Cuadernos del CIMBAGE Nº 15 (2012) 33 - 56

BERNOULLI, DE MOIVRE, BAYES, PRICE Y LOS FUNDAMENTOS DE LA INFERENCIA INDUCTIVA

Alberto H. Landro, Mirta L. González
Centro de Investigaciones en Econometría – IADCOM
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 – 2º piso – Ciudad de Buenos Aires – C1120AAQ - Argentina
alandroar@yahoo.com.ar, mirtagonzalezar@yahoo.com.ar

Recibido 16 de agosto de 2013, aceptado 27 de febrero de 2013

Resumen

Si bien la demostración Bernoulliana del principio intuitivo de que la incertidumbre disminuía en la medida que se incrementaba el número de observaciones y la cuantificación de dicho proceso de aprendizaje obtenida por de Moivre fueron los intentos más importantes, la solución del problema de las causas sólo se obtuvo cuando Price, a partir de la generalización del teorema de Bayes, logró ampliar los alcances de la teoría matemática de la probabilidad como argumento para fundamentar una teoría rigurosa de la inferencia inductiva y refutar el escepticismo de Hume.

Palabras clave: probabilidad, inferencia inductiva, principio de incertidumbre, teorema de Bayes.

BERNOULLI, DE MOIVRE, BAYES, PRICE AND THE FUNDAMENTS OF INDUCTIVE INFERENCE

Alberto H. Landro, Mirta L. González
Centro de Investigaciones en Econometría – IADCOM
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires
Av. Còrdoba 2122 – 2º piso – Ciudad de Buenos Aires – C1120AAQ - Argentina
alandroar@yahoo.com.ar, mirtagonzalezar@yahoo.com.ar

Received August 16th 2012, accepted February 27th 2013

Abstract

The proof of the intuitive principle that states that uncertainty decreases as the number of observations increases and the quantification of the learning process were obtained by de Moivre. However, the solution to the problem of the causes was obtained only when Price, from the generalized Bayes theorem, succeeded in broadening the scope of the mathematical theory of probability as an argument to support a rigorous theory of inductive inference and refute Hume's skepticism.

Keywords: probability, inductive inference, uncertainty principle, Bayes theorem.

1. UNA INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE LAS CAUSAS

En el siglo XVII, por obra de un grupo de pensadores racionalistas (entre los que cabe mencionar a Joseph Glanvill, John Wilkins, Marin Mersenne, Pierre Gassendi, Hugo Grotius, John Tillotson, Robert Boyle y John Locke), a partir del deterioro del criterio de "creencia" en la religión, la filosofía y la ciencia provocado fundamentalmente por las polémicas de la Reforma y la Contrarreforma, se originó un movimiento filosófico conocido como "escepticismo constructivo". Esta corriente coincidió con los escépticos en que la certeza absoluta se encontraba fuera del alcance de cualquier observador, pero admitió sin embargo que este observador poseía la habilidad de explicar el comportamiento de los fenómenos de la naturaleza a un nivel inferior de certeza parcial[1]. Un planteo que se convirtió en el argumento habitual de la apologética de la teología natural, especialmente en Gran Bretaña, y que tuvo su culminación en *The analogy of religion, natural and revealed, to the constitution and course of nature*, de Butler (1736)[2].

La racionalidad pragmática de esta certeza parcial -ubicada entre la certeza dogmática de los escolásticos y los cartesianos, y la duda absoluta de los escépticos- generada por la limitación de los sentidos, la falibilidad de la razón y la infinita complejidad de la naturaleza, obligó a los filósofos racionalistas a emplear un esquema analítico de razonamiento empirista: desde los "efectos evidentes" hacia las "causas ocultas". Ahora bien, dado que este método, basado en un conjunto limitado de observaciones, no permitía la caracterización de la inexplicable naturaleza de la causalidad ni metafísicas generalizaciones, las incipientes inferencias que se obtuvieron resultaron indefectiblemente afectadas por distintos grados de incertidumbre cuya evaluación dio origen al concepto de probabilidad en el marco de una tradición cualitativa.

---

[1] Boyle (1666), por ejemplo, reconoció tres grados de certeza: metafísica (absoluta), física y moral (parciales). Consideraba a la primera como derivada de axiomas que "no pueden ser sino ciertos", a la "certeza física" como "deducida de principios físicos" que podían ser modificados o eliminados por Dios, y a la "certeza moral" como aquella en la que "la conclusión se funda en alguna concurrencia de probabilidades". Entendiendo por "concurrencia de probabilidades" no probabilidades matemáticas, sino la "convicción adicional que proporciona la evidencia convergente" (Daston, L. 1988, pp.63). Es decir, la convergencia a la intersubjetividad.

[2] En esta obra, en la que Butler incorporó además un tipo de razonamiento inductivo y analógico concebido en términos frecuencistas, aparece por primera vez el ejemplo del amanecer. Este ejemplo, utilizado luego por Richard Price, se convirtió en un lugar común en la literatura acerca del papel que desempeña la generalización del teorema de Bayes como fundamento de la inferencia inductiva (ver Landro, 2010).

Posteriormente este razonamiento empirista trasladó su interés de los aspectos cualitativos a los aspectos cuantitativos de la experiencia. Todo este proceso produjo como resultado una teoría de la inferencia inductiva (imperfecta pero necesaria) aplicable a sucesiones de eventos para los cuales la agregación de la experiencia adquirida a partir de su observación repetida se transformaba en formas de expectativa acerca de su comportamiento futuro. Una expectativa entendida como la expresión matemática del concepto de racionalidad[3].

Este intento de cuantificación que, en principio, estuvo a cargo de matemáticos como Pascal y Fermat, se estructuró a partir de la posibilidad de justificar las analogías entre el comportamiento de los fenómenos y los modelos matemáticos disponibles, y la hipótesis metafísica de que dicho comportamiento era constante y ordenado. Fueron los matemáticos del siglo XVIII las que, mediante distintos intentos de cuantificación de las probabilidades *a priori* de las causas, intentaron dar mayor precisión a estos métodos de inferencia y ampliar los alcances de la teoría de la probabilidad como un argumento para refutar el escepticismo de Hume.

2. JAKOB BERNOULLI

En este sentido, la contribución fundamental de Bernoulli -incluida en la "*Pars quarta: Fradens usum et applicationem procedentis doctrinæ in civilibus, moralibus et œconomicis*" del *Ars conjectandi*- consistió en: **i)** a partir del ya mencionado tratamiento cualitativo formal de la idea planteada por los mencionados apologistas ingleses de la teología natural y por Arnauld y Nicole, los lógicos de *Port Royal*, demostrar que el aprendizaje a partir de la experiencia era cuantificable a través de un proceso de transformación de la experiencia objetiva en un grado de creencia subjetivo

ii) asumiendo ciertas hipótesis de simplicidad y regularidad, procurar establecer el nexo entre las probabilidades *a priori* o de inferencia directa (definidas a partir de un razonamiento que va "de las causas a los efectos", de la hipótesis de simetría de los resultados posibles al

---

[3] La primera versión de este tratamiento de la expectativa se halla en "*La logique ou l'art de penser*" (1662) de Arnauld, A.; Nicole, P., obra que constituye el nexo entre la mencionada interpretación cualitativa de los retóricos del escepticismo constructivo y la propuesta de Bernoulli (debe tenerse en cuenta que, como se verá más adelante, el *Ars conjectandi* puede ser considerado como un complemento de *La logique*, conocida en latín como el "*Ars cogitandi*"). Posteriormente, Pascal en sus "*Pensées*" (1669), utilizando el argumento hoy conocido como la "*apuesta de Pascal*", interpretó a la racionalidad como la maximización de la expectativa en condiciones de incertidumbre.

concepto de equiprobabilidad) y las probabilidades *a posteriori* o de inferencia inversa (definidas a partir de un razonamiento que va "de los efectos a las causas") mediante la creación de un nuevo modelo de causación que convirtiera a la teoría matemática de la probabilidad en la columna vertebral de la inferencia inductiva.

