

## UM MODELO MATEMÁTICO EXATO PARA O PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE CONTÊINERES COM RESTRIÇÃO DE CARREGAMENTO COMPLETO DE GRUPOS DE ITENS

### AN EXACT MATHEMATICAL MODEL FOR THE CONTAINER LOADING PROBLEM WITH COMPLETE SHIPMENT OF GROUP OF BOXES CONSTRAINT

### UN MODELO MATEMÁTICO EXACTO PARA EL PROBLEMA DE CARGAMENTO DE CONTENEDORES CON RESTRICCIÓN DE EMBARQUE COMPLETO DE GRUPOS DE CAJAS

Deidson Vitorio Kurpel<sup>1</sup>, Cleder Marcos Schenekemberg<sup>2</sup>,  
Cassius Tadeu Scarpin<sup>3</sup>

#### RESUMO:

Este trabalho apresenta um modelo de programação linear inteira mista que visa carregar, de modo ortogonal, um subconjunto de caixas retangulares no interior de um número limitado de contêineres de dimensões idênticas, maximizando o número de itens carregados. Com base em propostas realizadas anteriormente na literatura, a formulação matemática descrita deste trabalho considera a restrição adicional de carregamento completo de grupo de caixas. Embora seja comum em situações reais, esta consideração prática raramente é abordada em trabalhos correlatos. Conjuntos de teste adaptados da literatura

foram utilizados para avaliar o desempenho computacional da formulação matemática proposta, e um *software* de otimização foi empregado para a resolução dos modelos gerados. Os resultados obtidos mostram que, embora a proposta apresentada se limite a resolver otimamente problemas cuja complexidade é moderada, o mesmo descreve as considerações tratadas de modo apropriado, podendo servir de estímulo para a realização de novas pesquisas envolvendo problemas de carregamento de contêineres.

**Palavras-chave:** Otimização combinatória; Modelagem matemática; Problemas de corte e empacotamento; Carregamento de contêineres; Carregamento completo de itens.

#### ABSTRACT:

This paper presents a mixed integer linear programming model that aims to orthogonally place a subset of rectangular boxes inside a limited number of containers of equal size, maximizing the

<sup>1</sup> Matemático, Bolsista, Mestrando no programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR. [kurpeld@gmail.com](mailto:kurpeld@gmail.com)

<sup>2</sup> Matemático, Bolsista, Mestrando no programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR. [cledercms@hotmail.com](mailto:cledercms@hotmail.com)

<sup>3</sup> Matemático e Engenheiro de Produção, Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia, área de Pesquisa Operacional, Professor do Departamento de Engenharia de Produção e do PPGMNE, UFPR. [cassiusts@gmail.com](mailto:cassiusts@gmail.com)

number of loaded items. Based on proposals made previously in the literature, the mathematical formulation described in this work considers the additional constraint of complete shipment of group of boxes. While it is common in real situations, this practical consideration rarely is addressed in related works. Test sets adapted from literature were used to evaluate the computational performance of the mathematical formulation proposed, and an optimization software was used for the resolution of the generated models. The results show that while the proposal is limited to solve optimally problems whose complexity is moderate, it describes the addressed considerations appropriately, and may serve as a stimulus for new research involving container loading problems.

**Descriptors:** Combinatorial optimization; Mathematical modeling; Cutting and packing problems; Container loading; Complete shipment of items.

## RESUMÉN:

En este trabajo se presenta un modelo de programación lineal entera mixta que tiene como objetivo cargar, de forma ortogonal, un subconjunto de cajas rectangulares dentro de un número limitado de contenedores de igual tamaño, maximizando el número de elementos cargados. Con base en las propuestas formuladas en la literatura, la formulación

matemática propuesta en este trabajo considera la restricción adicional de embarque completo de grupo de cajas. Aunque sea común en situaciones reales, esta consideración práctica raramente se trata en trabajos relacionados. Se utilizaron conjuntos de pruebas adaptados de la literatura para evaluar el desempeño computacional de la formulación matemática propuesta, y un *software* de optimización se utilizó para la resolución de los modelos generados. Los resultados muestran que, aunque la propuesta se limita a resolver de forma óptima problemas cuya complejidad es moderada, el mismo describe las consideraciones tratadas adecuadamente, pudiendo servir como un estímulo para la consecución de nuevas investigaciones con problemas de cargamento de contenedores.

