

# MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN PARA EL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON INVENTARIOS Y VENTANAS DE TIEMPO DURAS

## OPTIMIZATION METHODS FOR THE INVENTORY ROUTING PROBLEM WITH HARD TIME WINDOWS

Eliseo Pérez Kaligari , William Javier Guerrero Rueda<sup>1,\*</sup>

### RESUMEN

El problema estudiado considera las decisiones de ruteo de vehículos con inventarios y restricciones de ventanas de tiempo duras (IRPTW) en una cadena de abastecimiento compuesta por un depósito y múltiples minoristas. Se asume un horizonte de planeación discreto y finito en donde las decisiones por optimizar son: las cantidades a aprovisionar a los minoristas y, simultáneamente, la secuencia de minoristas a visitar en cada periodo de tiempo. El sistema cuenta con un sólo vehículo de capacidad limitada, restricciones de capacidad de almacenamiento de los minoristas, y tasa de producción limitada del depósito. Se requiere satisfacer la demanda que tienen los minoristas. Se asume que los minoristas tienen demanda determinística y no homogénea. Se propone una formulación matemática basada en programación entera mixta y se estudia el impacto que tiene la configuración de las ventanas de tiempo sobre las decisiones de ruteo de vehículos con inventarios, a través de dos métodos de optimización. El primer método optimiza las decisiones de forma simultánea, mientras que el segundo método propuesto considera las decisiones de forma secuencial, lo que lo convierte en un método heurístico. Se presenta un estudio computacional con 80 instancias adaptadas de la literatura. Los resultados muestran que el método de optimización simultáneo tiene un desempeño mejor que el método heurístico de optimización secuencial generando ahorros potenciales en los costos logísticos de al menos 6%.

**Palabras Claves:** Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW), Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios y Ventanas de Tiempo (IRPTW), Cadena de Suministros, Gestión de Inventarios del Proveedor (VMI), Problema de Ruteo de Vehículos con Inventarios (IRP).

### ABSTRACT

The studied problem considers the inventory routing problem with time windows (IRPTW) in a supply chain that consists of a single warehouse and multiple retailers. The considered planning horizon is discrete and finite, and the decisions to optimize are: the quantities to supply to retailers, and simultaneously the sequence of retailers to visit in each time period. The system has a single vehicle with limited capacity, storage capacity constraints at retailers and a limited production rate at the depot is considered. It is required to meet the retailer's demand. It is assumed that retailers have deterministic demand and not homogeneous. It is proposed a mathematical formulation based on mixed integer programming, and it is studied the impact of the time windows configuration on inventory routing decisions through two optimization methods. The first method optimizes decisions simultaneously, while the second proposed method considers sequential decisions, making it a heuristic method. A

<sup>1</sup>CIMSER, Decanatura de Ingeniería Industrial, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito Bogotá, Colombia.

\*Autor para correspondencia: [william.guerrero@escuelaing.edu.co](mailto:william.guerrero@escuelaing.edu.co)

computational study with 80 instances adapted from the literature is presented. The results show that the method of simultaneous optimization has outperformed the heuristic optimization method generating potential savings in logistics costs of at least 6%.

**Keywords:** Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW), Inventory Routing Problem with Time Windows (IRPTW), Supply Chain, Vendor-Managed Inventory (VMI), Inventory Routing Problem (IRP).

## INTRODUCCIÓN

Dos grandes grupos de costos encierran gran parte del costo logístico total de las operaciones de la cadena de suministros: costos asociados a la administración de los inventarios y costos asociados a la logística de distribución o recolección de productos (Dondo *et al.* 2011). El enfoque tradicional de optimización de las decisiones asociadas es secuencial. Primero se optimizan las políticas de inventario y luego se optimiza la distribución. Este artículo propone estudiar de forma integrada ambos problemas de optimización y demuestra los beneficios económicos en la cadena de abastecimiento, resultado de tomar mejores decisiones tácticas y operativas.

El sistema de inventario gestionado por el proveedor (Vendor Managed Inventory - VMI) es uno de los ejemplos más representativos que existe hasta la fecha de valor agregado a través de la logística. Esta práctica consiste en controlar el abastecimiento de los clientes por parte del proveedor tomando decisiones de reposición con base en las políticas de inventario. El VMI es a menudo descrito como una situación gana – gana: los proveedores ahorrarán en los costos de distribución ya que pueden coordinar los envíos para diferentes clientes, generando ahorros en los compradores al no tener que asignar recursos para gestión del inventario. Por tal motivo, el proveedor tiene que tomar tres decisiones simultáneas: (1) cuándo abastecer a un cliente, (2) la cantidad a entregar y (3) la secuencia de clientes para asignar las rutas. (Coelho *et al.* 2012b).

