(t) = 30e^{-5t}$$

Es importante aclarar que el hecho de usar el *software* no exime a los estudiantes de cometer errores de los cuales pudieran no percatarse, sin embargo, el mérito es emplearlo adecuadamente en cuanto a la sintaxis. En el cálculo anterior los alumnos pudieron omitir algún paréntesis, lo que los llevaría a obtener otro resultado. Por ejemplo en la figura 8 se muestra un cálculo erróneo.

FIGURA 8

Ejemplo de uso incorrecto del software



Respecto de la etapa D, como ya se comentó, los alumnos obtuvieron la carga y la corriente en función del tiempo de manera correcta y realizaron un manejo algebraico adecuado al usar las propiedades de los logaritmos y exponenciales para determinar el valor del tiempo cuando la carga en el capacitor es de 4 coulomb (figura 9). Aquí es importante mencionar dos aspectos:

- 1) aun cuando se puede realizar el cálculo del tiempo en que la carga es de 4 coulomb usando el *software*, como se muestra en la figura 10, los estudiantes lo efectuaron de forma algebraica y empleando la calculadora, mostrando con ello un buen manejo procedimental matemático; y
- 2) a diferencia del grupo control, los estudiantes del experimental manejaron las unidades de medida correspondientes a la carga y al tiempo, lo que representa tener un mejor conocimiento del área de contexto del evento.

FIGURA 9

Grupo experimental: etapa D del evento 1

4. Determinación de la solución requerida por el evento.

- La carga en cualquier instante de tiempo esta dada por $q(t) = -6e^{-5t} + 6$
- La intensidad de corriente en cualquier instante de tiempo esta dada por $i(t) = 30e^{-5t}$
- El valor de $q = 4C$, se da en el instante de tiempo de 0.21 segundos

$$4 = -6e^{-5t} + 6$$

$$\ln\left(\frac{4-6}{-6}\right) = -5t$$

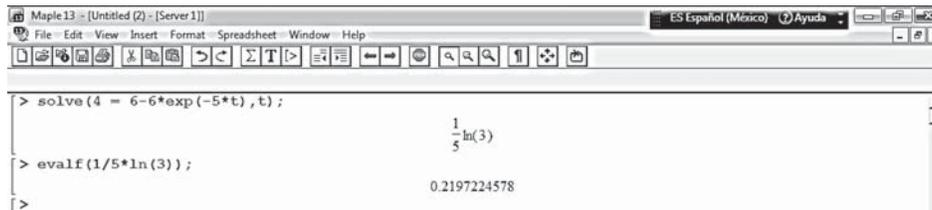
$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -5t$$

$$t = \frac{\ln(1/3)}{-5}$$

$$t = 0.21$$

FIGURA 10

Grupo experimental: cálculos con software en el evento 1

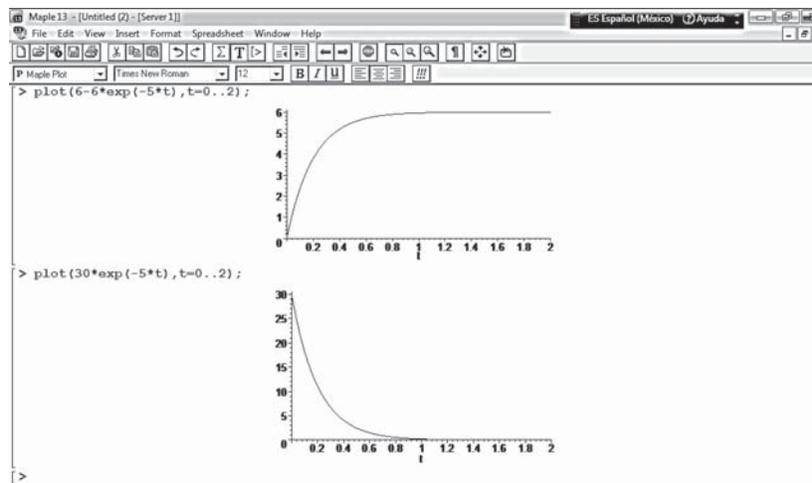


Dado que los alumnos presentaron la solución requerida completa y correcta, esta etapa se evaluó como “muy buena”.

En la etapa E, con la ayuda del *software*, los estudiantes describieron de manera correcta las gráficas de la corriente y la carga en función del tiempo (figura 11). Además, calcularon acertadamente los límites pedidos (figura 12). De esta forma, se evaluó el resultado como “muy bueno”.

FIGURA 11

Grupo experimental: gráficas etapa E del evento 1



El cuadro 3 describe el desarrollo alcanzado en cada etapa del evento 1 en términos de la rúbrica definida anteriormente, donde se puede apreciar un mejor desarrollo procedimental en el grupo experimental que en el control

en las etapas C, D y E, donde la diferencia más considerable se presentó para las etapas C y D.

FIGURA 12

Grupo experimental: cálculos etapa E del evento 1

b) Describa el comportamiento de $q(t)$ conforme t crece e indique cual es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$.

Después de 1 segundo la carga se mantiene constante en cualquier instante de tiempo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 6 \text{ C}$$

c) Describa el comportamiento de $i(t)$ conforme t crece e indique cual es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$.