**Palabras clave:** optimización combinatorial; Modelos matemáticos; Problemas de corte y empaque; Cargamento de contenedores; embarque completo de artículos.

## 1. INTRODUÇÃO

O problema de carregamento de contêineres (*Container Loading Problem – CLP*) representa, junto à Pesquisa Operacional, um caso particular dos problemas de corte e empacotamento. Para resolvê-lo, procura-se dispor caixas retangulares ortogonalmente de tal maneira

que o volume utilizado em relação ao volume total dos contêineres disponíveis seja maximizado. Qualquer arranjo de caixas no interior de um contêiner é denominado padrão de carga (ou padrão de carregamento). Entretanto, é importante assegurar que todas as caixas estão colocadas inteiramente dentro de um contêiner e, além disso, não exista sobreposição de caixas. A melhor ocupação do espaço interno dos contêineres e a minimização do uso de contêineres pode reduzir substancialmente o preço do transporte de mercadorias, com reflexos no preço final dos produtos e nas finanças das empresas.

No entanto, o problema de carregamento de contêineres conta com características distintivas que devem ser levadas em conta tanto em sua formulação quanto em sua resolução. Orientação das caixas, estabilidade da carga, distribuição de peso dentro do contêiner e múltiplos destinos de entrega são algumas das doze considerações práticas listadas por (1) ao se carregar um contêiner e, assim sendo, podem ser levadas em conta ao se propor um modelo exato ou heurística que vise resolver o CLP.

Dentre os trabalhos efetuados nesta área, destacamos (2), (3), (4), (1), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11) e (12). De acordo com (13), embora nos últimos anos o número de publicações que tratam do problema de carregamento de contêineres

tenha aumentado, ainda há considerações práticas relevantes pouco abordadas até o momento.

Este trabalho apresenta uma proposta de resolução do problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos com restrição de carregamento completo de grupos de itens, baseada em programação linear inteira mista. A mesma procura alocar completamente um dado conjunto de caixas em um ou mais contêineres idênticos, de modo a otimizar o uso do espaço de cada contêiner.

O artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 2, o problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos com restrição de carregamento completo é explicado com mais detalhes, juntamente com um modelo de programação linear inteira mista que visa resolvê-lo; na seção 3, os resultados computacionais obtidos na avaliação do modelo são apresentados e analisados; finalmente, na seção 4 são apresentadas as principais conclusões alcançadas, bem como perspectivas para trabalhos futuros.

## **2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO**

### **2.1. Problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos**

Dentro do problema de carregamento de contêineres é possível

distinguir dois subproblemas. No primeiro, denominado Problema de Carregamento de *Bins* (*Bin Packing Problem – BPP*), o espaço de armazenagem é suficiente para a alocação de todas as caixas, visto que, em geral, o número de contêineres é irrestrito. Logo, busca-se minimizar o número de contêineres necessários para carregar todos os itens. Já no segundo, chamado Problema Tridimensional da Mochila (*Three Dimensional Knapsack Problem – 3DKP*), o espaço de um número limitado de contêineres não é suficiente para armazenar todos os itens. O objetivo é, então, determinar um subconjunto de caixas que maximiza a utilização do volume dos contêineres ou valor associado à carga.

O modelo matemático proposto neste artigo aborda um caso específico do 3DKP, no qual os contêineres são idênticos, isto é, possuem as mesmas dimensões e, conseqüentemente, mesmo volume. De acordo com a tipologia de (14), o modelo trabalha com o Problema de Multi-Mochilas Idênticas (*Multiple Identical Knapsack Problem – MIKP*).

O modelo proposto é uma extensão

para o MIKP da modelagem de carregamento de um único contêiner apresentada por (11). Um total de  $C$  contêineres idênticos,  $C \geq 1$ , cujas largura, comprimento e altura são, respectivamente,  $L$ ,  $W$  e  $H$ , devem ser carregados com  $m$  tipos de caixas distintas. Cada caixa do tipo  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , que deve ser alocada em um contêiner  $k$ , onde  $k = 1, \dots, C$ , possui largura  $l_i$ , comprimento  $w_i$ , altura  $h_i$  e volume  $v_i$ . Além disso, o problema é restrito em relação à quantidade de caixas disponíveis para carregamento, isto é, existe um total de  $b_i$  caixas do tipo  $i$  que podem ser colocadas no interior dos contêineres.

