APLICACION DE UN SISTEMA DE RE-ESCRITURA A LA ESTRUCTURA DE GRUPO

Luis Ignacio Lizcano Bueno
Profesor de la Universidad
Francisco de Paula Santander
e-mail: llizcano@idecnet.com

Resumen

Este documento presenta los conceptos fundamentales de un sistema de re-escritura de una especificación ecuacional, junto con el desarrollo paso a paso de las reglas de re-escritura de la estructura de grupo, para dos casos especiales.

1. Especificación ecuacional

Definición 1.1. Una especificación ecuacional es un par (Σ, E), donde Σ es la signatura, que consiste en un conjunto contable e infinito de variables y un conjunto no vacío de funciones F. G., ... de aridad n, con $n \leq 0$. Si la aridad es cero, se dice que la función es una constante. E es un conjunto de ecuaciones s = t, entre los términos s y t. El conjunto T (Σ) son los términos generados de Σ, y es el conjunto más pequeño, tal que $x \in T(\Sigma)$ para cada variable $x \in \Sigma$ y si $t_1, ..., t_n$ T(Σ) entonces $F(t_1, ..., t_n)$ T(Σ), para $F \in \Sigma$ de aridad n.

Definición 1.2. Una sustitución σ es una función, de T(Σ) en T(Σ), de tal manera que $\sigma(F(t_1, ..., t_n)) = F(\sigma(t_1), ..., \sigma(t_n))$ para cada función F con aridad n y con $t_1, ..., t_n$ en T(Σ). Se nota t^σ en lugar de σ(t).

Definición 1.3. Sea (Σ, E) una especificación ecuacional. Si una ecuación s = t entre términos s y t de T(Σ) es derivable de las ecuaciones de E, se nota que una $(\Sigma, E) \vdash s = t$, o, $s =_e t$.

La derivabilidad está determinada por el siguiente sistema de inferencia:

1. $(\Sigma, E) \vdash s = t$, si $s = t \in E$.

2. Si $(\Sigma, E) \vdash s = t$ entonces $(\Sigma, E) \vdash s^\sigma = t^\sigma$, para cada sustitución σ.

3. Si $(\Sigma, E) \vdash s_1 = t_1, ..., (\Sigma, E) \vdash S_n = t_n$ entonces $(\Sigma, E) \vdash F(s_1, ..., S_n) = F(t_1, ..., T_n)$, para cada función $F \in \Sigma$, de aridad n.

4. $(\Sigma, E) \vdash t = t$.

5. Si $(\Sigma, E) \vdash t_1 = t_2$, $(\Sigma, E) \vdash t_2 = t_3$ entonces $(\Sigma, E) \vdash t_1 = t_3$.

6. Si $(\Sigma, E) \vdash s = t$ entonces $(\Sigma, E) \vdash t = s$.

Definición 1.4. Sea Σ una signatura. Una Σ–álgebra A es un conjunto B, junto con las funciones $F^A: B^n \rightarrow B$ para cada función $F \in \Sigma$, de aridad n.

Definición 1.5. Una Σ-álgebra A es un modelo de un conjunto de ecuaciones E, entre los términos de T (Σ), si para cada ecuación s = t de E es válida en A, se nota $A \models E$.

El siguiente teorema de Birkhoff garantiza la completez del sistema [1].

Teorema 1.6. Sea (Σ, E) una especificación ecuacional. Para todos los términos s y t en T(Σ), se tiene que $(\Sigma, E) \vdash s = t$ si y solo si $(\Sigma, E) \models s = t$.

2. Re-escritura

Definición 2.1. Un sistema de re-escritura R sobre una signatura Σ, es un conjunto finito de reglas de re-escritura de la forma $t \rightarrow r$, tal que $t, r \in T(\Sigma)$ y $Var(r) \subseteq Var(t)$.