Hasta la aparición del *Ars conjectandi* los avances producidos en la teoría de la probabilidad no habían conseguido proporcionar un planteo eficaz para la formalización de este proceso de inferencia. Los principales tratados de los autores clásicos -empleando el método de razonamiento desde las causas a los efectos- se referían exclusivamente a la resolución de problemas del tipo: dada una urna que se sabe que contiene *a* bolillas rojas y c bolillas azules, la probabilidad de obtener una bolilla roja al realizar una extracción al azar es $\theta = a/(a+c)$. Bernoulli -probablemente influido por los trabajos de J. Graunt (1661) y W. Petty (1682)- fue el primero en tratar el esquema empírico inverso: la estimación de los valores a y c, basándose en la evidencia que proporcionaban los resultados de las sucesivas extracciones y el primero en postular "la relación entre la 'conjectandum' probabilística y la inferencia inductiva" (Daston 1988, p.228), en proponer la sustitución del concepto clásico (deductivo) de probabilidad *a priori*, basado en la simetría de los resultados posibles y en el consecuente concepto Humeano de equiprobabilidad[4], por la idea de probabilidad *a posteriori*, definida como una medida del conocimiento ("expectativa") que posee el observador acerca de la veracidad de una proposición[5].

---

[4] Hume (1739): "*Dado que una indiferencia total es esencial a la aleatoriedad, no es posible suponer que una aleatoriedad pueda ser superior a otra, en su defecto puede estar compuesta por un número de aleatoriedades iguales. Afirmar que, de alguna forma, una aleatoriedad puede ser superior a otra, implica reconocer que existe algo que origina esa superioridad: Es decir implica suponer la existencia de una causa y, por lo tanto, la negación de la hipótesis de aleatoriedad. De modo que una indiferencia perfecta y total es esencial a la aleatoriedad y una indiferencia total nunca puede ser intrínsecamente superior o inferior a otra. Esta verdad no es inherente a mi sistema, sino que es reconocida por todos los probabilistas*" (pp.125). Los números de página que figuran en las referencias a *A treatise of human nature* de Hume corresponden a la versión inglesa editada por Clarendon Press (1978).

[5] Berrnoulli (1713): "*Hemos arribado al punto en el que parece que, para realizar una predicción correcta acerca de un evento cualquiera, solamente es necesario calcular exactamente el número de casos posibles y, luego, determinar cuánto más probable es que ocurra un resultado que otro. Pero aquí surge nuestra dificultad fundamental, ya que este procedimiento es aplicable solamente a un número reducido de fenómenos, casi exclusivamente a aquellos relacionados con los juegos de azar. Los creadores de estos juegos los diseñaron fijando el número de casos que resultarían en ganancia o pérdida y considerándolos conocidos con anticipación y, también, combinando los casos para que todos fueran igualmente probables, de modo que todos los jugadores tuvieran las mismas*

Al utilizar notación moderna, el teorema de Bernoulli puede ser expresado de la siguiente forma: sea $Y_n = X_n/n$ la frecuencia relativa correspondiente al resultado "bolilla roja", obtenida al cabo de una sucesión de *n* extracciones al azar con reposición de una urna cuya composición -desconocida para el observador- es de *a* bolillas rojas y *c* bolillas azules. Entonces, dados un valor ε positivo y arbitrariamente pequeño, y un valor *t* positivo y arbitrariamente grande, se demuestra que es posible hallar un $n > n(\theta ,\varepsilon , t)$ tal que se puede asegurar que, con una probabilidad mayor a $(t^2 - 1)/t^2$, la frecuencia relativa del resultado "bolilla roja" se encontrará a una distancia menor o igual que ε del verdadero valor de la proporción $\theta = a / (a + c)$. De modo que, conocidos *n* e Y_n, se puede resolver la ecuación $n(Y_n ,\varepsilon , t) = n$ con respecto a *t*, obteniéndose así una aproximación al límite inferior $(t^2-1)/t^2$ correspondiente a la probabilidad de ocurrencia del evento $|Y_n - \theta| \leq \varepsilon$ y, a partir de esta expresión, determinar la probabilidad de que el verdadero valor de θ esté incluido en un intervalo de la forma $[Y_n - \varepsilon , Y_n + \varepsilon]$[6].

---

chances de ganar. Pero esta no es, de ninguna manera, la situación de la mayoría de los fenómenos gobernados por las leyes de la naturaleza o la voluntad del hombre (...) Ahora bien, me pregunto, qué mortal podría determinar, contando todos los casos posibles, el número de enfermedades que afligen al cuerpo humano en cada una de sus partes y a cada edad, y decir cuánto mayor que otra es la probabilidad de una enfermedad de ser fatal. Los resultados dependen, en estos casos, de factores que son completamente oscuros y que, por la infinita complejidad de sus interrelaciones, constantemente engañan a nuestros sentidos. Existe, sin embargo, otro camino que nos conducirá a lo que estamos buscando y nos permitirá conocer, al menos 'a posteriori', lo que no podemos determinar a priori, es decir, adquirir conocimiento a partir de los resultados observados en numerosas situaciones similares. Debe suponerse en esta circunstancia que, en iguales condiciones, la ocurrencia (o no ocurrencia) de un evento en el futuro observará el mismo comportamiento que fue observado para eventos similares, en el pasado" (pp.226). Los números de página que figuran en las referencias corresponden a la edición de Sung, B. del *Ars conjectandi.*

[6] Bernoulli (1713): "*Este tipo de predicción requiere 'un gran número de observaciones' (...) pero, si bien todos reconocemos esto, la demostración científica de este principio no es simple (...) Existe, además, otro problema a ser tomado en consideración (...) podría ocurrir que al incrementarse el número de observaciones también se incrementara la probabilidad de que la proporción registrada entre resultados favorables y no-favorables se aproximara a un 'verdadero cociente', de modo que dicha probabilidad finalmente superara cualquier grado deseado de certeza, o podría ocurrir que el problema presentara una asíntota, lo cual implicaría la existencia de un grado de certeza particular respecto del hallazgo del 'verdadero cociente', que no podría ser superado no importa cuánto se aumentara el número de observaciones. Para que esta cuestión no sea interpretada en forma imperfecta, debe tenerse en cuenta que el cociente que representa la verdadera relación entre los números de casos, nunca puede ser obtenido con absoluta seguridad (...) El cociente al cual arribamos es sólo aproximado: deben definirse dos límites, pero esos límites pueden ser construidos de modo que se aproximen tanto como deseemos*" (pp.225).

Leibniz planteó varias críticas a este razonamiento que permiten reflexionar acerca de la naturaleza indiscutiblemente metafísica de los supuestos que condujeron a Bernoulli a postular la asociación entre la interpretación clásica de la probabilidad y la filosofía de la inducción. Una se refiere a la condición necesaria (puramente virtual) de contar con un número infinito de observaciones para identificar la probabilidad θ y a la imposibilidad de demostrar la convergencia de una sucesión de frecuencias relativas a partir de un conjunto finito de observaciones. Una segunda objeción considera que, dado que dichas observaciones son asimilables a un conjunto finito de puntos, que los "*resultados fijos ocultos*" son asimilables a una curva que pasa por entre esos puntos y que, para cada conjunto de puntos existen infinitas curvas que cumplen con dicha condición, la probabilidad *a posteriori* obtenida por inferencia es sólo una de las infinitas probabilidades posibles incluidas en el intervalo definido por el teorema. Una tercera cuestión está relacionada con la exagerada simplificación que implicaba la utilización del esquema de urnas y el mecanismo combinatorio que suponía la independencia estocástica de los eventos sucesivos.