Tomando o sistema de coordenadas cartesiano, seja  $(p, q, r)$  o vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa qualquer no interior de um contêiner  $k$  (Figura 1). Os conjuntos abaixo, definidos por (11), indicam as possíveis localizações que a caixa pode assumir em relação às dimensões do contêiner, considerando ainda que as caixas possuem orientação fixa, isto é, a largura, comprimento e altura das caixas são paralelas às respectivas dimensões do contêiner:

$$X = \{p \mid 0 \leq p \leq L - \min_i(l_i), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$Y = \{q \mid 0 \leq q \leq W - \min_i(w_i), \quad q \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$Z = \{r \mid 0 \leq r \leq H - \min_i(h_i), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (3)$$

Embora os elementos dos conjuntos acima restrinjam números inteiros, essa condição pode ser facilmente relaxada.

As variáveis de decisão do modelo são variáveis binárias definidas como:

$$x_{ikpqr} = \begin{cases} 1, & \text{Se uma caixa do tipo } i \text{ tem seu vértice inferior frontal} \\ & \text{esquerdo no ponto } (p, q, r) \text{ do contêiner } k, \text{ tal que} \\ & 0 \leq p \leq L - l_i, \quad 0 \leq q \leq W - w_i, \quad 0 \leq r \leq H - h_i; \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

Considere ainda os conjuntos:

$$X_i = \{p \in X \mid 0 \leq p \leq L - l_i\} \quad (5)$$

$$Y_i = \{q \in Y \mid 0 \leq q \leq W - w_i\} \quad (6)$$

$$Z_i = \{r \in Z \mid 0 \leq r \leq H - h_i\} \quad (7)$$

O Problema de Multi-Mochilas Idênticas (MIKP) é formulado a partir do

modelo binário de (11) da seguinte maneira:

$$\max \sum_{k=1}^C \sum_{i=1}^m \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} v_i \cdot x_{ikpqr} \quad (8)$$

Sujeito a:

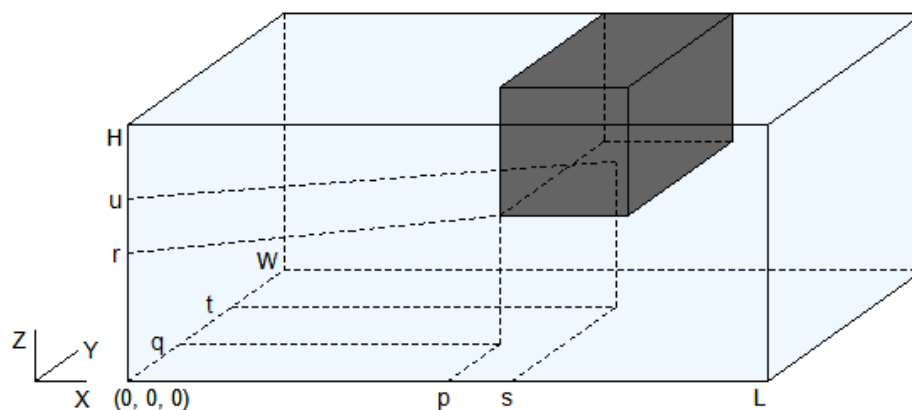
$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in X_i \mid s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_i \mid t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_i \mid u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ikpqr} \leq 1, \quad k = 1, \dots, C \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^C \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} x_{ikpqr} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (10)$$

$$x_{ikpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, C, \quad p \in X_i, \quad q \in Y_i, \quad r \in Z_i \quad (11)$$

No modelo acima, a função objetivo, dada pela Eq. 8, maximiza o volume das caixas alocadas nos  $C$  contêineres disponíveis; a Eq. 9 evita a sobreposição de caixas nos contêineres, impedindo a ocupação de um ponto  $(s, t, u)$  qualquer no interior de uma caixa

cujo vértice inferior frontal esquerdo é o ponto  $(p, q, r)$  por uma caixa distinta; a Eq. 10 não permite o carregamento de caixas do tipo  $i$  além da disponibilidade máxima; por fim, a Eq. 11 define o domínio das variáveis do modelo.