Una regla $t \rightarrow r$ se aplica a un término p de Σ, si un subtérmino s de p, puede ser asociado a t con alguna sustitución σ de términos en Σ, es decir $s = t^\sigma$. La regla es aplicada mediante el reemplazo del subtérmino s en p con el correspondiente término r^σ de la regla. Se nota $t \rightarrow_R r$, o, $t \rightarrow r$, para indicar que el término t de Σ se re-escribe en el término r de Σ, por la aplicación de alguna regla de R. Una derivación es una sucesión de re-escrituras, si $t \rightarrow ... \rightarrow r$ que se hace en cero o más pasos. Se dice que r es derivable de t. Si ninguna regla es aplicable a t, se dice que t es irreducible. Cuando un término irreducible r es derivable de t, se dice que r es una forma normal de t[2].

Definición 2.2. Sean $\alpha \rightarrow \beta$ y $\gamma \rightarrow \delta$ son dos reglas de re-escritura, tales que α se unifica con un subtérmino de γ. Esto es que existe un contexto C[], un término t, $C[t] \in T(\Sigma)$ y = umg (α, t) tal que $\gamma = C[t]$ y $t^\sigma = \alpha^\sigma$. El término $\gamma^\sigma \cong C[t]^\sigma$ puede ser reducido en dos posibles caminos. $C[t]^\sigma \rightarrow C[\beta]^\sigma$ y $\gamma^\sigma \rightarrow \delta^\sigma$. El par $< C[\beta]^\sigma, \delta^\sigma >$ es llamado un par crítico obtenido por la superposición de $\alpha \rightarrow \beta$ sobre $\gamma \rightarrow \delta$.

Definición 2.3. Un par crítico <s, t> se dice que es convergente, si s y t se reducen a un término común.

3. Aplicación de la Re-escritura a la estructura de grupos

Una especificación ecuacional de la estructura de grupos es el par (Σ, E) donde Σ contiene los símbolos de funciones : 0, -, + y E un conjunto de ecuaciones [5].

Ejemplo 1.

Sea E con las ecuaciones: 0 + x = x, (-x) + x = 0, (x + y) + z = x + (y + z). Con base a la definición 2.1, las reglas de re-escritura con la siguiente orientación. r_1: $0 + x \rightarrow 0$, r_2: $(-x) + x \rightarrow 0$, r_3: (x + y) + z x + (y + z), aplicando la definición 2.2 reiteradamente entre las tres reglas y las nuevas generadas por los pares críticos no convergentes, se tienen los siguientes hechos.

Al suponer r_1 sobre r_3

$$\begin{array}{ccc} & (0 + x)+z & \\ r_1\downarrow & & \downarrow r_3 \\ x+z & & 0+(x+z) \\ & & \downarrow r_1 \\ & & x + z \end{array}$$

Al superponer r_2 sobre r_3

$$\begin{array}{ccc} & (-x + x) + z & \\ r_2\downarrow & & \downarrow r_3 \\ 0 + z & & -x + (x+ z) \\ r_1\downarrow & & \\ z & & \end{array}$$

par crítico <z, -z + (x + z)> no convergente, se añade la regla r_4: $-x + (x + z) \rightarrow z$.

Al superponer r_3 sobre r_3

$$\begin{array}{ccc} & ((x + y) + z) + w & \\ r_3\downarrow & & \downarrow r_3 \\ (x + (y + z)) + w & & (x + y) + (z + w) \\ r_3\downarrow & & \downarrow r_3 \\ x + ((y + z) + w) & & x + (y + (z + w)) \\ r_3\downarrow & & \\ x + (y + (z + w)) & & \end{array}$$

Al superponer r_1 sobre r_4

$$\begin{array}{ccc} & -0+(0+x) & \\ r_1\downarrow & & \downarrow r_4 \\ -0+x & & x \end{array}$$

par crítico $<-0+x,\ x>$ no convergente, se añade la regla r_5: $-0+x \rightarrow x$.