Después de irse descargando en transcurrir 1s la intensidad de corriente se mantiene constante en cualquier instante de tiempo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \text{ A}$$

d) ¿Cómo describirías el comportamiento de la relación entre $q(t)$ e $i(t)$ conforme pasa el tiempo?

Conforme pasa el tiempo la carga se incrementa hasta alcanzar su valor para después permanecer constante, esto es, contrario a la corriente que se va descargando y después de pasar 1 segundo se mantiene constante con una intensidad mínima y LUEGO llegar a ser cero.

CUADRO 3

Concentrado de la evaluación para el evento 1

Evento 1	Etapas				
	A	B	C	D	E
	Determinación de constantes y variables	Determinación del modelo matemático	Solución matemática del evento	Determinación de la solución requerida por el evento	Interpretación de la solución en término del evento: Trazo de gráficas Cálculo de límites
Grupo control	Regular	Bueno	Regular	Regular	Bueno Muy bueno
Gpo. experimental	Regular	Bueno	Muy bueno	Muy bueno	Muy bueno Muy bueno

En este evento, el grupo experimental mostró un desarrollo procedimental completo y acertado; lo que no ocurrió con el de control, que mostró procedimientos incorrectos en: *a)* efectuar la descomposición en fracciones parciales para determinar la carga del circuito, *b)* establecer la carga en función del tiempo, *c)* determinar para qué tiempo el valor de la carga es de 4 coulomb y *d)* elaborar la gráfica de la carga en función del tiempo.

Las principales diferencias se identificaron cuando se pidió hacer una descripción del comportamiento de la carga y la corriente conforme pasa el tiempo, el grupo control no contestó y el experimental dio una descripción detallada y aceptable al manifestar que después de 1 seg la carga permanece con un valor constante de 6 y la corriente con un valor constante de 0, sin mencionar las unidades de medida correspondientes. También hubo diferencias en las etapas C, D y E debido a que los alumnos dispusieron de más tiempo para reflexionar e interpretar mejor el evento cuando usaron el *software*.

Análisis de resultados del evento 2

Grupo control

En la etapa C, los estudiantes del grupo control aplicaron la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial y la convirtieron de manera correcta en una ecuación algebraica en términos de $Q(s)$, expresada por medio de la fracción:

$$\frac{11s}{(6s + 1)(5s + 10)}$$

Luego, cuando quisieron obtener la carga del capacitor en función del tiempo, es decir $q(t)$, necesitaron descomponer la fracción mencionada en suma de fracciones parciales, y fue aquí donde, al igual que el evento 1, cometieron un error; como se puede apreciar en la figura 13, establecieron un sistema de ecuaciones lineales con la primera ecuación del sistema $A + B = 0$, en lugar de $6A + B = 0$, lo cual los llevó a obtener de manera incorrecta la carga en función del tiempo, esto de manera consecuente implica un cálculo de la corriente incorrecto; pero los estudiantes cometieron dos errores procedimentales, aún más graves: el primero, respecto del cálculo de la transformada inversa de:

$$\frac{1}{6s+1}$$

, que indicaron como e^{-t} en lugar de:

$$\frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}t}$$

y el segundo sobre el cálculo de la corriente al derivar la carga, al escribir $i(t) = -115e^{-2t} + 11.5e^{-t}$ en lugar de $i(t) = -115e^{-10t} + 11.5e^{-t}$, como se puede apreciar en la figura 13. De esta forma, esta etapa se evaluó según la rúbrica como “regular”.

FIGURA 13

Grupo control: etapas C y D del evento 2

$$f(s) = \frac{115}{(6s+1)(s+10)} = \frac{A}{s+10} + \frac{B}{6s+1} = 6As + A + Bs + 10B = 115$$

$$+ 11.5 \left(\frac{1}{s+10} \right) - 11.5 \left(\frac{1}{6s+1} \right)$$

$$q(t) = +11.5 e^{-10t} - 11.5 e^{-t}$$

$$i(t) = -115 e^{-2t} + 11.5 e^{-t}$$

$$(A+B=0) - 10$$

$$A + 10B = 115$$

$$-10A - 10B = 0$$

$$-10A = 115$$

$$A = -115/-10$$

$$A = 11.5$$

$$11.5 + B = 0$$

$$B = -11.5$$

En la etapa D, como se mencionó, las fórmulas que obtuvieron los alumnos para la carga y la corriente en función del tiempo fueron incorrectas; tampoco respondieron cuál es la carga máxima del capacitor y en qué tiempo se obtiene ni cuál es el valor de la corriente cuando la carga en el capacitor es máxima. Así, esta etapa se evaluó como “deficiente”.