Adicionalmente, el ruteo de vehículos es un problema que se encuentra presente en la logística de distribución de bienes y representa un porcentaje de participación importante en los costos totales puesto que afectan el diseño de los sistemas de distribución, al tener que garantizar los tiempos de entrega al cliente de acuerdo con la flota de vehículos disponible (Baños *et al.* 2013).

El problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW por sus siglas en inglés) es un problema de distribución que se enfoca en minimizar costos de transporte a través del diseño de rutas que permitan abastecer un conjunto de clientes geográficamente dispersos desde un depósito central. Las rutas deben estar diseñadas de tal forma que cada cliente es visitado sólo una vez en un intervalo de tiempo determinado; todas las rutas comienzan y terminan en el depósito y las demandas totales de todos los puntos de una ruta no deben exceder la capacidad del vehículo. Bräysy and Gendreau, (2005) consideran múltiples objetivos que consisten en minimizar no sólo el número de vehículos necesarios, sino también el tiempo total de viaje o distancia de recorrido total realizado por la flota de vehículos. Además, existen en la literatura dos tipos de ventanas de tiempos que se pueden utilizar: las ventanas de tiempo “blandas”, que permiten la presencia de tiempos de espera y entregas tardías en las instalaciones del cliente, incurriendo en una penalidad en la función objetivo. Estos problemas han sido estudiados por Calvete *et al.* (2007) y Qureshi *et al.* (2012). El otro tipo de ventana de tiempo son denotados como “duras”, puesto que no permiten tiempos de espera ni llegadas tardías (Baños *et al.* 2013, Chang *et al.* 2009). Sin embargo, es natural notar que los costos de transporte dependen de las decisiones de inventarios y de las frecuencias de visita a los clientes. En este sentido, al incrementar los niveles de inventario de los clientes, reduciendo la frecuencia de entrega, los costos de distribución tienden a ser modificados (Bertazzi *et al.* 2013). Por lo tanto, se han propuesto varios modelos de optimización para

la integración de estas decisiones logísticas. El objetivo es determinar las políticas de envío para minimizar la suma de los costes de transporte y gestión de inventario. Una revisión de la literatura es presentada por Andersson *et al.* (2010) haciendo énfasis en los aspectos industriales, y se concluye la importancia de la optimización del Problema de Ruteo Vehículos con Inventarios (IRP por sus siglas en inglés) en la industria, principalmente en la industria del transporte marítimo.

El IRP modela el reabastecimiento de un conjunto de minoristas en un corto o mediano plazo desde una planta de producción, conocida como proveedor. El proveedor decide las cantidades a entregar y las rutas para hacer estas entregas. Estas situaciones se observan, por ejemplo, en la industria de los supermercados cuando un decisor centralizado toma las decisiones de inventario en el horizonte de planificación para una red de minoristas. Esto ocurre cuando la capacidad de los vehículos es limitada y comparable con respecto al volumen total requerido de los minoristas (Bertazzi *et al.* 2013).

Archetti *et al.* (2012) propone una heurística para solucionar un IRP contemplando un vehículo, un producto, capacidad limitada de almacenamiento y transporte. Además, utilizan dos diferentes políticas de inventarios: "Order-Up-To (OU)" y "Maximum-Level (ML)". La política OU establece que la capacidad de inventario de un cliente se llena completamente cada vez que el cliente recibe la visita de un vehículo. La política ML permite decidir las cantidades a entregar al momento de realizar la visita a cada cliente sin estar obligado a utilizar la capacidad máxima de inventario en los clientes. Los autores Archetti *et al.* (2012) aplican operadores de búsqueda de tabú y optimizadores comerciales para resolver una serie de sub-problemas usando métodos basados en programación entera mixta con un enfoque Ad Hoc. Coelho *et al.* (2012b) resuelven un IRP con trasbordos (Inventory-Routing Problem with Trans shipment - IRPT), en donde puede haber transferencia de producto entre dos minoristas. Se soluciona el modelo aplicando un Adaptive Large Neighborhood Search (ALNS) para 4 tipos de escenarios: (1) Order-Up-To Level (IRP – OU), (2) Maximum-Level (IRP – ML), (3) IRP with Trans shipment - Order-Up-To Level (IRPT – OU) y (4) IRP with Trans shipment - Maximum-Level (IRPT – ML). Adicionalmente, Coelho & Laporte (2013) proponen un algoritmo de Branch-and-Cut para la solución exacta de varias clases de IRP.