Al superponer r_2 sobre r_4

$$\begin{array}{ccc} & -(-x)+(-x+x) & \\ r_2\downarrow & & \downarrow r_4 \\ -(-x)+0 & & x \end{array}$$

par crítico $<-(-x)+0,\ x>$ no convergente,se añade la regla r_6: $-(-x)+0 \rightarrow x$.

Al superponer r_3 sobre r_4

$$\begin{array}{ccc} & -(x+y)+((x+y)+z) & \\ r_3\downarrow & & \downarrow r_4 \\ -(x+y)+(x+(y+z)) & & z \end{array}$$

par crítico $<-(x+y)+(x+(y+z)),\ z>$ no convergente, se trata al final.

Al superponer r_4 sobre r_4

$$\begin{array}{ccc} & -(-x)+(-x+(x+z)) & \\ r_4\downarrow & & \downarrow r_4 \\ -(-x)+z & & x+z \end{array}$$

par crítico $<-(-x)+z,\ x+z>$ no convergente, se añade la regla r_7: $-(-x)+z \rightarrow x+z$.

Al superponer r_4 sobre r_3

$$\begin{array}{ccc} & (-x+(x+z))+w & \\ r_4\downarrow & & \downarrow r_3 \\ z+w & & -x+((x+z)+w) \\ & & \downarrow r_3 \\ & & -x+(x+(z+w)) \\ & & \downarrow r_4 \\ & & z+w \end{array}$$

Al superponer r_2 sobre r_5

$$\begin{array}{ccc} & -0+0 & \\ r_2\downarrow & & \downarrow r_5 \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Al superponer r_4 sobre r_5

$$\begin{array}{ccc} & -0+(0+x) & \\ r_4\downarrow & & \downarrow r_5 \\ x & & 0+x \\ & & \downarrow r_1 \\ & & x \end{array}$$

Al superponer r_5 sobre r_3

$$\begin{array}{ccc} & (-0+y)+z & \\ r_5\downarrow & & \downarrow r_3 \\ y+z & & -0+(y+z) \\ & & \downarrow r_5 \\ & & y+z \end{array}$$

Al superponer r_5 sobre r_4

$$\begin{array}{ccc} & -(-0)+(-0+x) & \\ r_5\downarrow & & \downarrow r_4 \\ -(-0)+x & & x \\ r_7\downarrow & & \\ 0+x & & \\ r_1\downarrow & & \\ x & & \end{array}$$

Al superponer r_6 sobre r_3

$$\begin{array}{ccc} & (-(-x)+0)+z & \\ r_6\downarrow & & \downarrow r_3 \\ x+z & & -(-x)+(0+z) \\ & & \downarrow r_1 \\ & & -(-x)+z \end{array}$$

par crítico $<x+z,\ -(-x)+z>$ convergente, por r_7.

Luego r_6 se transforma por r_7 en $-(-x)+0$ $x+0$, se tiene un par crítico $x+0$, x no convergente, se añade la regla r_8: $x+0$ x.

Al superponer r_2 sobre r_8

$$\begin{array}{ccc} & -0+0 & \\ r_2\downarrow & & \downarrow r_8 \\ 0 & & -0 \end{array}$$

par crítico $<0,\ -0>$ no convergente, se añade la regla r_9: $-0 \rightarrow 0$.

Luego r_5 se deriva de r_9 y de r_1.

Al superponer r_8 sobre r_3

$$\begin{array}{ccc} & (x+0)+z & \\ r_8\downarrow & & \downarrow r_3 \\ x+z & & x+(0+z) \\ & & \downarrow r_1 \\ & & x+z \end{array}$$

Al superponer r_8 sobre r_4

$$\begin{array}{ccc} & -x+(x+0) & \\ r_1\downarrow & & \downarrow r_4 \\ -x+x & & 0 \\ r_2\downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

Al superponer r_8 sobre r_7

$$\begin{array}{ccc} & -(-x)+0 & \\ r_8\downarrow & & \downarrow r_7 \\ -(-x) & & x+0 \\ & & \downarrow r_8 \\ & & x \end{array}$$

par crítico $<-(-x),\ x>$ no convergente, se añade la regla r_{10}: $-(-x) \rightarrow x$.