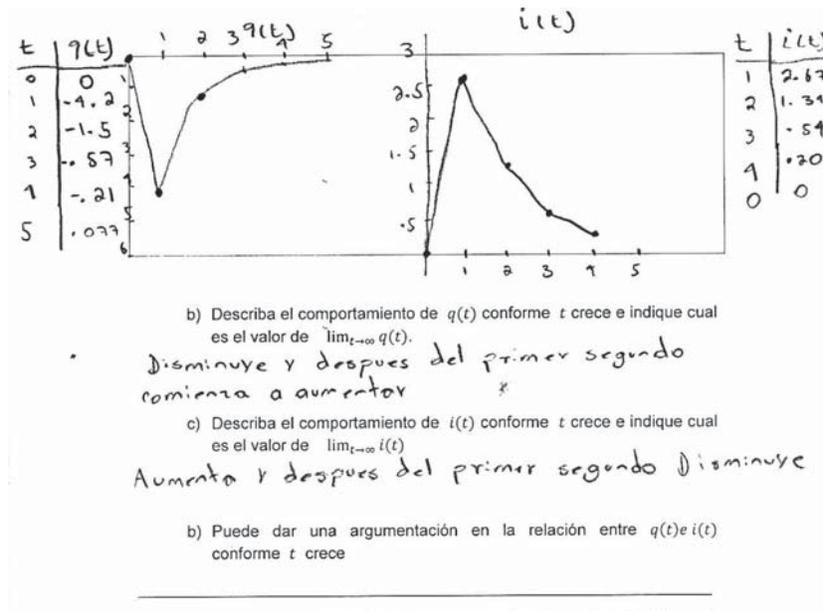
En la etapa E los alumnos presentaron de manera incorrecta e imprecisa el trazo de las gráficas de la carga y de la corriente en función del tiempo; tampoco calcularon los límites pedidos. De esta manera, se evaluó como “deficiente” y “nulo” el desarrollo procedimental en elaboración de gráficas y cálculo de límites, respectivamente (figura 14).

Es importante observar que existió una falta de conocimiento del área de contexto del evento ya que, según muestra la figura 14, durante el primer

segundo fluye corriente en el circuito de manera positiva y ascendente lo que implicaría un aumento en la carga del capacitor, sin embargo, lo que se observa en la figura es una pérdida de carga.

FIGURA 14

Grupo control: etapa E del evento 2



Grupo experimental

En la etapa C, los estudiantes del grupo experimental aplicaron la transformada de Laplace y convirtieron la ecuación diferencial en algebraica con un error de notación al calcular las transformadas de $q(s)$ y

$$\frac{dq}{ds}$$

, escribiendo $I(s)$ en lugar de $Q(s)$, al parecer, el error se cometió por la relación entre la carga y la corriente, esto es:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

; después usaron el *software* para hacer la descomposición en fracciones parciales que fue correcta (figura 15). Posteriormente, ya sin el uso del programa, a diferencia del grupo control, los del experimental efectuaron adecuadamente el cálculo de la transformada inversa de Laplace de $Q(s)$ y el cálculo de la derivada para obtener la corriente, de esta manera, se presenta correcta la carga y la corriente en función del tiempo (figura 16), así que esta etapa se evaluó como “muy buena”.

FIGURA 15

Grupo experimental: fracciones parciales con software en el evento 2

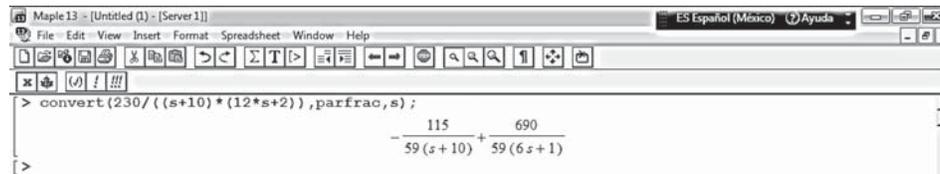


FIGURA 16

Grupo experimental: etapas C y D del evento 2

$$\begin{aligned}
 12 \frac{1}{s} e + 2q &= 230 e^{-10t} \\
 \mathcal{L}\left(12 \frac{1}{s} e\right) + \mathcal{L}(2q) &= \mathcal{L}(230 e^{-10t}) \\
 12 \mathcal{L}\left(\frac{1}{s} e\right) + 2 \mathcal{L}(q) &= 230 \mathcal{L}(e^{-10t}) \\
 12 (s \mathcal{I}(s) - \cancel{10}) + 2 \mathcal{L}(I(s)) &= 230 \frac{1}{s+10} \\
 12s \mathcal{I}(s) + 2 \mathcal{L}(I(s)) &= \frac{230}{s+10} \\
 \mathcal{I}(s)(12s+2) &= \frac{230}{s+10} \\
 \mathcal{I}(s) &= \frac{230}{(s+10)(12s+2)} \quad (\text{convert}(230/((s+10)*(12*s+2)), \text{parfrac}, s); \\
 \mathcal{I}(s) &= \frac{690}{59(6s+1)} - \frac{115}{59(s+10)} \\
 \mathcal{I}(s) &= \frac{690}{59} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{6s+1}\right\} - \frac{115}{59} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+10}\right\} \\
 \mathcal{I}(s) &= 11.69 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{6(s+\frac{1}{6})}\right\} - 1.94 e^{-10t} \\
 q(t) &= 1.94 e^{-\frac{t}{6}} - 1.94 e^{-10t} \\
 i(t) &= -0.23 e^{-\frac{t}{6}} + 19.40 e^{-10t}
 \end{aligned}$$

Una ventaja importante de emplear el *software* para el cálculo de fracciones parciales fue que le permitió al grupo experimental disponer de mayor tiempo para efectuar el cálculo de la transformada inversa y de derivadas de manera correcta, a diferencia de quienes no lo usan y tienen deficiencias en prerrequisitos, que pueden tener equivocaciones y algunas veces no por falta de conocimiento, sino por errores “de dedo” o, simplemente, no se percatan de ello, lo que los lleva a mostrar resultados incorrectos.