Sin proponer una metodología general para valores finitos de n, la respuesta de Bernoulli con respecto a las primeras cuestiones se basó en el ambiguo supuesto de uniformidad y simplicidad de la naturaleza, según el cual la estimación de θ debía realizarse mediante la selección de la curva más simple[7], de modo que el problema de la inversión quedaba reducido exclusivamente a la selección del estimador más simple de la probabilidad *a priori*[8].

Con respecto al esquema de urnas, debe tenerse en cuenta que, contrariamente a lo que ocurrió con los probabilistas clásicos -que trataron a las loterías, los juegos de dados y las tiradas independientes de una moneda a nivel de aplicaciones prácticas exclusivamente-, Bernoulli utilizó este modelo como la metáfora más adecuada para reproducir los postulados de la filosofía natural de fines del siglo XVII e

---

[7] "*La determinación de una trayectoria a partir de un conjunto finito de observaciones (...) sería bastante débil e incierta si no se tuviera en cuenta que la curva a seleccionar pertenece a la clase de las curvas simples (...) Esto me parece bastante correcto ya que podemos observar que la naturaleza obedece a los comportamientos más simples*" -ver correspondencia de Bernoulli a Leibniz en Gerhardt (ed.)(1962).

[8] Como se verá en la próxima sección, en su intento de solución del problema de la inversión, de Moivre reemplazó este supuesto de simplicidad por el de "*Orden*" resultante de un "*Diseño Original*" en el comportamiento de los fenómenos naturales. Las distintas interpretaciones matemáticas de ese "*Orden*" generaron una serie de controversias que constituyen uno de los capítulos más interesantes del desarrollo de la teoría de la probabilidad durante el siglo XVIII.

intentar demostrar una vinculación entre las causas (θ) y los efectos observados (Y_n), según la cual combinaciones aleatorias de causas inaccesibles, ocultas para el observador, podían -a partir de sucesiones infinitas de observaciones repetidas en igualdad de condiciones- producir eventualmente efectos regulares, generando una propuesta alternativa al modelo de causación racionalista, en el cual, para un observador ideal capaz de acceder a un conjunto de información de tamaño infinito, la relación de causación era esencialmente deductiva y no-combinatoria.

Fue su postura (más teológica y filosófica que matemática) de convencido militante del determinismo metafísico la que condujo a Bernoulli a la identificación de las causas ignoradas del comportamiento de los fenómenos con el parámetro θ, determinado e invariable y representativo de la naturaleza gobernada por leyes inmutables[9] y, en consecuencia, a una interpretación de su teorema que consideraba a la probabilidad θ como conocida, limitando sus alcances a la demostración de la convergencia en-probabilidad de la frecuencia relativa muestral Y_n a θ y, en segundo lugar, a la rigurosa determinación del número de observaciones, $n(\theta, \varepsilon, t)$, requerido para que la probabilidad de que el valor de Y_n esté incluido en un intervalo $[\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon]$ sea t veces mayor que la probabilidad de que no lo esté. Según el ejemplo desarrollado por el mismo Bernoulli en el *Ars conjectandi*, para una urna que contiene 30 bolillas rojas y 20 azules, un $\varepsilon = 1/50$ y $t^2 = 1000$, se necesitarían n = 25.550 observaciones; es decir, a partir de la información proporcionada por 25.550 observaciones de los resultados del juego, se podría asegurar que $p(29/50 \leq X/25.550 \leq 31/50) > 1000/1001$. De la misma forma demostró que, para $t^2 = 10.000$, se necesitarían n = 31.528 observaciones y para $t^2 = 100.000$, n = 36966 observaciones.

A partir de esta demostración, Bernoulli intentó una extensión de su teorema que implicaba un planteo inverso de la forma: si se observa

[9] Una posición que se ve avalada por el postulado con el que concluyó su tratado, posteriormente adoptado por muchos científicos como el fundamento de la filosofía determinística: “Si algo que está destinado a ocurrir no es cierto que ocurra, no resulta claro entonces ¿cómo puede permanecer inquebrantable el elogio de la omnisciencia y omnipotencia del Todopoderoso? Si todos los eventos fueran observados en forma continua, desde ahora y por toda la eternidad (con lo cual la probabilidad se transformaría en certeza), se concluiría que en el mundo todo ocurre por razones definidas y de conformidad con una Ley y que, por lo tanto, estamos obligados, aún en casos que parecen ser accidentales, a suponer una cierta necesidad o fatalismo” (pp.237). Laplace (1814), si bien coincidió con la posición de Bernoulli, reemplazó al “Todopoderoso” por “...una inteligencia capaz de comprender a todas las fuerzas de la naturaleza”.

que la frecuencia relativa “converge a un valor determinado”, θ, entonces este valor definirá la “ley” que gobierna a dicho evento. Pero la circularidad de este esquema de razonamiento, en el cual la convergencia en-probabilidad de las frecuencias relativas se verificaba porque los eventos estaban regidos por una ley determinada; pero, a su vez, la convicción de que los eventos se regían por una ley determinada se fundaba en el postulado de inversión de la probabilidad según el cual las frecuencias relativas debían converger a θ, no le permitió obtener una justificación rigurosa de los alcances de su teorema como fundamento de una teoría de la inferencia inductiva

3. ABRAHAM de MOIVRE

En 1733, de Moivre obtuvo la aproximación Normal a la distribución binomial. Este resultado, publicado bajo el título de *Approximatio ad summam terminorum binomii $(a+b)^n$ in seriem expansi*, permitió reducir el número de observaciones requerido para poder afirmar que el cociente $Y_n = X_n/n$ está contenido en un intervalo dado alrededor del verdadero valor θ con un cierto grado de confiabilidad y concluir que dicho grado de confiabilidad aumenta en forma proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones independientes realizadas. Lograr la cuantificación efectiva del aumento de la confiabilidad ante un incremento de la información empírica constituyó un gran avance con respecto a la solución de Bernoulli y una justificación de su modelo implícito de causación combinatoria[10].

Este resultado y el supuesto que el principio de la estabilidad de las frecuencias era una prueba incontrovertible de la existencia de una inteligencia superior que regía el comportamiento de los fenómenos naturales (es decir, de la existencia de un “*Diseño Original*”), lo condujeron a la convicción de haber demostrado su propia versión inversa del teorema de Bernoulli, la cual tampoco pudo resolver la circularidad del razonamiento. No obstante, este planteo constituyó un argumento de consideración contra el escepticismo radical que sostenía que las causas regulares no necesariamente tenían que producir efectos regulares. De acuerdo con su interpretación, no sólo debía esperarse que, en el largo plazo, causas regulares produjeran efectos regulares, sino que la observación de los efectos permitía

---

[10] La $\sqrt{n}$ constituye “...el ‘modulus’ mediante el cual regulamos nuestra estimación” (de Moivre (1733), pp.240). Los números de página que figuran en las referencias corresponden a la segunda edición de *The doctrine of chances* (Woodfall, reeditada por Cass, 1967).

asintóticamente el descubrimiento de las causas bajo el supuesto ontológico de que dichas causas ("leyes determinadas") existían.