Por tanto r_7 se infiere de r_{10}.

Al superponer r_{10} sobre r_2

$$\begin{array}{ccc} & -(-x)+(-x) & \\ r_{10}\downarrow & & \downarrow r_2 \\ x+(-x) & & 0 \end{array}$$

par crítico $<x+(-x),\ 0>$ no convergente, se añade la regla r_{11}: $x+(-x) \rightarrow 0$.

Al superponer r_{10} sobre r_4

$$\begin{array}{ccc} & -(-x)+(-x+z) & \\ r_{10}\downarrow & & \downarrow r_4 \\ x+(-x+z) & & z \end{array}$$

par crítico $<x+(-x+z),\ z>$ no convergente, se añade la regla r_{12}: $x+(-x+z) \rightarrow z$.

Al superponer r_3 sobre r_{11}

$$\begin{array}{ccc} & (x+y)+(-(x+y)) & \\ r_3\downarrow & & \downarrow r_{11} \\ x+(y+(-(x+y))) & & 0 \end{array}$$

par crítico $<x+(y+(-(x+y))),\ 0>$ no convergente, se añade la regla r_{13} : $x+(y+(-(x+y))) \rightarrow 0$.

Al superponer r_{11} sobre r_3

$$\begin{array}{ccc} & (x+(-x))+z & \\ r_{11}\downarrow & & \downarrow r_3 \\ 0+z & & x+((-x)+z \\ r_1\downarrow & & \\ z & & \end{array}$$

par crítico $<z,\ x+(-x+z)>$ convergente por r_{12}.

Al superponer r_3 sobre r_{12}

$$\begin{array}{ccc} & (x+y)+(-(x+y)+z) & \\ r_3\downarrow & & \downarrow r_{12} \\ x+(y+(-(x+y)+z)) & & z \end{array}$$

par crítico $<x+(y+(-(x+y)+z)),\ z>$ no convergente, se trata al final.

Al superponer r_{13} sobre r_4

$$\begin{array}{ccc} & (-x)+(x+(y+(-(x+y)))) & \\ r_{13}\downarrow & & \downarrow r_{14} \\ -x+0 & & y+(-(x+y)) \\ r_8\downarrow & & \\ -x & & \end{array}$$

par crítico $<-x,\ y+(-(x+y))>$ no convergente, se añade la regla r_{14}: $y+(-(x+y)) \rightarrow -x$.

De r_{14} y r_{11} se infiere r_{13} así: $x + (y + (-(x + y))) \to x + (-x) \to 0$.

Al superponer r_{14} sobre r_4

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(-y) + (y + (-(x + y)))} \\ r_{14}\downarrow & \downarrow r_4 \\ -y + (-x) & -(x + y) \end{array}$$

par crítico $<-y + (-x), -(x + y)>$ no convergente, se añade la regla r_{15}: $-y + (-x) \to -(x + y)$.

De r_{15} y r_{12} se infiere r_{14} así: $y + (-(x + y)) \to y + (-y + (-x)) \to -x$.
El par crítico obtenido de superponer r_3 sobre r_4 se deriva

$$\begin{array}{c} -(x + y) + (x + (y + z)) \\ \downarrow r_{15} \\ (-y + (-(x)) + (x + (y + z)) \\ \downarrow r_{13} \\ -y + (-x + (x + (y + z))) \\ \downarrow r_{14} \\ -y + (y + z) \\ \downarrow r_{14} \\ z \end{array}$$