En la etapa D, a pesar de la confusión entre las variables anteriores, como ya se comentó, con el uso del *software* se calculó el valor máximo de la carga, como se muestra en la figura 17, que es de 1.779 coulomb cuando $t = 0.41$ seg.

FIGURA 17

*Grupo experimental:
cálculo del valor máximo con software en el evento 2*

```
Maple13 - [Untitled (1)] - [Server1]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[115/59/(s+10)+630/59/16*s+1]
> maximize((1.94)*exp((-1/6)*t)-(1.94)*exp(-10*t), t=0..(0.5), location);
1.779771854, {[t=0.4163740233], 1.779771854}
[> |
```

Sin embargo, los estudiantes sí indicaron el valor de la corriente cuando la carga es máxima, al expresar “cuando la carga es máxima la intensidad es cero” (figura 18), lo que significa que el grupo experimental, a diferencia del control, tuvo un mejor conocimiento del área del contexto del evento. De esta forma, el desarrollo procedimental en esta etapa se evaluó como “bueno”.

En la etapa E, a diferencia del grupo control, los estudiantes del experimental, con la ayuda del *software*, describieron de manera precisa y correcta las gráficas de la carga y la corriente en función del tiempo (figura 19). Es necesario aclarar que el buen resultado no solo se obtuvo por el uso del programa, pues igualmente las gráficas pudieron ser erróneas por no utilizar una sintaxis adecuada. Después, los estudiantes calcularon correctamente los límites pedidos sin el uso del *software*, y la etapa fue evaluada como “muy buena”, tanto en el trazo de gráficas como en el cálculo de límites, como se identifica en la figura 18.

FIGURA 18

Grupo experimental: cálculos etapa E del evento 2

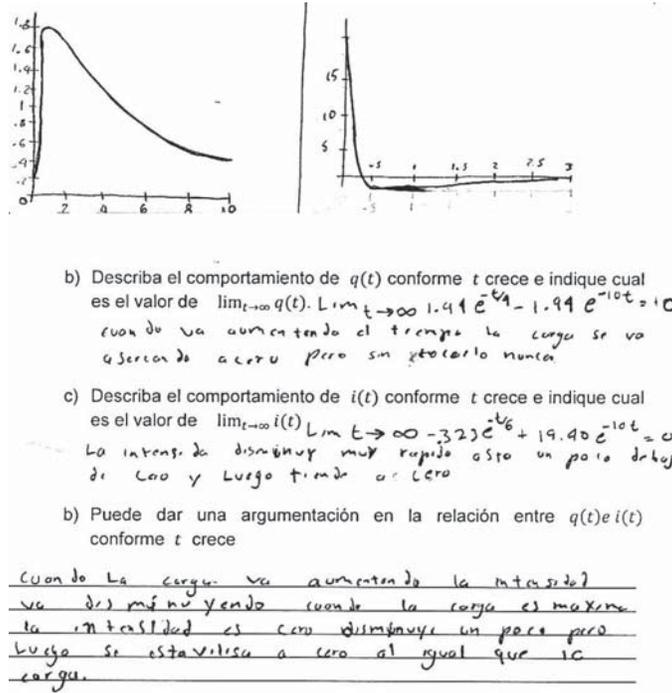
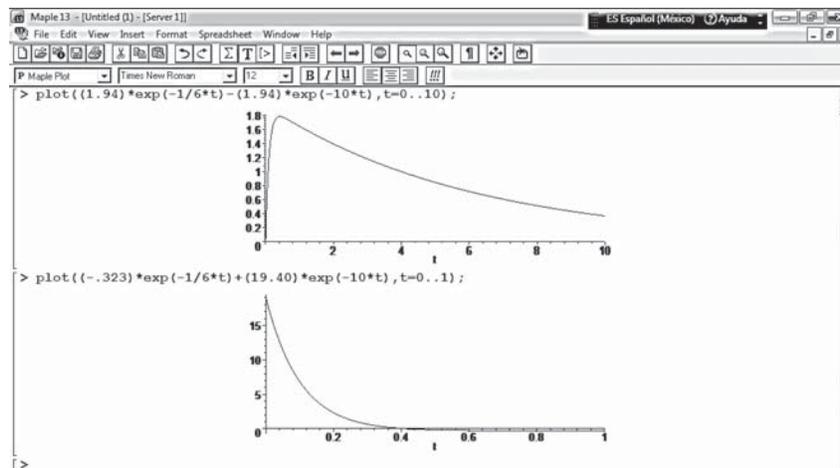


FIGURA 19

Grupo experimental: gráficas etapa E del evento 2



El cuadro 4 describe el desarrollo alcanzado en cada etapa del evento 2, donde se puede apreciar de nuevo un mejor desarrollo procedimental en el grupo experimental que en el de control, en cada una de las etapas B, C, D y E, teniendo una diferencia más considerable en las C, D y E.