Al igual que en la propuesta de Bernoulli, la restricción más importante del resultado de de Moivre radica en que la convergencia de la frecuencia relativa se justifica sólo en el límite. Es decir que tampoco de Moivre logró resolver el problema de la estimación de θ a partir de una sucesión finita de observaciones (una solución en términos de inferencia probable, no considerada por de Moivre ni por Bernoulli)[11]. Podría haber demostrado que la aparente convergencia de las frecuencias relativas era compatible con (y, aún, causada por) la aleatoriedad de las observaciones pero, obviamente, esta posibilidad no entraba en la concepción del determinista de Moivre, que consideraba simplemente que, en virtud del principio de uniformidad de la naturaleza, las series "debían" converger (suponiendo como Bernoulli que, de acuerdo con el principio de simplicidad, la estimación del "verdadero" cociente resultante de la convergencia consistía en la adopción del cociente "más simple" compatible con el conjunto finito de observaciones)[12].

4. THOMAS BAYES

Se puede concluir entonces que, más allá de la indiscutible importancia de sus contribuciones al desarrollo de la teoría de la probabilidad, ni Bernoulli ni de Moivre lograron resolver el problema de la inferencia inductiva en la medida que no consiguieron solucionar la cuestión fundamental del mismo: la inversión de la probabilidad. Es decir, generar un vínculo entre las observaciones pasadas y las probabilidades de ocurrencia de eventos futuros, en otros términos, pasar de la probabilidad de inferencia directa, $p(Y_n/\theta)$, de los tratadistas clásicos a la probabilidad inversa (o indirecta) $p(\theta/Y_n)$.

Su fracaso se debió fundamentalmente a la imposibilidad, en el contexto de su interpretación determinística, de considerar a θ como una variable aleatoria. Debe tenerse en cuenta que, como se vio en las

---

[11] Debe tenerse en cuenta que los intentos de de Moivre para determinar unívocamente el valor de θ a partir de un argumento matemático, como el de los puntos de condensación en una sucesión finita de observaciones, terminaron en fracaso. Tampoco indicó un método práctico para obtener un intervalo de confiabilidad para θ, en función de los valores de n, Y_n y t.

[12] de Moivre (1733): "*(...) Se observa que, si bien la aleatoriedad produce irregularidades, en procesos dinámicos, estas no son comparables a la recurrencia de ese Orden que resulta Naturalmente del Diseño Original*" (pp.252). De acuerdo con Poisson (1835), un "*Orden"* interpretable solamente en términos de expectativa.

secciones anteriores, tanto Bernoulli como de Moivre -como la mayoría de los científicos de la época-, en su fidelidad a la "teología" Newtoniana[13], veían en sus teoremas límite el argumento según el cual la estabilidad de los coeficientes estadísticos demostraba la presencia de la "Divina Providencia". En este marco filosófico, θ sólo podía ser interpretada como una constante (de valor desconocido) y la frecuencia relativa, como una variable aleatoria.

En 1764 apareció la solución propuesta por Bayes al problema de la inversión, contenida en su famoso *An Essay toward solving a problem in the doctrine of chances*[14], que consideraba a θ como una variable aleatoria con una distribución de probabilidades "a priori" conocida, a partir de la cual era posible la caracterización de las propiedades y la definición de la distribución de probabilidades de la variable condicionada (θ/Y_n) basada en un conjunto finito de observaciones.

El "*Essay*" fue presentado en forma póstuma a la Royal Society precedida por una carta de Richard Price, en la que se encuentra el enunciado del problema propuesto por Bayes: "*Dado el número de veces que un resultado eventual ha ocurrido y el número de veces que no ha ocurrido en las mismas circunstancias, y denotando por θ a la probabilidad -desconocida para el observador- de ocurrencia de dicho resultado en una prueba individual, se desea hallar un método por el cual pudiéramos obtener alguna conclusión con respecto a dicha probabilidad*"(p.298)[15].

Antes de tratar la solución del problema Bayes presenta (Sección I) un desarrollo axiomático en el que figura su interpretación del concepto de independencia estocástica -"Los eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no incrementa ni disminuye la probabilidad del resto"(pp.298)-[16] y una definición que, en un evidente retorno a la interpretación huygeniana en términos de expectativa, asimila la probabilidad al valor subjetivo coherente a pagar en un juego suponiendo una ganancia unitaria, pero entendiendo a la subjetividad

[13] Pearson, K. (1925): "Los matemáticos ingleses post-newtonianos experimentaron una mayor influencia de la teología newtoniana que de su matemática" (pp.202).

[14] Del análisis cuidadoso de su contenido es posible suponer como antecedentes de este trabajo el *Essai d'analyse sur les jeux de hazard* (1708) de P.R. de Montmort, el *Ars conjectandi* (1713) de Bernoulli, *The doctrine of chances* (1738) de de Moivre y *The nature and laws of chance* (1740) de Th. Simpson.

[15] Los números de página que figuran en las referencias corresponden a la edición del "*Essay*" en Biometrika, vol. 45, 1958.

[16] De acuerdo con esta interpretación se podría concluir que, para Bayes, el concepto de independencia entre los eventos es equivalente al de independencia de orden 2.

como una subjetividad racional (no como un grado de creencia personal)[17].

A estas definiciones preliminares sigue una serie de proposiciones entre las que cabe mencionar la *número 3*, referida a "eventos subsecuentes", la cual, utilizando notación moderna, puede ser expresada de la siguiente forma: dados dos eventos, E_1 y E_2, ordenados temporalmente, se verifica que $p(E_2/E_1) = p(E_1 \cap E_2)/p(E_1)$ (suponiendo que ambos términos de este cociente existan). Esta proposición se continúa en la *Proposición 5* (que puede ser considerada como una versión subjetiva de la Proposición 3, establecida en forma independiente de esta), $p(E1/E2) = p(E1 \cap E2)/p(E2)$, la cual, teniendo en cuenta que constituye la base de la demostración de la Proposición 9 (que contiene la solución del problema de la inversión), puede ser considerada el núcleo del "*Essay*"[18].

Luego de esta suerte de prólogo axiomático en el que Bayes postula el rol de las probabilidades como leyes reguladoras de la asignación racional de probabilidades personales, sigue *(Sección II)* la solución del problema estructurada sobre la base de un ingenioso experimento que simula un modelo binomial, consistente en:

i) (*Postulado 1*) hacer rodar una bola (b_1) sobre un plano horizontal limitado por un cuadrado (ABCD) (una mesa en la versión original del "*Essay*", una mesa de billar, según la frívola interpretación debida a K. Pearson y R.A. Fisher, sin duda muy apartada del austero espíritu del Reverendo Bayes), de modo que la probabilidad de que la misma se detenga en un punto particular, sea la misma para todos los puntos del plano;

ii) *(Postulado 2)* hacer rodar n veces una segunda bola (b_2), tomando en consideración la frecuencia *(X_n)* del evento *M: que b_2 se detenga a la derecha de b_1*[19].

Supóngase (y esto, obviamente, no significa una pérdida de generalidad) que el área del cuadrado ABCD sea igual a uno y que el

---

[17] "La probabilidad de un evento es igual al cociente entre el valor de una expectativa que debe ser calculada en función de la ocurrencia de dicho evento, y el valor de la 'cosa' esperada, en el supuesto de que el evento haya ocurrido" (pp.298). Bayes puede ser considerado como el último representante, hasta el siglo XX, de la interpretación de la teoría matemática de la probabilidad en términos de expectativa.

[18] En esta proposición Bayes postula la asimilación del proceso de aprendizaje a la condicionalización probabilística.