Gronhaug *et al.* (2010) considera un problema de ruteo de vehículos con inventario marítimo (o IRP marítimo) en el negocio de gas natural licuado (LNG). En este problema, se busca determinar las rutas de buques y las políticas de inventarios en las plantas de licuefacción y las terminales de regasificación, asumiendo una tasa constante de la carga evaporada por día y variabilidad en la producción y en el consumo de gas. Los autores proponen resolver el problema usando el método de Branch-and-Price.

Por otra parte, Bard and Nananukul (2009) desarrollan un nuevo modelo para dar solución al problema de integrado de producción y distribución (Production Inventory Distribution Routing Problem). Realizan un análisis comparativo de una serie de heurísticas en donde se maximizan los beneficios netos asociados a las entregas en un período de tiempo específico para un conjunto de clientes dispersos geográficamente.

Por otro lado, Guerrero *et al.* (2015) investiga un IRP que contempla las decisiones de localización de los depósitos; este modelo fue llamado Inventory-Location-Routing Problem (ILRP) el cual considera un sistema multi-minorista, multi-depósito. El método propuesto permite determinar la localización de depósitos, las cantidades a transportar en la cadena de abastecimiento y la secuencia de visita a los minoristas. Además, proponen un método de heurístico para instancias de gran tamaño.

Finalmente, Liu y Lee (2011), proponen un método de solución heurístico de dos fases para solucionar el IRP contemplando ventanas de tiempo (IRPTW). En la primera fase encuentran una mejor solución inicial basada en el enfoque constructivista. La segunda fase consiste en aplicar una heurística Tabu Search con vecindad variable (VNVS). Liu y Lee (2011) difiere de la propuesta de Archetti *et al.* (2007) porque considera un problema de ruteo con un sólo

periodo, mientras que Archetti *et al.* (2007) considera múltiples periodos para las decisiones de ruteo. Considerar múltiples periodos es más realista, puesto que asumir que en un sólo periodo se visitarán a todos los minoristas no es posible en algunos casos industriales.

De la revisión de la literatura se concluye que el IRPTW es de interés académico e industrial, puesto que existe una brecha a nivel teórico y académico. Adicionalmente, las ventanas de tiempo han sido involucradas a los problemas de ruteo de vehículos, pero estos modelos ignoran las decisiones de inventarios en la cadena de suministros (Coelho *et al.* 2012a). Este artículo busca proponer un modelo de ruteo de vehículos con inventarios y ventanas de tiempo duras con el fin de evaluar la pertinencia de combinar estas decisiones sujeto a restricciones tiempos de servicio.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Problema y formulación matemática

Se introduce el IRPTW modificando el modelo de IRP presentado por Archetti *et al.* (2007). Se considera una red de distribución de un producto que se envía desde un depósito central "0" a un conjunto  $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, n\}$  de clientes (minoristas) en un horizonte de tiempo  $H$ . En cada periodo discreto  $t \in \mathcal{T} = \{1, 2, \dots, H\}$  el proveedor fabrica una cantidad de producto  $r_{0t}$  y el cliente  $s \in \mathcal{M}$  consume  $r_{st}$  unidades. Además, se define  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{H + 1\}$  para permitir tener en cuenta las decisiones del último periodo que afectan el costo de un periodo  $H + 1$  dentro del análisis. El consumo del cliente  $s \in \mathcal{M}$  en el periodo  $t = 0$  ( $r_{s0}$ ) toma el valor de "0" para todo cliente  $s \in \mathcal{M}$  y para el depósito ( $r_{00} = 0$ ). El nivel de inventario del proveedor en el periodo  $t$  es una variable de decisión auxiliar y se denota como  $B_t$ . Adicionalmente  $B_0$ , representa el inventario inicial del depósito, siendo este un parámetro conocido. Cada minorista  $s$  fija su nivel máximo de inventario  $U_s$  y establece un nivel de inventario inicial  $I_{s0}$ . Si el minorista  $s \in \mathcal{M}$  es visitado en el tiempo  $t \in \mathcal{T}$ , entonces  $x_{st}$  denota la cantidad que se entrega al minorista de tal forma que no puede sobrepasar su valor máximo. Es decir, se aplica políticas de inventario "Maximum Level" (ML) descritas por Archetti *et al.* (2007). Denotamos  $I_{st}$  como el nivel de inventario del minorista  $s$  en el periodo  $t$ , entonces  $x_{st}$  debe ser menor o igual a  $U_s - I_{st}$  si un envío a  $s \in \mathcal{M}$  se lleva a cabo en  $t \in \mathcal{T}'$ , o igual a cero en caso contrario.