CUADRO 4

Concentrado de la evaluación para el evento 2

Evento 2	Etapas					
	A	B	C	D	E	
	Determinación de constantes y variables	Determinación del modelo matemático	Solución matemática del evento	Determinación de la solución requerida por el evento	Interpretación de la solución en término del evento Trazo de gráficas Cálculo de límites	
Gpo. control	Regular	Bueno	Regular	Deficiente	Deficiente	Nulo
Gpo. experimental	Regular	Muy bueno	Muy bueno	Bueno	Muy bueno	Muy bueno

En este evento, el grupo experimental no contestó para qué valor de t la carga en el capacitor es máxima, por lo demás obtuvo un desarrollo procedimental completo y correcto. Mientras que el grupo control mostró procedimientos incorrectos en: *a)* efectuar la descomposición en fracciones parciales para determinar la carga en el circuito, *b)* determinar la carga y la corriente en función del tiempo, *c)* determinar para qué tiempo el valor de la carga en el capacitor es máxima, y *e)* elaborar las gráficas de la carga y la corriente en función del tiempo.

En cuanto a la descripción del comportamiento de la carga y la corriente conforme pasa el tiempo, el grupo de control contestó de manera breve y errónea con base en las gráficas obtenidas; mientras que el experimental, aunque su descripción fue incompleta, respondió acertadamente, debido a que las gráficas obtenidas eran correctas. En cuanto a la descripción de la relación entre la carga y la corriente conforme pasa el tiempo, de nuevo ninguno de los dos grupos la expresó; de manera similar al evento 1, mostraron el comportamiento de la carga y la corriente en función del tiempo en cada una de ellas por separado.

Análisis de resultados del evento 3

Grupo control

En cuanto a la etapa C, los estudiantes del grupo control aplicaron la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y convirtieron de manera correcta la ecuación diferencial en una algebraica en términos de $Q(s)$, expresada por medio de la fracción:

$$\frac{1500}{(s^2+25)(4s+10)}$$

Después efectuaron acertadamente la descomposición en fracciones parciales y la aplicación de la transformada inversa de Laplace para obtener la carga del capacitor en función del tiempo, esto es $q(t)$, como se muestra en la figura 20, por lo que en esta etapa obtuvieron un desarrollo procedimental “muy bueno”.

FIGURA 20

Grupo control: etapa C del evento 3

Handwritten work showing the partial fraction decomposition of $F(s) = \frac{1500}{(s^2+25)(4s+10)}$ and the inverse Laplace transform to find $q(t)$.

The decomposition is shown as:

$$F(s) = \frac{1500}{(s^2+25)(4s+10)} = \frac{As+B}{s^2+25} + \frac{C}{4s+10}$$

The partial fractions are then written as:

$$\frac{-12s+30}{s^2+25} + \frac{48}{4s+10}$$

The inverse Laplace transform is calculated as:

$$q(t) = 12 \cos 5t + 6 \sin 5t + 12 e^{-5/2t}$$

The system of equations for the partial fractions is:

$$\begin{aligned} 4As^2 + 10As + 4Bs + 10B + Cs^2 + 25C &= 1500 \\ 4A + C &= 0 \\ 10A + 4B &= 0 \\ 10B + 25C &= 1500 \end{aligned}$$

The solutions for the constants are:

$$\begin{aligned} A &= -30 \\ B &= +30 \\ C &= 48 \end{aligned}$$

En la etapa D, como se mencionó anteriormente, los estudiantes obtuvieron correctamente la carga en función del tiempo así como la corriente en función del tiempo y determinaron la carga en el capacitor en el tiempo de 5 seg; aunque no describieron las unidades de medida correspondientes a la carga, como también se ha apuntado, puede representar una falta del área de contexto (figura 21). De esta forma, el desarrollo en procedimientos en esta etapa se evaluó como “muy bueno”.

Respecto de la etapa E, las gráficas mostradas en la figura 22 son incorrectas y no calculan los límites pedidos, obteniendo evaluaciones de “deficiente” y “nulo”, respectivamente.

FIGURA 21

Grupo control: etapa D del evento 3

$$q(t) = -12 \cos 5t + 6 \sin 5t + 12e^{-5/2t}$$

$$q(5) = -12 \cos 5(5) + 6 \sin 5(5) + 12e^{-5/2(5)}$$

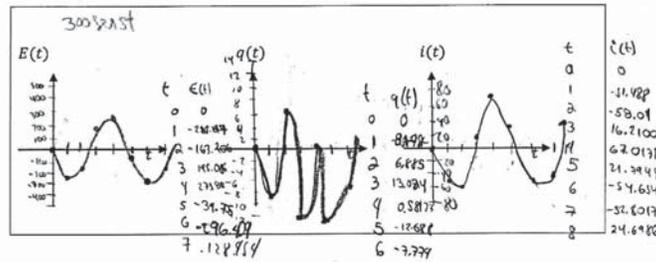
$$= -12.688$$

$$i(t) = 60 \sin 5t + 30 \cos 5t - 30e^{-5/2t}$$

Es importante mencionar que el manejo de la calculadora fue adecuado, los estudiantes utilizaron el modo radianes, también los cálculos en las tabulaciones fueron correctos; el problema que se observa es lo acostumbrado que están los alumnos a utilizar, por lo general, solo números enteros en la tabulación, por ejemplo, se puede apreciar que la evaluación en 1 seg en las tres funciones es correcta, dan números negativos, pero en el intervalo de 0 a 1 también existen valores positivos, de lo cual el alumno no se percató, es decir, faltó hacer una tabulación más fina de la que está acostumbrado.