El par crítico obtenido de superponer r_3 sobre r_{12} se deriva

$$\begin{array}{c} x + (y + (-(x + y) + z)) \\ \downarrow r_{15} \\ x + (y + ((-y + (-x)) + z)) \\ \downarrow r_3 \\ x + (y + (-y + (-x + z))) \\ \downarrow r_{12} \\ x + (-x + z) \\ \downarrow r_{12} \\ z \end{array}$$

Un sistema de re-escritura R de la estructura dada es:
r_1: $x + 0 \to 0$
r_2: $(-x) + x \to 0$,
r_3: $(x + y) + z \to x + (y + z)$
r_4: $-x + (x + z) \to z$
r_8: $x + 0 \to x$
r_9: $-0 \to 0$
r_{10}: $-(-x) \to x$
r_{11}: $x + (-x) \to 0$
r_{12}: $x + (-x + z) \to z$
r_{15}: $-y + (-x) \to -(x + y)$.

Ejemplo 2.

Sea E con las ecuaciones: $0 + x = x$, $x + (-x) = 0$, $(x + y) + z = x + (y + z)$, con base a la definición 2.1, las reglas de re-escritura con la siguiente orientación. r_1: $0 + x \to 0$, r_2: $x + (-x) \to 0$, r_3: $(x + y) + z \to x + (y + z)$ y aplicando la definición 2.2 reiteradamente, similar al ejemplo anterior, se tiene que:

Al superponer r_1 sobre r_2

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{0 + (-0)} \\ r_1\downarrow & \downarrow r_2 \\ -0 & 0 \end{array}$$

par crítico $<-0, 0>$ no convergente, se añade la regla r_4: $-0 \to 0$.

Al superponer r_1 sobre r_3

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(0 + x) + z} \\ r_1\downarrow & \downarrow r_3 \\ x + z & 0+(x+z) \\ & \downarrow r_1 \\ & x + z \end{array}$$

Al superponer r_2 sobre r_3

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(x + (-x)) + z} \\ r_2\downarrow & \downarrow r_3 \\ 0 + z & x +(-x+z) \\ r_1\downarrow & \\ z & \end{array}$$

par crítico $<z, x + (-x + z)>$ no convergente, se añade la regla r_5: $x + (-x + z) \to z$.

Al superponer r_3 sobre r_2

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(x + y) + (-(x + y))} \\ r_3\downarrow & \downarrow r_2 \\ x + (y + (-(x + y))) & 0 \end{array}$$

par crítico $<x + (y + (-(x + y))), 0>$ no convergente, se añade la regla r_6: $x + (y + (-(x + y))), \to 0$.

Al superponer r_3 sobre r_3

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{((x + y) + z) + w} \\ r_3\downarrow & \downarrow r_3 \\ (x + (y + z))+w & (x + y)+(z + w) \\ r_3\downarrow & \downarrow r_3 \\ x +((y + z) + w) & x +(y +(z + w)) \\ r_3\downarrow & \\ x + (y + (z + w)) & \end{array}$$

Al superponer r_1 sobre r_5

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{0 + (-0 + z)} \\ r_1\downarrow & \downarrow r_5 \\ -0 + z & z \\ r_4\downarrow & \\ 0 + z & \\ r_1\downarrow & \\ z & \end{array}$$

Al superponer r_2 sobre r_5

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{x + (-x + (-(-x)))} \\ r_2\downarrow & \downarrow r_5 \\ x + 0 & -(-x) \end{array}$$

par crítico $<x + 0, -(-x)>$ no convergente, se añade la regla r_7: $-(-x)\ x +0$

Al superponer r_3 sobre r_5

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(x + y) + (-(x + y) +z)} \\ r_3\downarrow & \downarrow r_5 \\ x + (y + (-(x + y) + z)) & z \end{array}$$

par crítico $<x + (y + (-(s + z)), z>$ no convergente, se trata más adelante.