**FIGURA 1 – Uma caixa do tipo  $i$  no interior de um contêiner  $k$ . Fonte: Junqueira, Morabito e Yamashita (2012)**

## 2.2. Restrição de carregamento completo de grupos de itens

Em alguns casos práticos, é necessário garantir que um subconjunto de caixas seja integralmente carregado (ou deixado de fora do carregamento), mesmo que em detrimento do aproveitamento máximo do volume do contêiner. Isto é, se uma caixa pertencente a determinado subconjunto é carregada, todas as demais também devem ser transportadas ou, alternativamente, se uma caixa não é empacotada, todas as demais também devem ser deixadas de lado. Tais subconjuntos serão chamados, ao longo deste trabalho, de grupos de itens ou, simplesmente, grupos.

Para (1), em situações que envolvem o carregamento completo de grupos de itens há a exigência de que todas as caixas que fazem parte de uma entidade funcional (grupos de itens contendo peças de um eletrodoméstico, por exemplo) devem estar presentes no padrão de carregamento. De acordo com (6), a

restrição de carregamento completo pode ser abordada de quatro maneiras distintas: (i) um grupo de itens composto por um único tipo de caixa deve ser completamente empacotado; (ii) um grupo constituído por uma combinação de caixas de diferentes tipos deve fazer parte do padrão de carga; (iii) o número de caixas empacotadas de um único tipo deve ser múltiplo de determinado grupo composto por caixas do mesmo tipo; (iv) uma combinação de caixas de tipos distintos deve ser múltiplo de um grupo de itens formado pelos mesmos tipos de caixas. Este artigo trata da restrição de carregamento completo do tipo (iii); se, por exemplo, um grupo é formado por três caixas de mesmo tipo, os modelos propostos buscam garantir que o total de caixas carregadas desse tipo seja um múltiplo de três.

Seja  $\omega$  a quantidade de grupos de itens que devem ser enviados no padrão de carga. Seja ainda  $t$  um grupo de itens composto apenas por caixas do tipo  $i$ , onde

$t \in \mathbb{Z}$  e  $1 \leq t \leq \omega$ . Se  $\xi_t$  é a quantidade de caixas do grupo  $t$ , então a restrição de carregamento completo na qual são

enviados  $y_t$  grupos de itens formados por caixas do tipo  $i$  pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\sum_{k=1}^c \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} x_{ikpqr} = \xi_t \cdot y_t \quad (12)$$

$$y_t \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq t \leq \omega, \quad 1 \leq i \leq m \quad (13)$$

Os somatórios Eq. 12 garantem que a quantidade de caixas alocadas no interior dos contêineres é múltipla do total de caixas que formam o grupo  $t$ , enquanto as expressões da Eq. 13 definem o domínio das variáveis presentes na restrição.

### 3. EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Os modelos apresentados para o problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos, apresentado na seção 2.1, e para o problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos com restrição de carregamento completo, descrito na seção 2.2, foram gerados por meio de um algoritmo em linguagem de programação *Microsoft Visual Studio Ultimate 2012*© (versão 11.0.50727.1), e resolvidos utilizando-se o *software CPLEX*© *Interactive Optimizer* (versão 12.5.1.0) utilizando parâmetros padrão do mesmo. Os testes foram efetuados em um computador com processador *Intel*© *Core*™ *i3* de 2.53 GHz, memória RAM de 4 GB e sistema operacional de 32 bits.

Os modelos foram avaliados utilizando uma adaptação dos conjuntos de

testes propostos por (4). Um dos contêineres disponíveis em cada um dos conjuntos originais foi escolhido através de um processo aleatório de seleção. A quantidade disponível dos mesmos foi estipulada como o dobro da disponibilidade original do contêiner escolhido. As dimensões, os tipos e a disponibilidade das caixas não sofreram alterações. Os conjuntos de testes adaptados estão sumarizados na Tabela 1.