FIGURA 22

Grupo control: etapa E del evento 3



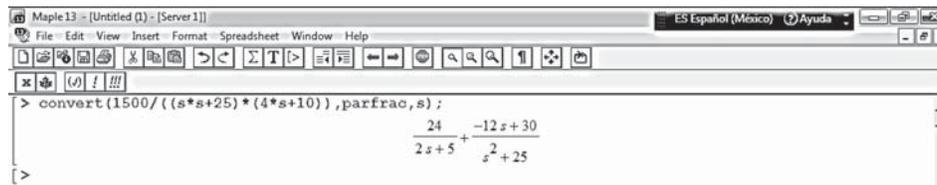
- b) Describa el comportamiento de $q(t)$ conforme t crece e indique cual es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$.
 Es una forma senoidal los valores oscilan entre ≈ 13 y ≈ -13
- c) Describa el comportamiento de $i(t)$ conforme t crece e indique cual es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$.
 Es una forma senoidal donde los valores oscilan entre ≈ 68 y ≈ -68
- d) Puede dar una argumentación en la relación entre $q(t)$ e $i(t)$ conforme t crece
 mientras crece el t , la $q(t)$ y $i(t)$ se comportan con forma senoidal, oscilan entre los valores de ≈ 13 y ≈ -13 respectivamente

Grupo experimental

En la etapa C, los estudiantes obtuvieron un desarrollo procedimental “muy bueno”, ya que transformaron de forma correcta la ecuación diferencial en algebraica y efectuaron procedimientos adecuados para determinar la variable $Q(s)$; después usaron el *software* para hacer la descomposición en fracciones parciales (figura 23), cuyo cálculo fue acertado; posteriormente tomaron la transformada inversa de dicha descomposición obteniendo correctamente la carga y la corriente en función del tiempo (figura 24).

FIGURA 23

Grupo experimental: fracciones parciales con software en el evento 3



En la etapa D, el desarrollo procedimental se evaluó como “muy bueno”, ya que los alumnos obtuvieron de manera correcta la carga y la corriente en función del tiempo y se encontró el valor de la carga en $t=5 \text{ seg}$ (figura 24). Cabe mencionar que a diferencia del grupo control, el experimental usó acertadamente las unidades de medida de la carga.

FIGURA 24

Grupo experimental: etapas C y D del evento 3

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{24}{2s+5} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-12s+30}{s^2+25} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{30}{s^2+25} \right\} \\
 & 12 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\frac{5}{2}} \right\} \qquad \qquad \qquad \frac{30}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s^2+25} \right\} \\
 & 300 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+25} \right\} = 4 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + 10 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \\
 & 300 \left(\frac{5}{s^2+25} \right) = 4s Q(s) + 10 Q(s) \\
 & \frac{1500}{s^2+25} = Q(s) (4s+10) \\
 & q(t) = 12 e^{-\frac{5}{2}t} - 12 \cos 5t + \frac{30}{5} \sin 5t \\
 & i(t) = -30 e^{-\frac{5}{2}t} + 60 \sin 5t + 30 \cos 5t \\
 & q(5) = -12.68 \text{ C}
 \end{aligned}$$

Respecto de la etapa E, con la ayuda del *software*, trazaron las gráficas pedidas de manera precisa y correcta como se muestra en la figura 25, pero no calcularon los límites pedidos (figura 26), por lo que esta etapa se evaluó como “muy bueno” y “deficiente”, respectivamente.

FIGURA 25

Grupo experimental: gráficas etapa E del evento 3

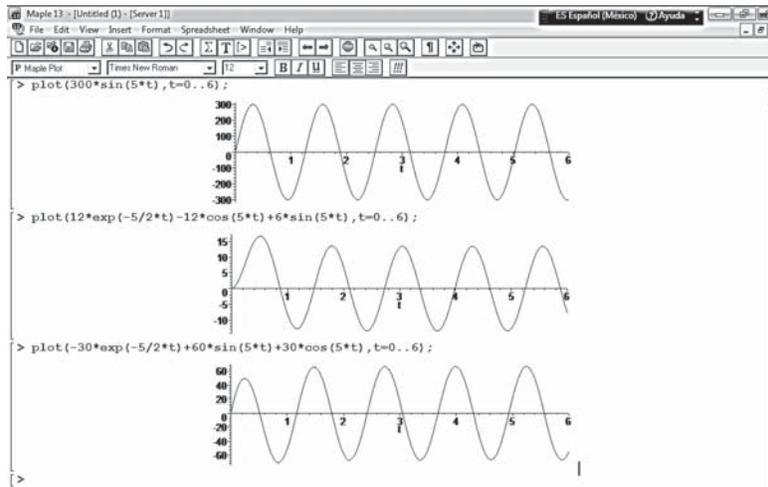


FIGURA 26

Grupo experimental: cálculos etapa E del evento 3

b) Describa el comportamiento de $q(t)$ conforme t crece e indique cual es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$.
 Durante los primeros 0.42 seg. alcanza su mayor punto que es ≈ 15 , luego su valor sigue una onda senoidal pero no vuelve a llegar hasta 15.