Sea  $h_0$  el costo unitario de mantener inventario por el proveedor por unidad de tiempo. Se expresa  $h_s$  como el costo de mantener inventario en los minoristas  $s \in \mathcal{M}$ . El nivel de inventario al final del horizonte de planeación puede ser diferente al nivel de inventario inicial. Las entregas desde el proveedor hacia los minoristas en cada periodo  $t \in \mathcal{T}$  serán realizadas por un vehículo de capacidad limitada  $C$  capaz de abastecer a varios clientes en una ruta. Además, se establece  $c_{ij}$  como el costo de ir del nodo  $i$  al nodo  $j$  y  $y_{ijt}$  como una variable de decisión binaria igual a 1 si y sólo si el vehículo va sobre el arco  $(i, j)$  en el periodo  $t$  ó 0 de lo contrario. Se definen la variable de decisión  $v_{it}$  como la hora de llegada al nodo  $i \in \mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{0\}$  en el periodo  $t \in \mathcal{T}$  y el parámetro  $d_{ij}$  como el tiempo de viaje de ir desde el nodo  $i$  al nodo  $j$ ,  $\forall i, j \in \mathcal{M}'$ . El parámetro  $e_{jt}$  indica el inicio de la ventana del minorista  $i \in \mathcal{M}'$  en el periodo  $t \in \mathcal{T}$  y el parámetro  $l_{jt}$  como el fin de la venta del minorista  $j \in \mathcal{M}'$  en el periodo  $t \in \mathcal{T}$ . La variable auxiliar binaria  $z_{it}$  toma el valor de 1 si el nodo  $j \in \mathcal{M}'$  es visitado en el periodo  $t \in \mathcal{T}$ , 0 de lo contrario. Fijamos el valor de  $x_{s0} = 0$  y  $v_{s0} = 0$  para todo nodo  $s$  en el conjunto  $\mathcal{M}'$ . Usando esta notación, el IRPTW se puede expresar de la siguiente manera:

$$\text{Min } Z = \sum_{t \in \mathcal{T}'} h_0 \cdot B_t + \sum_{s \in \mathcal{M}} \sum_{t \in \mathcal{T}'} h_s \cdot I_{st} + \sum_{i \in \mathcal{M}'} \sum_{j \in \mathcal{M}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} C_{ij} \cdot y_{ijt} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$B_t = B_{t-1} + r_{0t-1} - \sum_{s \in \mathcal{M}} x_{st-1} \quad \forall t \in \mathcal{T}' \quad (2)$$

$$B_t \geq \sum_{s \in \mathcal{M}} x_{st} \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3)$$

$$I_{st} = I_{st-1} + x_{st-1} - r_{st-1} \quad \forall s \in \mathcal{M}; \forall t \in \mathcal{T}' \quad (4)$$

$$I_{st} \geq 0 \quad \forall s \in \mathcal{M}; \forall t \in \mathcal{T}' \quad (5)$$

$$x_{st} \leq U_s - I_{st} \quad \forall s \in \mathcal{M}; \forall t \in \mathcal{T} \quad (6)$$

$$x_{st} \leq U_s z_{st} \quad \forall s \in \mathcal{M}; \forall t \in \mathcal{T} \quad (7)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{M}} x_{st} \leq C z_{0t} \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (8)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{M}, i \neq j} y_{ijt} = \sum_{i \in \mathcal{M}, i \neq j} y_{jit} \quad \forall j \in \mathcal{M}'; \forall t \in \mathcal{T} \quad (9)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{M}', i \neq j} y_{ijt} = z_{jt} \quad \forall j \in \mathcal{M}; \forall t \in \mathcal{T} \quad (10)$$