Para considerar a restrição de carregamento completo, optou-se por utilizar a mesma metodologia empregada por (6), criando dois grupos de itens que devem ser completamente carregados: o primeiro é formado por 7% do total de caixas disponíveis do tipo 1, enquanto o segundo é composto por 12% da totalidade de caixas do tipo 2. Nos casos em que o cálculo da porcentagem retornava um número não inteiro, a parte fracionária do valor foi descartada e uma unidade foi adicionada à parte inteira do resultado inicial, de modo que a quantidade de caixas seja inteira em todos os grupos de itens.

**TABELA 1 – Conjuntos de teste adaptados de Mohanty, Mathur e Ivancic (1994).**

Número	Caixas						Contêineres				
	Tipo	Disponibilidade	Dimensões			Grupos de itens		Disponibilidade	Dimensões		
	$i$	$b_i$	$l_i$	$w_i$	$h_i$	$\xi_1$	$\xi_2$	$K$	$L$	$W$	$H$
1	1	20	2	6	8	2	6	4	14	14	14
	2	50	8	4	10						
2	1	45	8	16	4	4	8	10	20	16	20
	2	60	8	8	8						
	3	50	8	12	12						
	4	25	12	4	4						
3	1	35	10	5	5	3	5	2	20	15	25
	2	40	5	15	10						
	3	28	5	15	15						
4	1	50	36	28	24	4	8	10	40	36	52
	2	60	40	32	20						
5	1	25	15	20	25	2	4	4	35	25	40
	2	30	10	15	10						
	3	40	20	25	35						
6	1	28	18	10	8	2	5	4	30	20	30
	2	37	12	14	10						
	3	30	6	10	8						
7	1	15	7	4	10	2	2	2	20	15	29
	2	12	3	5	11						
	3	20	6	9	12						
8	1	20	6	8	11	2	3	4	23	18	30
	2	17	5	15	9						
	3	13	4	13	7						
	4	24	12	13	8						
	5	21	10	14	11						
	6	80	8	2	4						
9	1	18	10	13	11	2	3	2	30	30	30
	2	20	8	9	10						
	3	12	7	12	15						
	4	22	14	15	11						
10	1	50	2	4	16	4	9	2	16	16	16
	2	70	2	8	16						
	3	80	8	2	4						
11	1	30	5	11	14	3	4	2	19	15	26
	2	28	9	12	10						
	3	37	7	13	17						
	4	23	10	10	8						
12	1	35	3	6	8	3	5	2	30	15	18
	2	40	5	9	4						
	3	15	8	9	12						
13	1	56	7	8	3	4	4	4	25	21	25
	2	28	12	11	4						
14	1	25	4	8	6	2	4	4	30	24	12
	2	32	10	12	6						
	3	45	14	14	8						
15	1	25	6	6	9	2	3	4	28	14	18
	2	25	12	10	8						
	3	15	4	7	5						
	4	20	7	9	11						
16	1	35	15	18	17	3	4	2	48	70	32
	2	30	11	14	11						
	3	25	24	26	15						

Fonte: Os autores.



A Tabela 2 apresenta um resumo da quantidade de variáveis e restrições presentes em cada um dos modelos gerados para teste. Alguns modelos não puderam ser gerados em razão de insuficiência de memória computacional; estas situações são representadas na tabela com o símbolo “-”.

O problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos, proposto pelas Eq. 8–11, possui em sua formulação apenas restrições de não sobreposição e limitação da quantidade de caixas, as quais são compostas unicamente por variáveis

binárias. Similar ao modelo de (11), percebe-se que, à medida há um aumento na disponibilidade das caixas, existem mais tipos de caixas, ou quando as mesmas possuem dimensões pequenas em relação aos contêineres, ocorre um aumento no número de restrições de cada modelo. Aqui, chama a atenção o papel desempenhado pela quantidade de contêineres disponíveis para carregamento; note que há um considerável aumento no número de restrições de não sobreposição quando mais contêineres são considerados (compare os conjuntos de teste 2 e 7).