[19] Este mecanismo -que, más allá de una insoslayable falta de rigurosidad en términos del estado actual del arte, describe un esquemático procedimiento de Monte Carlo- sustituyó, en la solución de Bayes, el esquema de urnas de Bernoulli.

punto A tenga coordenadas (0,0) y sea *o* la abcisa del punto del plano en el que se detuvo b_1. De acuerdo con estas hipótesis, Bayes postula que la variable, que representa al punto en que ha de detenerse cada bola, está uniformemente distribuida en el cuadrado *ABCD* y que *o* está uniformemente distribuida en el intervalo (0,1). Entonces, para todos los valores de *o* tales que 0<o1<o<o2< 1, se verificará:

i) *Lema 1*: $p(o_1 < o < o_2 = o_2 - o_1)$;

ii) *Proposición 8*: $P\left[(o_1 < o < o_2) \cap ((X_{(n)} = n'))\right] = \int_{o_1}^{o_2} P'^{n;n'} o^{n'} (1-o)^{n-n'} do$;

iii) *Corolario*: $p\left[X_{(n)} = n'\right] = \int_0^1 P'^{n;n'} o^{n'} (1-o)^{n-n'} do = \dfrac{1}{n+1}$ (independiente de n´) y, finalmente, que

iv) *Proposición 9*: $p[(o_1 < o < o_2)/(X_{(n)} = n')] = \dfrac{\int_{01}^{o2} P'^{n;n'} o^{n'} (1-o)^{n-n'} do}{\int_0^1 P'^{n;n'} o^{n'} (1-o)^{n-n'} do}$.

Una de las críticas habituales respecto de esta demostración refiere a la adopción por parte de Bayes de la condición de uniformidad física y epistemológica de los resultados (típica de la interpretación clásica). Parece lógico suponer que, en principio, esta condición se debe a la influencia del entorno filosófico de la época, fundamentalmente del ya mencionado postulado de Hume (1739) acerca de la necesidad (metafísica) de la "absoluta", "perfecta" y "total indiferencia" entre los distintos resultados posibles de un fenómeno para poder asegurar su comportamiento aleatorio y al corolario (matemático) obligado que implicó la asimilación de la aleatoriedad, es decir de la ausencia de regularidad en el comportamiento de un fenómeno, a la equiprobabilidad en la distribución de dichos resultados.

Inmediatamente después de la *Proposición 9*, Bayes agregó un "*Scholium*" en el que intentó generalizar el resultado anterior justificando (*Proposición 10*) la analogía entre el mecanismo físico adoptado y el comportamiento que manifiestan para el observador ciertos fenómenos de la naturaleza. Postuló que el mismo razonamiento utilizado para resolver el problema de la mesa de billar (en el que se suponía que los valores de θ eran equiprobables) podía ser aplicado a cualquier variable cuyos resultados pudieran ser considerados simétricos “a priori” de la realización de cualquier prueba. Esta extensión operacionalista del comportamiento de b_1 y el principio de indiferencia total de Hume condujeron a Bayes a postular la propiedad de equiprobabilidad “a priori” de una variable θ a partir de la condición *“no conocemos absolutamente nada previamente a la realización de alguna observación”*, obteniendo el siguiente resultado[20]:

$$p[(\theta_1 < \theta < \theta_2)/M^*] = \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} P'^{n;n'} \theta^{n'} (1-\theta)^{n-n'} dF(\theta)}{\int_0^1 P'^{n;n'} \theta^{n'} (1-\theta)^{n-n'} dF(\theta)} = \frac{(n+1)!}{n'!/(n-n')!} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta^{n'} (1-\theta)^{n-n'} d\theta$$

Donde M* denota el supuesto “el resultado E ha ocurrido n´ veces en n ensayos realizados en igualdad de condiciones”.

Esta operacionalización de su teorema queda evidenciada en el siguiente pasaje del *Scholium*: “A partir de la proposición precedente queda claro que, en el caso de un evento como el que denoto por M, conociendo el número de veces que ocurrió y el número de veces que no ocurrió en un cierto número de ensayos repetidos, sin saber nada más acerca de él, se puede conjeturar dónde se encuentra su probabilidad y, mediante métodos usuales de cálculo de las medidas de las áreas allí mencionadas, observar la probabilidad de que dicha conjetura sea correcta. Y el postulado de que la misma regla es apropiada para ser utilizada en el caso de un evento acerca de cuya probabilidad no conocemos absolutamente nada ‘a priori’ de cualquier ensayo, parece surgir de la siguiente consideración: que en lo que respecta a tal evento, no tengo ninguna razón para pensar que, en un cierto número de ensayos, pueda ocurrir un número dado de veces más que otro. Pero, éste es exactamente el caso del evento M. Antes de arrojar la bola W, la cual determina su probabilidad en una prueba individual, la probabilidad de que ocurra p veces y no ocurra q veces, en p+q=n ensayos, está dada por el cociente entre AiB y CA, el cual es el mismo para todo p, cuando p+q=n está dado. (…) Y,

[20] Según Price, Bayes tuvo dudas acerca de la validez de este postulado de generalización de su teorema -Price: “(…) pero Bayes posteriormente consideró que el postulado al cual había hecho referencia podía no ser considerado unánimemente razonable y, por lo tanto, prefirió modificar la forma de expresión de la proposición que suponía que contenía la solución del problema y agregar un scholium final que explicara su forma de pensar antes que incluir en su razonamiento matemático algo que pudiera generar controversias” (pp.297). No obstante este comentario de Price, Dale, A.I. (1991) considera (con fundamentos muy atendibles) que Bayes resolvió en primer término el problema general para resultados simétricos y luego construyó el modelo de la mesa de billar.

consecuentemente, antes de definir el punto 'o', o de saber el número de veces que el evento M ha ocurrido en n ensayos, no tengo ninguna razón para pensar que pueda ocurrir un número de veces más que otro. Por lo tanto, en lo que sigue, daré por descontado que la regla dada para el evento M en la Proposición 9, es también la regla a ser utilizada con relación a cualquier otro evento acerca de cuya probabilidad no sepamos nada 'a priori' de cualquier tipo de prueba. Y a tal evento lo denominaré 'evento desconocido'" (p.301).

A partir de este resultado, Bayes obtuvo el corolario de la *Proposición 8* (conocido como el *postulado de Bayes*), según el cual la distribución de probabilidades marginal de X_n queda definida de la siguiente forma:

$$p(X_{(n)} = n') = \int_0^1 P'^{n;n'} \theta^{n'} (1-\theta)^{n-n'} d\theta = 1/(n+1) \forall n'$$

Una expresión cuya independencia de n' fue considerada por Bayes como condición suficiente para poder justificar su conjetura de uniformidad de la distribución de θ.

Más allá de su carácter intuitivo, la aceptación formal de esta conjetura requiere una demostración rigurosa de que la distribución uniforme de θ no sólo es condición suficiente sino también necesaria para el cumplimiento del postulado de Bayes. Como corolario del teorema de representación de de Finetti (1937), haciendo *n=n'* en la expresión anterior y, dada una función de distribución *F(θ)*, se obtiene el momento de orden n(=.0,1,2,...) de la función de densidad *dF(θ)*

$$\int_0^1 \theta^n dF(\theta) = 1/(n+1).$$

Lo cual permite concluir que el postulado de Bayes determina en forma unívoca la sucesión de infinitos momentos de *dF(θ)*. Por otra parte, dado que la función dF (θ) está concentrada en un conjunto compacto, de acuerdo con el teorema de Hausdorff, se puede asegurar que está definida en forma estricta por la sucesión de sus momentos y, de acuerdo con el teorema de Murray (1930), se demuestra que la única función de densidad que satisface la sucesión de momentos que prescribe el postulado de Bayes debe ser tal que *dF(θ) = dθ* . Es decir que, a partir de la hipótesis de distribución binomial de la variable X_n, queda demostrado que la única forma admisible de la función de densidad *dF(θ)* en el postulado de Bayes es la función uniforme.

