

# El uso de las situaciones aleatorias en la enseñanza de la probabilidad

*Osorio Gonzales, Augusta*

Pontificia Universidad Católica del Perú

## Resumen

El análisis de cómo los niños y las personas en general comprenden la idea de aleatoriedad es materia de estudio de diversos autores que incluyen a Piaget o Fishbein. Muchos investigadores han revisado estos trabajos y realizado el análisis de diversos procesos de enseñanza para el tema, para llegar a diversas propuestas que pudieran permitir enseñar adecuadamente el concepto de probabilidad. Estas propuestas se pueden ir viendo en los distintos textos desde el nivel primario hasta el nivel universitario, pero también se puede observar como casi siempre se deja un poco de lado lo que es el estudio de las situaciones aleatorias y su relación con el concepto de probabilidad.

Queremos presentarles un proceso de instrucción para la enseñanza de la probabilidad a nivel universitario, que ha sido utilizado por más de siete años en alumnos de Letras y Ciencias Humanas de la Pontificia Universidad Católica del Perú y que se basa en el uso de las situaciones aleatorias como elemento básico en el desarrollo del tema de probabilidades. Este proceso ha sido analizado y su idoneidad validada en la tesis de maestría de la autora para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas.

**Palabras clave:** probabilidad, situaciones aleatorias, incertidumbre

## 1. Introducción

Dentro de los objetos de estudio que analizan los grupos que investigan sobre la didáctica de las Matemáticas, se puede resaltar la noción o idea de aleatoriedad. Este tema ha sido motivo de estudio de muchos investigadores a lo largo del tiempo, como bien lo menciona Batanero (2001) en su libro sobre Didáctica Estadística.

Hay que reconocer que la idea de aleatoriedad o el pensamiento aleatorio ya ha sido incorporada en la enseñanza de las matemáticas desde la escuela primaria, hecho que se verifica al revisar los diseños curriculares de enseñanza de cualquier país. En particular, podemos fijarnos en el diseño curricular del Perú, donde los conceptos relacionados con la idea de aleatoriedad se van presentando desde el segundo grado de primaria.

Pero también es bien conocido, y así lo han expuesto algunos investigadores como Jiménez y Jiménez (2005), que a pesar de lo desarrollado en los diseños curriculares, en muchos casos algunos temas quedan circunscritos a la planificación y no llegan a ser ejecutados dentro de las clases. Esto sucede con la mayoría de los temas de Estadística y Probabilidad, dado que en casi todos los grados estos temas van al final del año y muchas veces son sacrificados por la conclusión de otros componentes del área.

Es así que nos enfrentamos a un problema real: si un joven no ha sido expuesto al desarrollo del pensamiento aleatorio durante su preparación escolar, es previsible que se presenten problemas al continuar estudios superiores cuando en su primer curso formal de estadística deba enfrentarse a una forma de pensar que no ha desarrollado previamente. Cómo debe enfrentar un docente este problema, cómo se puede desarrollar en una persona

una forma de concebir la realidad que no ha sido elaborada previamente durante un proceso continuo y progresivo, y que además le permita al alumno poder desarrollar y comprender esta idea a plenitud; estos son algunos de los desafíos que debe enfrentar cualquier profesor de un curso de estadística básica dentro de casi todas las profesiones actuales.

En particular, conocíamos sobre esta problemática de primera mano al ser una docente que impartió un primer curso de Estadística a nivel universitario durante ocho años. Por ello vimos la necesidad de que los alumnos experimenten una visión diferente de la realidad, pudiendo tener la capacidad de separar en ella las situaciones deterministas de las situaciones aleatorias basándose en la idea de incertidumbre. El proceso de instrucción creado para introducir el concepto de probabilidad buscaba lograr que estas situaciones de incertidumbre sean descompuestas en sus elementos básicos con el fin de poder tener una comprensión exacta de ellas y finalmente exponer al alumno al entendimiento de la pertinencia del uso de las probabilidades como medio para poder concluir el conocimiento completo de la situación aleatoria estudiada.

Es bajo la referencia de lo expuesto que, al crear el proceso de instrucción para poder abordar el tema de probabilidades, se tomó en consideración introducir previamente los conceptos básicos relacionados a las situaciones aleatorias y buscar que los alumnos puedan reconocer y definir situaciones de la realidad bajo esta óptica.