Al superponer r_5 sobre r_5

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{x + (-x + (-(-x) + z))} \\ r_5\downarrow & \downarrow r_5 \\ x + z & -(-x) + z \\ & \downarrow r_7 \\ & (x + 0) + z \\ & \downarrow r_3 \\ & x + (0 + z) \\ & \downarrow r_1 \\ & x + z \end{array}$$

Al superponer r_5 sobre r_3

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(x + (-x + z)) + w} \\ r_5\downarrow & \downarrow r_3 \\ z + w & x +((-x + z)+ w) \\ & \downarrow r_3 \\ & x +(-x +(z + w)) \\ & \downarrow r_5 \\ & z + w \end{array}$$

Al superponer r_5 sobre r_6

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{x + (-x + (-(x + (-x))))} \\ r_5\downarrow & \downarrow r_6 \\ -(x + (-x)) & 0 \\ r_2\downarrow & \\ -0 & \\ r_4\downarrow & \\ 0 & \end{array}$$

Al superponer r_1 sobre r_6

$$\begin{array}{lcr} & x + (0 + (-(x + 0))) & \\ r_1\downarrow & & \downarrow r_6 \\ x + (-x + 0) & & 0 \\ r_5\downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

Al superponer r_1 sobre r_6

$$\begin{array}{lcr} & 0 + (y + (-(0 + y))) & \\ r_1\downarrow & & \downarrow r_6 \\ y + (-(0 + y)) & & 0 \\ r_1\downarrow & & \\ y + (-y) & & \\ r_2\downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

Al superponer r_6 sobre r_3

$$\begin{array}{lcr} & (x + (y + (-(x + y)))) + z & \\ r_6\downarrow & & \downarrow r_3 \\ 0 + z & & x + ((y + (-(x + y))) + z) \\ r_1\downarrow & & \\ z & & \end{array}$$

par crítico $<z, x + ((y + (-(x + y))) + z)>$ no convergente, se trata más adelante.

Al superponer r_7 sobre r_2

$$\begin{array}{lcr} & -x + (-(-x)) & \\ r_7\downarrow & & \downarrow r_2 \\ -x + (x + 0) & & 0 \end{array}$$

par crítico $<-x + (x + 0), 0>$ no convergente, se trata a continuación.

Al superponer r_7 sobre r_5

$$\begin{array}{lcr} & -x + (-(-x) + z) & \\ r_7\downarrow & & \downarrow r_5 \\ -x + ((x + 0) + z) & & z \\ r_3\downarrow & & \\ -x + (x + (0 + z)) & & \\ r_1\downarrow & & \\ -x + (x + z) & & \end{array}$$

par crítico $<-x + (x + z), z>$ no convergente, se añade la regla r_8: $-x + (x + z) \to z$, lo cual hace convergente el par crítico obtenido al superponer r_7 sobre r_2.

Al superponer r_7 sobre r_3

$$\begin{array}{lcr} & (-(-x) + y) + z & \\ r_7\downarrow & & \downarrow r_3 \\ ((x + 0) + y) + z & & -(-x) + (y + z) \\ r_3\downarrow & & \downarrow r_4 \\ (x + (0 + y)) + z & & (x + 0) + (y + z) \\ r_1\downarrow & & \downarrow r_3 \\ (x + y) + z & & (x + (0 + (y + z)) \\ r_3\downarrow & & \downarrow r_1 \\ x + (y + z) & & x + (y + z) \end{array}$$

Al superponer r_1 sobre r_8

$$\begin{array}{lcr} & -0 + (0 + z) & \\ r_1\downarrow & & \downarrow r_8 \\ -0 + z & & z \\ r_4\downarrow & & \\ 0 + z & & \\ r_1\downarrow & & \\ z & & \end{array}$$

Al superponer r_2 sobre r_8

$$\begin{array}{lcr} & -x + (x + (x + (-x)) & \\ r_2\downarrow & & \downarrow r_8 \\ -x + 0 & & -x \end{array}$$

par crítico $<-x + 0, -x>$ con convergente, se añade la regla r9: $-x + 0 \to -x$.