Este resultado permite concluir entonces que, en principio, la justificación teórica de la extensión del teorema de inversión propuesta por Bayes se limita sólo al caso de la distribución binomial de la variable condicionante X_n[21].

5. RICHARD PRICE

En la presentación del "*Essay*" Price (como no se podía esperar de otra forma, dado su carácter de ministro presbiteriano no-conformista) interpreta el planteo de Bayes postulando que "en la constitución de las cosas existen leyes fijas que rigen la ocurrencia de los eventos, lo que permite concluir que el comportamiento estructural del mundo es el efecto de la sabiduría y el poder de una causa inteligente y, en consecuencia, permite confirmar el argumento sobre la existencia de la Divinidad a partir de las causas finales (...) El problema inverso resuelto en este trabajo es aplicable directamente a este propósito, demuestra con claridad y precisión para cualquier orden o recurrencia de eventos que existen razones para suponer que tal orden o recurrencia deriva de causas o regulaciones estables de la naturaleza y no de las irregularidades del azar" (p.297). Una proposición en la que el supuesto "orden o recurrencia de los eventos" sugiere una interpretación en términos de la existencia de una tendencia de la aleatoriedad a generar frecuencias estadísticamente estables, y la consideración de las "causas o regulaciones estables" como asimilables a propensiones físicas inherentes a la aleatoriedad del sistema y, por lo tanto, generadoras también de frecuencias estables en sucesiones infinitas de pruebas repetidas en igualdad de condiciones, estableciendo en forma axiomática que la posibilidad de la presencia de eventuales excepciones a la regularidad no significa necesariamente la inexistencia de causas, sino la presencia de "causas desconocidas que perturban la influencia de las causas permanentes".

Esta propuesta permite concluir que Price coincide con de Moivre (1733) en su interpretación del teorema de Bernoulli como herramienta para determinar "en qué grado" la observación repetida permite confirmar una conjetura y, en consecuencia, medir la "fuerza de un razonamiento ontológico o inductivo" (p.296), pero difiere del supuesto

[21] En términos más generales se demuestra que la intercambiabilidad de una sucesión de repeticiones de un evento en condición necesaria y suficiente para poder asegurar que existe una única función de densidad $dF(\theta)$ que satisface los postulados del teorema de representación, es decir que existe una única mezcla de probabilidades binomiales para la cual se verifica dicho teorema. Si se supone, en particular que $\theta{:}U(0,1)$, entonces se verifica el postulado de Bayes.

implícito en su demostración considerando que ningún grado de uniformidad experimental puede garantizar con certeza la estabilidad en el comportamiento futuro de un fenómeno y, por lo tanto, rechaza su versión inversa de dicho teorema[22].

Price sostiene que la creencia en la uniformidad de la naturaleza pertenece al ámbito del sentido común y constituye un suplemento a la evidencia empírica, "que esta creencia producirá, a partir de uno o unos pocos experimentos, una expectativa de éxito en los experimentos sucesivos mayor que la que hubiera sido razonable esperar"[23] y concluye que sólo el teorema de Bayes era capaz de resolver el problema de la habitual vaguedad de la contribución del sentido común a partir de un número finito de observaciones, de determinar el grado con que la observación confirmaba una conjetura dada y, en consecuencia, de proporcionar una medida de la capacidad de un razonamiento inductivo.

Una conclusión que, según Price, demostraba el rol protagónico del teorema de Bayes como soporte probabilístico del principio de uniformidad de la naturaleza y de la existencia de un "*Diseño Original*", transformándolo en un argumento fundamental en defensa de la filosofía y la teología natural, y de la justificación de su carácter como condición necesaria para el desarrollo de una teoría rigurosa de la inducción, mediante el mecanismo proporcionado por la doctrina de la asociación de ideas que, a partir de la vinculación de la psicología y la epistemología, permitió explicar los procesos psicológicos subyacentes al comportamiento racional.

6. EL *ESSAY ON MIRACLES*

En 1739 el filósofo escocés David Hume publicó su postulado acerca de la incapacidad de las ciencias fácticas de proporcionar conocimiento causal y, por lo tanto, de la imposibilidad de justificar los resultados del proceso de inferencia inductiva, es decir de justificar la hipótesis de que el comportamiento observado de un fenómeno constituye una representación confiable de su comportamiento futuro. Un planteo que lo condujo a un tratamiento exclusivamente descriptivo de las

---

[22] Price consideró que el conocimiento cierto de que un evento es verdaderamente imposible, es de acceso imposible" (Daston, L. 1988, pp.327).

[23] "*Razonable*" en el sentido del teorema de Bayes.

probabilidades y, consecuentemente, a una descalificación del razonamiento probabilístico[24].

Este argumento, basado en que el supuesto de uniformidad de la naturaleza no se puede justificar ni deductiva ni inductivamente[25], no le impidió a Hume reconocer la necesidad utilitaria y filosófica de un razonamiento inductivo basado en dicho supuesto, entendido como un criterio de creencia racional cuya justificación se fundaba exclusivamente en una necesidad psicológica, en "un pacto establecido casi involuntariamente por la naturaleza para compensar las deficiencias del razonamiento humano" (Daston, L., 1988, p.202). Un razonamiento que, en el caso de una experiencia "completamente uniforme" sobre el comportamiento de un fenómeno, era capaz de generar una "demostración" de su existencia futura y, en consecuencia, de la existencia de leyes de la naturaleza.

Si bien Hume parece no haber estado enterado de la memoria de Bayes, existe evidencia de que éste habría tomado conocimiento de los trabajos de Hume entre 1746 y 1749. Teniendo en cuenta que Price conoció personalmente a Hume, y dadas las numerosas citas que figuran en su "*Review of the principal questions in morals. Particularly those respecting the origin of our ideas of virtue, its nature, relation to the deity, obligation, subjet matter and sanctions*" (1758) y las referencias implícitas que figuran en los ejemplos del "*Apéndice*" del "*Essay*", se puede concluir que la vinculación Bayes-Hume se debió a Price[26].

Price y Hume coincidieron en que existían marcadas diferencias entre razonamiento, demostración y certeza por una parte, y opinión, experiencia y probabilidad por la otra, y que la experiencia implicaba expectativas respecto del futuro, pero sus opiniones con relación a los fundamentos de tales expectativas y, consecuentemente, a la validez filosófica de la inducción, fueron diferentes. Contrariamente a la conjetura de Price acerca de que la creencia en una conexión necesaria entre causa y efecto y en la regularidad de las causas se debía a la intuición confirmada por una probabilidad creciente a medida que aumentara el número de resultados favorables en la sucesión de

---

[24] Si bien su interpretación filosófica y psicológica de las nociones de probabilidad, experiencia y grado de creencia fue significativamente más cuantitativa que la propuesta por Locke, Hume -a quien no se puede considerar como un probabilista en el sentido actual del término- no hace ninguna referencia a la teoría matemática de la probabilidad. Esta falencia fue resuelta por Hartley, D. (1749).

[25] Una tesis que fue considerada por muchos autores como el certificado de defunción de la inducción y, según Broad, C.D., el "escándalo de la filosofía".

[26] Para un análisis más detallado acerca de la vinculación Price-Hume, ver Dale, A.I. (1986), Gillies, D. (1987), Owen, D.(1987), Zabell, S.L. (1988)(1989).

observaciones repetidas, como se vio más arriba, Hume sostuvo que ese planteo no podía ser aceptado sin incurrir en una tautología. Es decir que lo que Hume interpretó como un comportamiento racionalmente injustificado fue considerado por Price como un axioma que no merecía una interpretación filosófica.