**TABELA 2 – Número de restrições e de variáveis dos modelos propostos**

Conjunto de Teste	Nº. de Variáveis		Nº. de Restrições		
	Binárias	Inteiras	Não Sobreposição	Disponibilidade de Caixas	Carregamento Completo
1	4 816	2	4 004	2	2
2	43 160	2	28 730	4	2
3	5 946	2	7 392	3	2
4	14 700	2	14 850	2	2
5	–	–	–	–	–
6	49 628	2	25 300	3	2
7	18 024	2	8 640	3	2
8	–	–	–	–	–
9	–	–	–	–	–
10	4 170	2	5 850	3	2
11	6 506	2	3 420	4	2
12	13 874	2	8 400	3	2
13	38 024	2	24 472	2	2
14	24 236	2	12 852	3	2
15	27 444	2	12 600	4	2
16	–	–	–	–	–

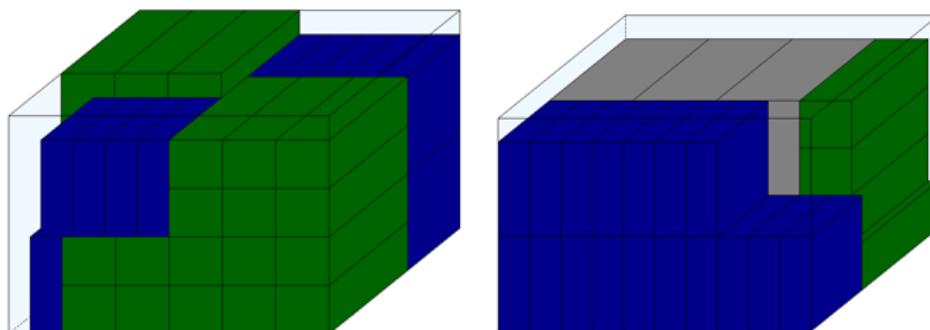
Fonte: Os autores.

Quando os modelos passam a considerar a restrição de carregamento completo, por meio da adição das Eq. 12–13 ao proposto em Eq. 8–11, o número de variáveis binárias permanece inalterado em

relação ao problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos sem carregamento completo; isto é esperado, uma vez que, como não houve nenhuma alteração nas dimensões dos contêineres,

também não deve existir nenhuma mudança na quantidade e na formulação das restrições de não sobreposição. Entretanto, como nos conjuntos de testes a quantidade de caixas dos tipos 1 e 2 a serem empacotadas deve ser múltiplo do total de caixas que compõe os grupos de

itens, isto adiciona duas variáveis inteiras positivas aos problemas testados. O acréscimo de restrições de carregamento completo ocorre na mesma ordem; isto é, se há  $t$  grupos de itens, o modelo Eq. 8–13 terá, em sua formulação,  $t$  restrições desse tipo.



**FIGURA 2 – Padrão de carregamento do conjunto de teste 12 obtido pelo modelo Eq. 8–11.**

Fonte: Os autores.

A Tabela 3 apresenta um sumário dos resultados obtidos após a realização dos testes. Em alguns casos, o computador não possuía memória suficiente para gerar o modelo pelo *Microsoft Visual Studio Ultimate 2012*©. Assim, não há

informações relevantes quanto à porcentagem de ocupação dos contêineres nem quanto ao tempo de execução. Tal como na Tabela 2, o símbolo “–” foi empregado nestes casos.

**Tabela 3 – Panorama dos testes computacionais efetuados com os modelos propostos**

Conjunto de teste	Volume de cada contêiner	Volume total dos contêineres	Sem Carregamento Completo			Com Carregamento Completo		
			Função objetivo	Ocupação (em %)	Tempo (s)	Função objetivo	Ocupação (em %)	Tempo (s)
1	2 744	10 976	5 760	52,48	0,42	5 760	52,48	0,42
2	6 400	64 000	52 800	82,50	282	52 800	82,50	283,02
3	7 500	15 000	15 000	100,00	9,61	15 000	100,00	10,11
4	74 880	748 800	512 000	68,38	16,57	506 368	67,62	20,22
5	35 000	140 000	–	–	–	–	–	–
6	18 000	72 000	56 400	78,33	475,68	56 400	78,33	489,03
7	8 700	17 400	11 436	65,72	81,23	11 436	65,72	25,22
8	12 420	49 680	–	–	–	–	–	–
9	27 000	54 000	–	–	–	–	–	–
10	4 096	8 192	8 192	100,00	3,35	8 192	100,00	3,68
11	7 410	14 820	10 054	67,84	2,93	9 867	66,58	3,09
12	8 100	16 200	13 572	83,78	9,67	12 816	79,11	40,20
13	13 125	52 500	24 192	46,08	35,35	24 192	46,08	27,52
14	8 640	34 560	30 976	89,63	189,93	30 784	89,07	203,35
15	7 056	28 224	19 476	69,01	30,70	19 209	68,06	23
16	107 520	215 040	–	–	–	–	–	–
Média				75,31	94,79		74,63	94,07
Desvio Padrão				16,25	142,40		16,16	146,77