Partimos del hecho de que una vez que el alumno conoce las situaciones aleatorias es cuándo el concepto de probabilidad toma sentido y va a procurarles información relevante. Así mismo, consideramos que es importante que las situaciones aleatorias a trabajar sean de interés para el alumno, por tanto, lo mejor es utilizar en un inicio situaciones de su entorno inmediato y procurar que sean ellos mismos en un determinado momento los que puedan llegar a plantearlas. Y finalmente, consideramos que es importante que el alumno pueda aprender a reconocer los diferentes tipos de situaciones aleatorias que procurarán la existencia de los diversos planteamientos sobre el cálculo de probabilidades.

Durante el diseño del proceso de instrucción se procedió a la revisión de bibliografía que permitiera tener un referente para las actividades. Durante este proceso se observó que la mayoría de libros de estadística de nivel universitario utilizados en nuestro medio se caracterizan por la presentación directa del concepto de probabilidad y con referencia a la idea de experimento aleatorio, simplemente listan las definiciones necesarias. Algunos de los libros revisados fueron Veliz (2000), Córdova (2006), Meyer (1986), Johnson, Kuby (2004). En el caso de proveer ejemplos, la mayoría de ellos son sobre los típicos ejemplos de dados o el escoger una bola de color desde una bolsa repleta de bolas de colores distintos. Nuestra preocupación se centró en que no se encontró una relación entre los diferentes tipos de situaciones aleatorias y los tipos de planteamientos para el establecimiento de probabilidades. Tampoco se encontraron ideas que reforzaran la necesidad del uso de las probabilidades.

Partiendo de la información encontrada y estableciendo los puntos que se deseaban resaltar en la introducción del concepto de probabilidad, se construyó una serie de actividades que favorecieran el entendimiento de lo que es una situación aleatoria, cómo se define y de qué partes se compone.

El proceso de instrucción mencionado se aplicó durante más de diez semestres dentro del curso que tuvimos a cargo y fue sufriendo las modificaciones necesarias propias de la reflexión docente. Paralelamente fue necesario ir mejorando la visión teórica del proceso de introducción del concepto de probabilidad y se fue construyendo una visión de la realidad que permitió colocar en ella todos los elementos que se desarrollaron. De esta manera se pudo establecer cómo se calcula la probabilidad de un suceso en particular.

Luego de este trabajo de varios años vimos la necesidad de adoptar la postura de investigadora, buscando analizar y valorar la idoneidad que presentaba el proceso de instrucción diseñado. El fin era poder tomar las medidas adecuadas para su mejora final. La valoración que nos interesaba tomó en cuenta aspectos relacionados con la naturaleza del objeto estadístico en estudio, las actividades desarrolladas e implementadas, las acciones que realizan los estudiantes ante estas actividades y otras dimensiones que permitieron entender los resultados de la puesta en escena. Es desarrollo total de esta investigación puede verse en Osorio (2012).

## **2. Descripción del proceso de instrucción**

Las características del proceso de instrucción se establecieron en base a una propuesta de solución que se procuró frente a cada una de las problemáticas detectadas en la enseñanza del concepto de probabilidad. Las problemáticas trabajadas son las presentadas en Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2006) donde se hace una exposición de la vasta problemática que hay para la enseñanza del concepto de probabilidades.

Las situaciones problema diseñadas para las diferentes actividades del proceso de instrucción tienen como eje central a la situación aleatoria y sus componentes. Específicamente, se busca que los alumnos puedan reconocer cuándo una situación propuesta es aleatoria y puedan determinar todos los componentes inherentes a ella. El conseguir este objetivo se evidenciará mediante el alcance de los siguientes objetivos parciales. Se espera que los alumnos:

1. Puedan mencionar algunos posibles resultados de una determinada situación, cuando tienen en consideración determinadas restricciones fijadas de antemano dentro del contexto de la situación que se está analizando.
2. Puedan diferenciar entre una situación de la vida cotidiana que incluye la característica de incertidumbre de una que no la tiene.
3. Puedan dar una posible situación aleatoria cuando se les da un determinado contexto de la realidad.
4. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar un suceso simple por extensión y por comprensión.
5. Puedan definir el espacio muestral de la situación aleatoria presentada.
6. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar un suceso compuesto por extensión y por comprensión.
7. Puedan determinar un suceso o evento compuesto por extensión, cuando les es presentada una determinada situación aleatoria y un suceso o evento compuesto por comprensión perteneciente a dicha situación aleatoria.
8. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar de un grupo de sucesos compuestos propuestos, cuál es el suceso compuesto que es componente de la situación aleatoria presentada.
9. Puedan definir apropiadamente un experimento aleatorio de su entorno. Brindado el contexto con sus condiciones o restricciones a tener en cuenta, el espacio muestral y un grupo de sucesos simples compuestos, ambos grupos por extensión y por comprensión.