c) Describa el comportamiento de $i(t)$ conforme t crece e indique cual es el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$.
 Es una onda senoidal pero, antes del seg 1 alcanza su valor ≈ 60 , al pasar 1 seg forma ondas en las que su valor max es ≈ 60 , al pasar el tiempo el valor de $i(t)$ sigue cambiando pero no se va a 0.

d) Puede dar una argumentación en la relación entre $q(t)$ e $i(t)$ conforme t crece.
 Que conforme pasa el tiempo el valor pico de la carga disminuye, mientras el de la corriente aumenta, pero no es mucha la variación de las dos.

El cuadro 5 describe el desarrollo alcanzado en cada etapa del evento 3, se puede apreciar un desarrollo procedimental muy parejo, hubo diferencia solo en la etapa E en cuanto al trazo de las gráficas con evaluación de “deficiente” a “muy bueno” en los grupos de control y experimental, respectivamente.

CUADRO 5
Concentrado de la evaluación para el evento 3

Evento 3	Etapas 1	2	3	4	5		
	Determinación de constantes y variables	Determinación del modelo matemático	Solución matemática del evento	Determinación de la solución requerida por el evento	Interpretación de la solución en término del evento	Trazo de gráficas	Cálculo de límites
Grupo control	Regular	Bueno	Muy bueno	Muy bueno	Deficiente	Nulo	
Grupo experimental	Regular	Bueno	Muy bueno	Muy Bueno	Muy bueno	Nulo	

En cuanto a la descripción del comportamiento de la carga y la corriente conforme pasa el tiempo, el comportamiento final de las gráficas les permitió a los alumnos hacer una buena conclusión en ambos casos, sin embargo, el grupo control no lo describió de manera precisa, situación contraria al experimental que pudo dar precisión en la gráfica y entender el fenómeno en intervalos de tiempo significativamente cortos, situación casi imposible cuando se dibuja manualmente. En cuanto a la descripción de la relación entre la carga y la corriente conforme pasa el tiempo, de manera similar a los eventos anteriores, ambos grupos no lograron descubrir y describir dicha relación.

Conclusiones

Se puede apreciar en el concentrado mostrado en los cuadros 3, 4 y 5 que en las etapas C, D y E existe, en general, una diferencia considerable en cuanto al desarrollo procedimental en favor del grupo experimental.

De esta manera se puede concluir que el uso de *software* para apoyar los procesos operacionales en prerrequisitos favorece el desarrollo de las habilidades operativas de los conceptos por aprender, porque los alumnos pueden enten-

der mejor cuando hay precisión, tanto en los cálculos como en las gráficas, y tienen menos distractores para concentrarse en los conceptos que tienen que construir; es decir, su atención puede estar fija en el objeto de aprendizaje.

Además, de acuerdo con la experiencia docente, se sabe que conforme avanza el conocimiento de una persona, no se detiene a desarrollar habilidades que debió haber desarrollado y que no necesita o que la tecnología lo puede hacer fácilmente, porque se encuentra una gran variedad de *software* libre.

En cuanto el desarrollo de la operacionalización de procesos que presentaron los estudiantes de ambos grupos en la resolución de los eventos de transformada de Laplace contextualizada en circuitos eléctricos, con base en la fase didáctica de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, se observa que disponer de un *software* matemático como herramienta en cálculos operacionales y elaboración de gráficas correspondientes a prerrequisitos, le permite al alumno, respecto de la resolución de eventos contextualizados:

- 1) Ser más eficaz porque puede contar con la elaboración de gráficas, donde intervienen intervalos de tiempo muy cortos, situación compleja de graficar manualmente.
- 2) Ser más eficientes, ya que efectuar cálculos operacionales y graficar con el *software* representa para los alumnos un ahorro muy significativo en tiempo, ya que pueden dedicarse a cuestiones como interpretar y obtener la solución requerida por el evento, propiciando con esto una mejor comprensión e interpretación del evento en el contexto de los circuitos eléctricos, así como de los conceptos nuevos involucrados.

Sobre la base de lo expuesto, se puede afirmar la pregunta de investigación; es decir, que el uso de *software* matemático para prerrequisitos favorece el desarrollo de las habilidades operacionales en conceptos nuevos para resolver eventos de la transformada de Laplace en el contexto de los circuitos eléctricos.

Referencias

- Accostupa H., J. (2009). *Propuesta didáctica para las funciones sinusoidales de la forma $f(x)=A+B\text{Sen}(Cx+D)$ en el contexto de los circuitos eléctricos del área de la Ingeniería*, tesis de magíster en Enseñanza de las matemáticas, Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Academia de Ingeniería (2014). *Formación de ingenieros en México*, Ciudad de México: Academia de Ingeniería.
- Alanís J., A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo*, tesis doctoral, Ciudad de México: Cinvestav-IPN.