Fonte: Os autores.

Uma breve análise mostra que, nos modelos sem restrição de carregamento completo a ocupação média do volume disponível foi de 75,31%, com desvio padrão de 16,25%. Esses valores são próximos aos obtidos com os testes realizados com os modelos com restrição de carregamento completo (74,63% e 16,16%, respectivamente). Quanto ao tempo necessário para a resolução os modelos, há pouca diferença quando se considera o carregamento completo de grupos – em média, o tempo é inferior em relação aos modelos sem restrição de carregamento completo. Note que para os dados do conjunto de testes 7 há uma acentuada variação no tempo de resolução; enquanto 25,22 segundos são gastos para encontrar uma solução para o modelo com restrição de carregamento completo, o tempo sobe para 81,23 segundos quando tal consideração prática não é avaliada.

As Figuras 2 e 3 mostram o padrão de carga obtido para o conjunto de teste 12 com os modelos Eq. 8–11 e Eq. 8–13, respectivamente. As caixas foram diferenciadas de acordo com os grupos de

itens formados: as caixas do grupo de itens  $\xi_1$  foram coloridas de azul, enquanto pertencentes ao grupo  $\xi_2$  de verde; já as caixas que do tipo  $i = 3$ , que não pertencem a nenhum grupo de itens tem cor cinza. Percebe-se que a exigência de carregamento de múltiplos de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  diminui substancialmente a quantidade de caixas do tipo  $i = 3$  (Figura 3), acarretando num melhor aproveitamento do espaço dos contêineres quando a restrição de carregamento completo de grupos de itens não é considerada no modelo (Figura 2). Vale salientar que, uma vez que a consideração prática de estabilidade não foi tratada, eventualmente os padrões de carga podem exibir caixas que não estão apoiadas sobre qualquer superfície, isto é, existem espaços vazios abaixo das caixas. Segundo (15), numa situação realista essas cavidades podem ser preenchidas com materiais sintéticos, como borracha ou espuma, para garantir um apoio mínimo às caixas.

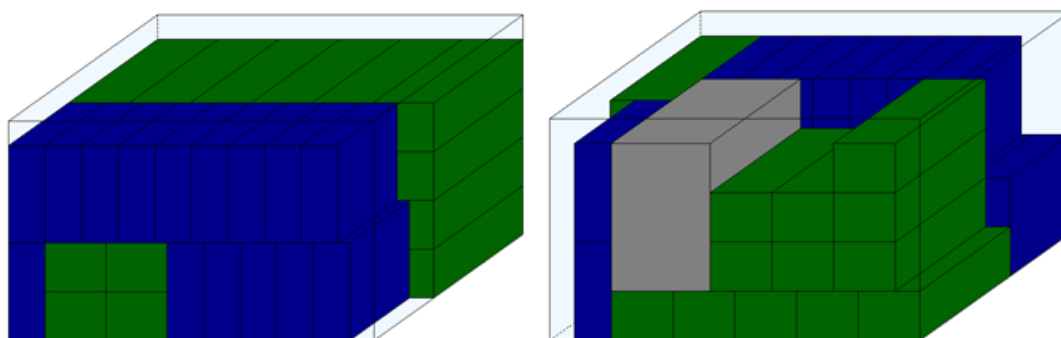


FIGURA 3 – Padrão de carregamento do conjunto de teste 12 obtido pelo modelo Eq. 8–13. Fonte: Os autores.