Al superponer r_3 sobre r_8

$$\begin{array}{lcr} & -(x+y) + ((x + y) + z) & \\ r_3\downarrow & & \downarrow r_8 \\ -(x + y) + (x + (y + z)) & & z \end{array}$$

par crítico $<-(x + y) + (x + z)), z>$ no convergente, se trata más adelante.

Al superponer r_6 sobre r_8

$$\begin{array}{lcr} & -x + (x + (y + (-(x + y)))) & \\ r_6\downarrow & & \downarrow r_8 \\ -x + 0 & & y + (-(x + y)) \\ r_9\downarrow & & \\ -x & & \end{array}$$

par crítico $<-x, y + (-(x + y))>$ no convergente, se añade la regla r_{10}: $y + (-(x + y)) \to -x$.

De r_{10} y r_2 se infiere r_6 así: $x + (y + (-(x + y))) \to x + (-x) \to 0$. De r_{10} y r_5 se infiere el par crítico obtenido de superponer r_6 sobre r_3, así: $x + ((y + (-(x + y))) + z) \to x + (-x + z) \to z$.

Al superponer r_{10} sobre r_8

$$\begin{array}{lcr} & -y + (y + (-(x + y))) & \\ r_{10}\downarrow & & \downarrow r_8 \\ -y + (-x) & & -(x + y) \end{array}$$

par crítico $<-y + (-x), -(x + y)>$ no convergente, se añade la regla r_{11}: $-(x + y) \to -y + (-x)$.

De r_{11} y r_5 se infiere r_{10} así: $y + (-(x + y)) \to y + (-y + (-x)) \to -x$.

El par crítico obtenido de superponer r_3 sobre r_5 se deriva

$$\begin{array}{c} X + (y + (-(X + Y) + z)) \\ \downarrow r_{11} \\ x + (y + ((-y + (-x)) + z)) \\ \downarrow r_3 \\ x + (y + (-y + (-x + z))) \\ \downarrow r_5 \\ x + (-x + z) \\ \downarrow r_5 \\ z \end{array}$$

El par crítico obtenido de r_3 y r_8 se deriva

$$\begin{array}{c} -(x + y) + (x + (y + z)) \\ \downarrow r_{11} \\ (-y + (-x)) + (x + (y + z)) \\ \downarrow r_3 \\ -y + (-x + (x + (y + z))) \\ \downarrow r_8 \\ -y + (y + z) \\ \downarrow r_8 \\ z \end{array}$$

Un sistema de re-escritura R de la estructura dada es:

r_1: $0 + x \to 0$
r_2: $x + (-x) \to 0$,
r_3: $(x + y) + z \to x + (y + z)$
r_4: $-0 \to 0$
r_5: $x + (-x + z) \to z$
r_7: $-(-x) \to x + 0$
r_8: $-x + (x + z) \to z$
r_9: $-x + 0 \to -x$
r_{11}: $-(x + y) \to -y + (-x)$.

Sea E con las ecuaciones: $x + 0 = x$, $(-x) + x = 0$, $(x + y) + z = x + (y + z)$, hacer un desarrollo similar a los anteriores.

BIBLIOGRAFIA

G. BIRKHOFF. On the structure of abstract algebras. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1.935

N. DERSHOWITZ. Termination of Rewriting. Academic Press inc. 1987.

N. DERHORWITZ. Computing with rewrite systems. Information and Control. 1985.

G. HUET. A complete proof of correctness of the Knuth-Bendix completion algorithm. Journal of Computer and Systems Sciencies. 1981.

Y. METIVIER. About the rewriting systems produced by the Knuth-Bendix completion algorithm. Information Processing Letters. 1983.

G. PETERSON and M. STICKEL. Complete sets of reductions for some equational theories. Journal of The Association for Computing Machinery. 1981.