- Alvarado P., Y. (2008). *Análisis del significado de la solución de las ecuaciones diferenciales lineales en la volatilización de compuestos orgánicos*, tesis de maestría en Orientación educativa, Pachuca: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Camarena G., P. (1984). "El currículo de las matemáticas en ingeniería", *Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN*, Ciudad de México: IPN.
- Camarena G., P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*, Ciudad de México: ESIME-IPN.
- Camarena G., P. (2001). *Modelos matemáticos como etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería*, reporte de proyecto de investigación, número: CGPI-IPN: 200731, Ciudad de México: ESIME-IPN.
- Camarena G., P. (2002a). "Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería" [primera parte], *Innovación Educativa* (México), vol. 2, núm. 10, pp. 22-28.
- Camarena G., P. (2002b). "Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería" [segunda parte], *Innovación Educativa* (México), vol. 2, núm. 11, pp. 4-12.
- Camarena G., P. (2008). "Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias", *Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*, Conferencia Magistral, pp. 83-107, Lima, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Camarena G., P. (2013a). "A treinta años de la teoría educativa Matemática en el Contexto de las Ciencias", *Innovación Educativa*, vol. 13, núm. 62, pp. 17-44.
- Camarena G., P. (2013b). "El conocimiento de las ciencias básicas en profesores de ingeniería", en Carrillo A. J.; Ontiveros, H. V. y Ceceña T. P. (eds.), *Formación docente: Un análisis desde la práctica*, México: Red Durango de Investigadores Educativos, A. C., pp. 212-249.
- Costa, V.; Di, R. y Vacchino, M. (2010). "Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del cálculo integral y vectorial", *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, núm. 21, pp. 173-185.
- De Pavia, I. P. (2006). *Desarrollo de habilidades del pensamiento para la matemática en el contexto de las ciencias*, tesis de maestría en Ciencias en matemática educativa, Ciudad de México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología-IPN.
- Escudero, R.; Llinas, H.; Obeso, V. y Rojas C. (2004). "Influencia de la tecnología en el aprendizaje de las asignaturas: cálculo diferencial y estadística descriptiva", *Primer Congreso Internacional de Educación Mediada con Tecnologías*, Barranquilla, 6-8 de octubre.
- Flores A., I. P. y Camarena G., P. (2012). "La interdisciplinariedad: nivel superior", en Gutiérrez R., D.; Cenicerros D., C. y Monárrez V., H. (coords.) *Procesos de enseñanza y aprendizaje: estudios en el ámbito de la educación media superior y superior*, col. Experiencias de investigación. Puntos de encuentro con el campo de la educación, tomo III, México: Red Durango de Investigadores Educativos A. C., pp. 150-167.
- Galán, J. L. (2003). *Integrales múltiples con Derive. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería técnica de telecomunicación*, tesis doctoral, Málaga: Universidad de Málaga.
- García R., M. y Camarena G., P. (2007). "La tecnología como herramienta cognitiva en la matemática contextualizada", *Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Mérida, Yucatán: COMIE.

- Maita Guedez, M. (2005). "El aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo: una experiencia didáctica con estudiantes de educación de la ULA-Táchira", *Acción Pedagógica*, vol. 14, núm. 1, pp. 38-49.
- Meza, L. (2001). "Estrategias didácticas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática asistida por computadora", *Memorias del II Congreso Internacional asistido por computadoras*, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Miranda, E. (2001). *Entendimiento de la transformada de Laplace*, tesis de doctorado en el área de Educación Matemática, Ciudad de México: Cinvestav-IPN.
- Muro, U. C. (2004). *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa*, tesis doctoral, Ciudad de México: IPN.
- Neira, F. V. (2012). *Modelación de problemas contextualizados usando sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: basado en el enfoque de la Matemática en el Contexto de las Ciencias*, tesis de magister en Enseñanza de las matemáticas, Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Olazábal, C. A. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto*, tesis de maestría en Ciencias en matemática educativa, Ciudad de México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN.
- Rojas B., J. (2008). *Aplicación de los campos de Galois en el contexto de la corrección y detección de errores en comunicaciones basadas en los códigos BCH, con un enfoque didáctico*, tesis de maestría en Telecomunicaciones, Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional.
- Rueda V., R. y Camarena G., P. (2006). *Modelo curricular para modalidades educativas alternativas: modelo didáctico*, tomo II, col. Libros de modalidades educativas alternativas del Instituto Politécnico Nacional, vol. II, Ciudad de México: DINME-IPN.
- Sauza T., M. (2006). *Una propuesta didáctica del análisis matemático en el contexto de la ingeniería de control*, tesis de maestría en Orientación educativa, Pachuca: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Suárez B., V. y Camarena G., P. (2000). "La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería", *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (República Dominicana), vol. 13, pp. 124-130.
- Trejo T., E. (2005). *La ecuación diferencial en el contexto de las reacciones químicas de primer orden*, tesis en maestría en Orientación educativa, Pachuca: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Vilchez, E. (2007). "Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior", *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Universidad de Costa Rica.

Artículo recibido: 26 de marzo de 2015

Dictaminado: 4 de noviembre de 2015

Segunda versión: 16 de noviembre de 2015

Aceptado: 26 de noviembre de noviembre de 2015