Em vista da grande demanda de memória computacional para geração dos modelos e realização dos cálculos das possíveis posições que as caixas podem assumir ao serem empacotadas nos contêineres, alguns conjuntos de teste não puderam ser avaliados. Assim, a modelagem apresentada neste trabalho pode ter dificuldade para tratar de problemas reais, que envolvem diversos contêineres de mesma dimensão e variados tipos de caixas. Entretanto, vale ressaltar que, como apontado na Tabela 2, os modelos testados possuem um alto número de variáveis e restrições, sendo bastante complexa a tarefa de encontrar uma solução adequada para os mesmos.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma proposta de resolução do problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos com restrição de carregamento completo, baseada em programação linear inteira mista. O objetivo da mesma é alocar completamente um dado conjunto de caixas de distintos tamanhos em contêineres idênticos, de modo a otimizar o uso do espaço de cada contêiner, garantindo que certo subconjunto de caixas se faça, obrigatoriamente, presente no carregamento.

O software *CPLEX© Interactive Optimizer* foi utilizado para efetuar testes computacionais com dados adaptados da

literatura de carregamento de contêineres. Os resultados obtidos mostraram que os modelos propostos representam de modo apropriado as considerações práticas tratadas, embora a solução ótima seja alcançada apenas em modelos de tamanho moderado, em virtude da necessidade de avaliar as possíveis posições de cada caixa nos contêineres disponíveis.

Futuramente, este trabalho pode ser utilizado como motivação para pesquisas que abordem as demais variações de restrição de carregamento completo citadas por (6), e que tratem de situações mais realistas, trabalhando com as demais considerações práticas apontadas por (1) e considerem contêineres de diferentes dimensões.

#### REFERÊNCIAS

1. Bischoff EE, Ratcliff MSW. Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*. 1995;23(4):377–90.
2. Beasley JE. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. *Oper Res*. 1985;33(1):49–64.
3. Haessler RW, Talbot BF. Load planning for shipments of low density products. *Eur J Oper Res*. 1990;44:289–99.

4. Mohanty BB, Ivancic NJ, Technology L. Theory and methodology value considerations in three-dimensional packing - A heuristic procedure using the fractional knapsack problem. 1994;74:143–51.
5. Terno J, Scheithauer G, Sommerweiß U, Riehme J. An efficient approach for the multi-pallet loading problem. 2000;123:372–81.
6. Eley M. A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem. OR Spectrum. 2003;25:45–60.
7. Hifi M. Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: A comparative study. Comput Oper Res. 2004;31:657–74.
8. Christensen SG, Rousøe DM. Container loading with multi-drop constraints. International Transportation Operations Research [Internet]. 2009;16:727–43. Available from: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1475-3995.2009.00714.x>
9. Almeida A de, Figueiredo MB. A particular approach for the Three-dimensional Packing Problem with additional constraints. Computer & Operations Research [Internet]. Elsevier; 2010;37(11):1968–76. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2010.01.010>
10. Ren J, Tian Y, Sawaragi T. A relaxation method for the three-dimensional loading capacitated vehicle routing problem. 2011 IEEE/SICE Int Symp Syst Integr. Ieee; 2011;750–5.
11. Junqueira L, Morabito R, Sato Yamashita D. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. Computer & Operations Research [Internet]. Elsevier; 2012;39(1):74–85. Available from: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0305054810001486>
12. Ceschia S, Schaerf A. Local search for a multi-drop multi-container loading problem. Journal of Heuristics. 2013;19:275–94.
13. Bortfeldt A, Wäscher G. Container Loading Problems – A State-of-the-Art Review. European Journal of Operations Research. 2013;229:1–20.
14. Wäscher G, Haußner H, Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. European Journal of Operations Research. 2007;183:1109–30.
15. Vendramini E. Otimização do Problema de Carregamento de Container Usando uma Metaheurística Eficiente [dissertação]. Ilha Solteira: Faculdade de Engenharia, UNESP; 2007.

Sources of funding: No  
Conflict of interest: No  
Date of first submission: 2015-02-09  
Last received: 2015-02-09  
Accepted: 2015-02-09  
Publishing: 2015-04-30