En el siglo XVII Jean Domat, a partir de la consideración en procesos legales de la existencia de una evidencia intrínseca de los fenómenos y una evidencia extrínseca contenida en un testimonio respecto de los mismos, propuso los primeros intentos de evaluación de la confiabilidad de un testimonio sobre la ocurrencia de un evento. Inmediatamente los lógicos de *Port Royal*, generalizando la conjetura de Domat, postularon la existencia de una credibilidad intrínseca de un hecho en sí mismo ("*circonstances intérieures*") y una credibilidad extrínseca de los testimonios ("*circonstances extérieures*") derivada de la autoridad de los testigos y los matemáticos de la época, basándose en los desarrollos experimentados por la teoría de la probabilidad, se abocaron a la cuantificación de dichas credibilidades[27].

A fines del siglo XVII esta cuestión de la credibilidad de los testimonios se extendió a una controversia entre la creencia basada en la fe cristiana y la creencia racional en la existencia de un orden natural, sobre la posibilidad de reconocimiento de ciertos hechos como milagrosos.

En este marco conceptual, la conjetura sobre la posibilidad de "demostración" de la existencia de leyes de la naturaleza condujo a Hume a la inevitable conclusión de que la ocurrencia de un milagro, entendido como una violación de dichas leyes, era un evento intrínsecamente imposible[28]. Si bien en su "*Essay on miracles*" reconoce una posible interpretación probabilística explícita de la acreditación de ciertos hechos como milagrosos a partir de pruebas testimoniales, considera que ninguna circunstancia extrínseca podría afectar a la probabilidad intrínseca, ni siquiera la influencia de aspectos religiosos que inevitablemente influirían sobre la objetividad

[27] La calificación de "intrínseca" y "extrínseca" de la credibilidad se debe a Bernoulli, quien dedicó un capítulo de la "Pars quarta" del *Ars conjectandi* al tratamiento de las "demostraciones por conjetura".

[28] Hume (1758): "*Debe existir una experiencia uniforme contra todo evento milagroso, de lo contrario no merecería tal calificativo y, en la medida que una experiencia uniforme crece, genera una 'demostración' directa y total contra la existencia de cualquier milagro y dicha demostración no puede ser destruida ni el milagro convertido en creíble, excepto por una demostración opuesta que sea superior*" (pp.118). Los números de página que figuran en las referencias corresponden a la edición de Selby-Bigge de "*An enquiry concerning human understanding*" (Oxford University Press, 1963).

de dichos testimonios y, en consecuencia, concluye que “ningún testimonio es suficiente para acreditar un milagro, a menos que el testimonio sea tal que su falsedad sea más milagrosa que el hecho que tratamos de acreditar” (p. 115) [29]. Es decir que, dado un hecho *M* cuyo carácter milagroso se desea acreditar y un testimonio, *T* , a su favor, *M* podría ser acreditado como milagroso sólo si se verificara que $p(T \cap \overline{M}) < p(M/\Omega)$ o, alternativamente, si se verificara que $p(T/\Omega^{*} \cap \overline{M}) < p(M/\Omega)$ (donde $p(M/\Omega)$ denota la probabilidad subjetiva de ocurrencia de *M* “a priori” del conocimiento de cualquier testimonio, condicionada por un conjunto de información inicial *Ω* y *Ω** denota un conjunto de información acerca de la confiabilidad de *T*).

En la cuarta de sus “*Four dissertations*” (1767), titulada *On the importance of Christianity, the nature of historical evidence, and miracles. Second Part: The nature of the grounds of the regard due to experience and to the evidence of testimony, states and compared*[30], el Reverendo Price intentó refutar el “*Essay on miracles*” y justificar la razonabilidad de la creencia en los milagros. A partir de su interpretación del teorema de Bernoulli, según la cual ningún grado de uniformidad experimental puede determinar el comportamiento futuro de un fenómeno, consideró a la imposibilidad intrínseca de la ocurrencia de un milagro no como una imposibilidad física sino como una imposibilidad moral y, en base a las posibilidades inductivas de la interpretación bayesiana rigurosa del planteo informal de Hume, obtuvo que:

$$p(M/\Omega \cap T) = \frac{p(T/\Omega^{*} \cap M)\, p(M/\Omega)}{P(T/\Omega^{*} \cap M)\, p(M/\Omega/) + p(T/\Omega^{*} \cap \overline{M})\, p(\overline{M}/\Omega} = p(M/\Omega)\frac{p(T/\Omega^{*} \cap M)}{p(T/\Omega^{*})}$$

Donde $p(T/\Omega^{*})$ denota la probabilidad subjetiva que mide el grado confiabilidad de T “a priori” del conocimiento sobre la presunta ocurrencia de M, las probabilidades $p(T/\Omega^{*} \cap M)$ y $p(T/\Omega^{*} \cap \overline{M})$ dependen de la confiabilidad que merezca el testimonio y el cociente $p(T/\Omega^{*} \cap M)/p(T/\Omega^{*})$ representa la medida de la contribución de M a la modificación de la confiabilidad de *T*.

---

[29] Este trabajo (en el que Hume plantea polémicas consideraciones respecto de los movimientos religiosos que basan su teología en supuestos milagros) fue publicado por primera vez como la Sección X de “*Philosophical essays concerning human understantding*” (1758) y revisado y reeditado como “*An enquiry concerning human understanding*” (1758).

[30] Las otras tres disertaciones se titulan: *On Providence*, *On prayer* y *On the reasons for expecting that virtuous men shall meet of the death in a state of happiness*.

Esta aplicación de la extensión del teorema de Bayes permite demostrar en forma inmediata que la condición necesaria y suficiente para el cumplimiento del principio de Hume es que $p(M /\Omega \cap T) >1/2$.

Si se considera que, dada su naturaleza, es lógico suponer que a partir de un conjunto de información racional que excluye cualquier tipo de testimonio (a favor o en contra), la ocurrencia de un milagro es un evento moralmente imposible y suponiendo que el testimonio sobre la ocurrencia del milagro sea altamente confiable, de modo que su falsedad pueda ser considerada un evento moralmente imposible y, según la definición de imposibilidad moral en el sentido de Borel "a escala humana", será $p(M \cap \Omega) < 10^{-6}$, $p(T / \Omega^* \cap M) \geq 1-10^{-6}$, $p(T / \Omega^* \cap \overline{M}) < 10^{-6}$ y $p(T \cap \overline{M}) < 10^{-6}$. Luego, a partir de estas desigualdades y de acuerdo con la interpretación bayesiana de Price, se demuestra que, si se cumple la desigualdad de Hume, la medida de la influencia del testimonio como evidencia incremental de M será tal que $PR(M , T) = p(M / \Omega \cap T)/p(M / \Omega)\geq 500.000$ y que dicha influencia crecerá en la medida que $p(T / \Omega^* \cap \overline{M}) \to 0$ y, en consecuencia, el cociente de verosimilitudes $LR(T / M , \overline{M}) \to \infty$. Viceversa, como es lógico suponer, si (debido a factores irracionales o de carácter místico) la probabilidad de la falsedad de un testimonio aumenta (de modo que $(T / \Omega^* \cap \overline{M})$ deje de pertenecer al dominio de los eventos moralmente imposibles en el sentido de Borel), como complemento a la propuesta de Dawid-Gillies (1989), se concluye en forma inmediata que $LR(T/M,\overline{M})= p(T / \Omega^* \cap M)/p(T / \Omega^* \cap \overline{M}) \to 0$, es decir que la importancia del testimonio a favor de la ocurrencia de un milagro disminuye hasta volverse nula. Debe tenerse en cuenta que en ambos casos límite el cociente de verosimilitudes (que representa la medida del impacto de T sobre la plausibilidad de M con respecto a $\overline{M}$) se independiza de la subjetividad de la probabilidad "a priori" $p (M/\Omega)$.