El tiempo disponible para la aplicación de todo el proceso de instrucción comprende seis semanas de programación de un curso de tres horas teóricas y dos prácticas a la semana. En este lapso de tiempo se utilizarán las dos primeras horas de clase de la primera semana,

la sesión de práctica de la segunda semana y se aplicará una evaluación individual en la semana seis. Además, los alumnos utilizarán tiempo fuera de clases, se espera que utilicen dos horas de práctica entre la semana uno y dos mediante la aplicación de una evaluación en línea y un promedio de doce horas de trabajo (dos horas semanales) para el desarrollo y revisión del trabajo individual que se presenta en la semana seis.

El proceso de instrucción analizado consta de ocho actividades:

1. Actividad colaborativa para la introducción del concepto de situación aleatoria.
2. Actividad colaborativa para aplicar el concepto de situación aleatoria a un contexto dado.
3. Actividad colaborativa para describir los componentes de una situación aleatoria.
4. Práctica en línea para repasar los conceptos vistos.
5. Prueba individual de conocimientos adquiridos, conceptos teóricos.
6. Práctica en parejas para poder aplicar el concepto de situación aleatoria y de sus componentes.
7. Desarrollo de trabajo individual de análisis de una situación aleatoria propuesta por el alumno.
8. Evaluación de los conceptos de situación aleatoria y de sus componentes, teórica y de aplicación.

Las actividades 1, 2, 3, 5 y 6 que se desarrollan dentro de las sesiones de clase y práctica del curso, tienen un diseño específico de tiempo para ser desarrolladas. En el caso de las tres primeras actividades, que van en la sesión de clases de la primera semana, estas se desarrollan en un lapso de 110 minutos. Se espera que la primera actividad se realice en 40 minutos, la segunda en 20 minutos y la última en 50 minutos. En el caso de las actividades 5 y 6, que se realizan en la sesión de prácticas de la segunda semana, se espera que la parte individual se realice en 15 minutos y la de parejas en 60 minutos.

### **3. Valoración de la idoneidad del proceso de instrucción**

El análisis de idoneidad emprendido tuvo como finalidad establecer si el proceso de instrucción diseñado para la introducción de la probabilidad presentaba los aspectos necesarios para que el alumno integre los significados relacionados al objeto en estudio, la situación aleatoria, a sus significados personales. La valoración de idoneidad se trabajó bajo las concepciones del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) y se consideró solo dos facetas: la epistémica y la cognitiva.

Los descriptores o indicadores empíricos que ayudaron a la puesta en funcionamiento de la idoneidad didáctica como herramienta de análisis y valoración del proceso en estudio estuvieron basados en los propuestos por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006). Desde los descriptores de idoneidad propuestos se determinó una serie de desviaciones que muestran los componentes del proceso de instrucción al tener como ideal la configuración epistémica de referencia considerada. Desde los resultados obtenidos nuestras interrogantes finales son ¿el proceso de instrucción cumple su objetivo? ¿Vale la pena invertir recursos en su mejora?

Con respecto al cumplimiento de los objetivos del proceso de instrucción hemos establecido que este proceso les permitió a los dos alumnos analizados, a pesar de iniciar el proceso sin ningún conocimiento previo sobre el tema, llegar a identificar, proponer y analizar adecuadamente una situación aleatoria. Esto nos da pie para indicar que el proceso cumple con su finalidad y por lo tanto, pensar que una mejora del proceso de instrucción es factible y válida.

Un punto importante que debemos tener en cuenta con respecto a la presencia de las desviaciones encontradas, es el marco epistémico que se tuvo en cuenta para la construcción del proceso de instrucción. El marco epistémico es más bien original, ya que no encontramos un trabajo donde se utilicen todas las tipologías de las situaciones aleatorias para poder relacionarlas con los planteamientos de cálculo de las probabilidades. Toda referencia encontrada en la bibliografía sobre el tema solo hacía alusión a los experimentos aleatorios y a la presentación de sus componentes sin detenerse mucho en el trabajo de análisis de los componentes de estos experimentos. Tenemos entonces que el marco epistémico trabajado lo hemos establecido sobre la base de la búsqueda de la teoría necesaria que reforzara la necesidad del uso de las probabilidades y fue mediante la experiencia con el proceso de instrucción que ajustamos los significados involucrados y sus relación entre ellos.