Estos resultados permiten concluir que la confirmación o refutación del principio de Hume de que "ningún testimonio es suficiente para acreditar un milagro" depende de la interpretación que se atribuya al término "acreditar". Si por "acreditar" se entiende aceptar como cierta la ocurrencia de un milagro y considerando que los eventos (M / Ω) y $(T / \Omega * \cap \overline{M})$ son moralmente imposibles, el comportamiento asintótico hacia la certeza de $p(M / \Omega \cap T)$ ($\lim p(M / \Omega \cap T) = 1$ cuando $p(M / \Omega)\to 0$ y $P(T / \overline{M})\to 0$) permite confirmar dicho principio pero, si "acreditar" implica reconocer que el evento $(M / \Omega \cap T)$ es moralmente cierto, entonces para $0 < p(M / \Omega) \leq 10^{-j}$ $(j \geq 12)$ y $0 < p(T / \Omega^* \cap \overline{M}) \leq 10^{-j}$, se demuestra que $1-10^{-j} \leq p(M/\Omega \cap T) < 1$. Lo cual conduce a la refutación del principio de Hume.

7. CONCLUSIONES

Más allá de la indiscutible importancia de sus contribuciones al desarrollo de la teoría de la probabilidad, ni los Bernoulli ni de Moivre lograron resolver el problema de la inferencia inductiva, en la medida que no consiguieron solucionar la cuestión fundamental del mismo, la inversión de la probabilidad. Es decir, generar un vínculo entre las observaciones pasadas y las probabilidades de ocurrencia de eventos futuros; en otros términos, pasar de la probabilidad de inferencia directa, $p(Y_n / \theta)$ de los tratadistas clásicos a la probabilidad inversa $p(\theta / Y_n)$.

Su fracaso se debió fundamentalmente a la "necesidad", en el contexto de su interpretación determinística, de considerar a θ como una constante (de valor desconocido) y a la frecuencia relativa como una variable aleatoria. Fue la propuesta de Bayes (contenida en su famoso "*An Essay toward solving a problem in the doctrine of chances*"), que consideró θ como una variable aleatoria con una distribución de probabilidades *a priori* conocida, la que permitió la caracterización de las propiedades y la definición de la distribución de probabilidades de la variable condicionada (θ/ Y_n) a partir en un conjunto finito de observaciones.

El primer objetivo de este trabajo fue lograr una justificación teórica de la extensión operacionalista del teorema de la inversión de la probabilidad como corolario del teorema de representación de de Finetti. En base a este resultado demostrar que, mediante el mecanismo proporcionado por la teoría de la asociación de ideas, la interpretación de Price del planteo generalizado de Bayes fue la primera en obtener una justificación de su carácter como condición necesaria para el desarrollo de una teoría rigurosa de la inducción.

Como corolario de esta interpretación bayesiana y a partir de un análisis detallado del "*Essay on miracles*", se concluyó, además, que el tratamiento realizado por Price de la conjetura de Hume acerca de la insuficiencia de cualquier testimonio para acreditar un fenómeno como milagroso no conduce a su refutación absoluta, sino que su confirmación o refutación está relacionada con el concepto de imposibilidad moral y con el significado probabilístico atribuido al término "*acreditar*".

BIBLIOGRAFIA

Arnauld, A.; Nicole, P. (1662) *La logique ou l'art de penser*. Reeditado por Flammarion, París, 1970.

Bayes, Th. (1764) "An essay toward solving a problem in the doctrine of chances". *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 53, pp.370-418. Reeditado en Biometrika, vol. 45, pp.296-315, 1958.

Bernoulli, J.(1713) *"*Ars conjetandi*"* en *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Basel Naturforschende Gesellschaft, 1969-75. Versión en inglés por Sung, B., Harvard University Department of Statistics. Tecnical Report Nº2, 1966.

Boyle, R. (1666) *"*Origin of forms and qualities*"* en *The works of the Honourable Robert Boyle*, Londres, 1772.

Butler, J. (1736) *The analogy of religion, natural and revealed, to the constitution and course of nature*. Londres.

Dale, A.I. (1986) "A newly discovered result of Thomas Bayes". *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 35, pp.101-113.

Daston, L. (1988) *Classical probability in the enlightement*. Princeton University Press.

Dawid, P.; Gillies, D. (1989) "A Bayesian analysis of Hume's argument concerning miracles", *Philosophical Quarterly*, vol. 39, pp.57-65.

de Moivre, A. (1733) *Approximatio ad summam terminorum binomii* $(a+b)^n$ *in seriem expansi*. Reeditado en Archibald, R.C. (1926).

de Moivre, A. (1738) *The doctrine of chances*, Woodfall, Londres. Reeditado por Cass, Londres, 1967.

de Montmort, P.R. (1713) *Essay d'analyse sur les jeux de hazard. Seconde edition revue et augmentée de plusieurs lettre*. Quillau, París. Reeditado por Chelsea, Londres, 1980.

Gillies, D. (1987) *Was Bayes a Bayesian?* "Historia Mathematica", vol. 14, pp.325-346.

Graunt, J. (1661) *Natural and political observations in a following index and made upon the bills of mortality*. Martyn-Allestry, Londres.

Hacking, I. (1975) *The emergence of probability: A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*. Cambridge University Press.

Hartley, D. (1749) *Observations on man, his frame, his duty and his expectations*, Richardson, Londres.

Hume, D. (1739) *A treatise of human nature, being an attempt to introduce the experimental method of reasoning into moral subjects, and dialogues concerning natural religion.* Green & Grose, Londres. Versión en inglés en Calrendon Press, Londres, 1978.

Hume, D. (1741-42) *"Essay on miracles"* en *Essays moral, political and literary*, Londres. Reeditado en Londres, 1963.

Hume, d. (1758) *An enquiry concerning human understanding.* Selby-Bigge, Londres. Reeditado por Oxford University Press.

Landro, A.H. (2010) *Acerca de la probabilidad.* Ediciones Cooperativas.

Laplace, P.S. (1814) *Essai philosophique sur les probabilités.* Reeditado en *Oeuvres complètes de Laplace*, Burgois, París, 1986.

Leibniz, G.W. (1678) *De incerti æstimatione*, Berlín.

Murray, F.H. (1930) "Note on a schollium of Bayes". *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 66, pp.129-132.

Owen, D. (1987) "Hume versus Price on miracles and prior probabilities: testimony and the Bayesian calculation". *Philosophical Quarterly*, vol. 37, pp.7-202.

Pascal, B. (1669) *Pensées.* Reeditado por Lafuma, 1962.

Pearson, K. (1925) *James Bernoulli's theorem.* Biometrika, vol. 17 pp.201.210.

Petty, W. (1682) *An essay concerning the multiplication of mankind.* Londres.

Price, R. (1758) *Review of the principal questions in morals. Particularly those respecting the origin of our ideas of virtue, its nature, relation to the deity, obligation, subject-matter, and sanctions.* Miller-Cadell, Londres. Reeditado en Raphael, D.D. (ed.)(1974).

Price, R. (1767) *Four dissertations.* 5ta. edición, Miller-Cadell, Londres, 1811.

Zabell, S. L. (1988) "The probabilistic analysis of testimony". *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 20.

Zabell, S.L. (1988) "Fisher on the history of inverse probability". *Statistical Science*, vol. 4.