Podemos también indicar que muchas de las desviaciones encontradas son consecuencia de la falta de presentación de los procedimientos y argumentos asociados a los significados pretendidos en el proceso de instrucción. Esta es la desviación más importante encontrada en el análisis, que fue más consecuencia de nuestro desconocimiento en materia de didáctica que en un desconocimiento del tema. ¿Cómo afecto esta falta de información a los alumnos? Por ejemplo, cuando un alumno tiene que decidir cuáles de las situaciones presentadas corresponden a un experimento aleatorio. En ese momento, el alumno tiene que concluir cuáles son los pasos del procedimiento que le llevan a establecer si la situación es o no un experimento aleatorio. Hemos observado durante el análisis de respuestas, que uno de los alumnos solo busca la característica de reproducibilidad dejando de lado el análisis de la incertidumbre. Esta deficiencia se puede subsanar si es que el alumno tiene a su disposición el procedimiento para establecer experimentos aleatorios.

Debemos reconocer que a pesar de las desviaciones, los alumnos pueden enfrentar los problemas propuestos, aunque en algunos casos requieren más tiempo para poder manejar los significados. Tenemos que uno de los alumnos analizados pudo manejar los significados casi desde un inicio del proceso de instrucción, mientras que el otro lo hizo recién al final del proceso.

También debemos comentar sobre el planteamiento que utilizamos para el análisis de idoneidad. Debemos resaltar la ventaja que ha proporcionado a nuestro análisis el hecho de poder contar con los descriptores por competencia y faceta. Su establecimiento ha permitido ordenar nuestro trabajo durante el análisis y centrarlo convenientemente en la búsqueda de las características esenciales que el proceso de instrucción debe poseer. En un análisis tan extenso es necesario tener una metodología muy estricta que permita sistematizar la revisión y el establecimiento de resultados, todo ese trabajo es mucho más fácil cuando el trabajo está organizado por medio de puntos específicos que hacen que la mirada se centre en un tema determinado.

Finalmente, no pensamos que este análisis es suficiente para poder terminar de elaborar un proceso de instrucción que nos lleve a lograr un cambio total en el pensamiento de los alumnos y los dirija a una nueva forma de ver la realidad. Este es solo un primer paso, que ayuda pero que por sí solo no hará todo el trabajo. Con este proceso hemos logrado que los alumnos se introduzcan a un entendimiento sobre de donde surgen la probabilidades, pero aún nos faltan hacer que trabajen con ellas y que además lleguen a construir los famosos modelos probabilísticos. Esto hace que tengamos que pensar en la elaboración de problemas que les permitan manejar la parte conceptual de los planteamientos de cálculo y procedimientos que los lleven a entender de donde surgen las variables aleatorias, tema fundamental para el trabajo en Inferencia estadística, y que está íntimamente ligado con el tema de experimentos aleatorios y modelos probabilísticos. Algunas de estas problemáticas ya las hemos ido trabajando y tenemos algunas ideas de cómo enfrentarlas, pero ahora viene el trabajo difícil, la elaboración de nuevos procesos de instrucción. Esta son algunas de las

ideas que tenemos y que trabajaremos en el futuro. Nuestro propósito es llegar a establecer un mecanismo de enseñanza con el que un alumno pueda entender porque es necesario llegar a establecer modelos probabilísticos y como es que estos se determinan.

## Referencias

- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada. Granada, España.
- Córdova, M. (2006). *Estadística aplicada*. Lima: Moshera.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII(2), 221-252.
- Johnson, R. y Kubly, P. (2004). *Estadística elemental. Lo esencial*. México: International Thomson Editores.
- Jimenez, L. y Jimenez, J. (2005). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué?. *Cidse-Revista virtual matemática- Educación e Internet*, 6(1).
- Osorio, A. (2012). *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior*. Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas. PUCP.
- Meyer, P. (1986). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Wilmington: Addison -Wesley Iberoamericana.
- Serradó,A., Cardeñoso, J. y Azcarate,P (2006). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Tarbiya*, 38.
- Véliz, C.(2000). *Estadística: aplicaciones*. Lima: Copias Gráficas