$$v_{jt} \geq e_{jt} \cdot z_{jt} \quad \forall j \in \mathcal{M}; \forall t \in \mathcal{T} \quad (11)$$

$$v_{it} \geq v_{jt} + d_{ji} - [(1 - y_{jit}) \cdot (l_{jt} + d_{ji})] \quad \forall i \in \mathcal{M}'; \forall j \in \mathcal{M} | i \neq j; \forall t \in \mathcal{T} \quad (12)$$

$$v_{jt} \leq l_{jt} \cdot z_{jt} \quad \forall j \in \mathcal{M} \text{ y } t \in \mathcal{T} \quad (13)$$

$$x_{st} \geq 0 \quad \forall s \in \mathcal{M} \text{ y } t \in \mathcal{T} \quad (14)$$

$$v_{it} \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{M}' \text{ y } t \in \mathcal{T} \quad (15)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \mathcal{M}'; j \in \mathcal{M}' \text{ y } t \in \mathcal{T} \quad (16)$$

$$z_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j \in \mathcal{M}' \text{ y } t \in \mathcal{T} \quad (17)$$

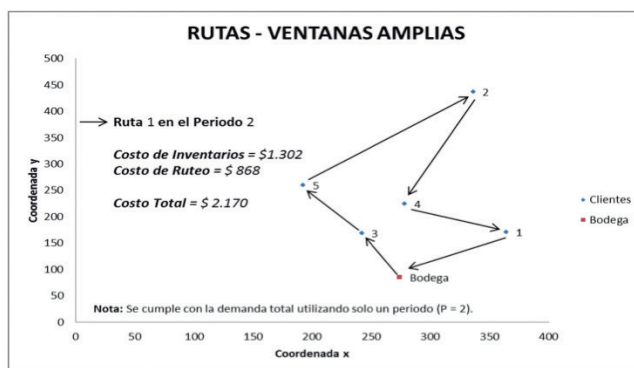
El modelo de IRP presentado por Archetti *et al.* (2007) comprende las ecuaciones de la (1) a la (10) y el modelo propuesto para solucionar el IRPTW contempla adicionalmente las restricciones de la (11) a la (12). El objetivo del modelo es minimizar la suma de los costos de gestión de inventarios en el depósito, en los minoristas y el de distribución, como se describe en la ecuación (1).

Las restricciones (2) y (3) controlan los niveles de inventarios y evitan el desabastecimiento en los proveedores. Las restricciones (4) y (5) controlan los niveles de inventarios y evitan los desabastecimientos de los minoristas. Las políticas de inventarios están definidas por las

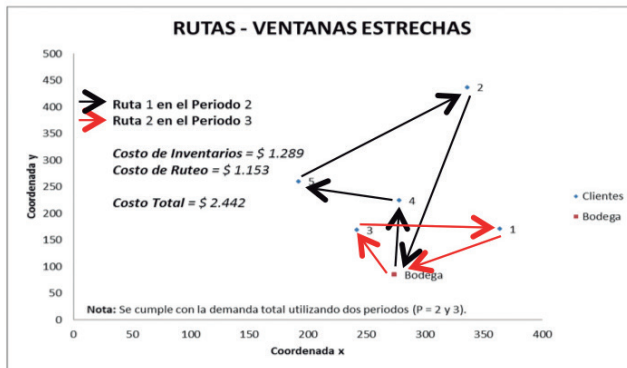
restricciones (6) y (7), en donde se garantiza la coordinación entre las cantidades a entregar y el inventario máximo si el nodo es visitado o no, y el cumplimiento de la capacidad máxima, tanto de los minoristas como el del depósito. La restricción (8) contempla la capacidad del vehículo utilizado. Las restricciones (9) y (10) establecen la conservación de flujo de vehículos y determinan que si el cliente es visitado en el periodo entonces tiene que entrar y salir un arco del nodo. Las restricciones (11), (12) y (13) garantizan el cumplimiento de las ventanas de tiempo establecidas para cada minorista. Las ventanas de tiempo son dinámicas y duras (hard), es decir, no se permite el incumplimiento a los horarios de atención establecidos por los minorista y estos horarios pueden ser diferentes entre los periodos dentro del horizonte de planeación. Se considera que sólo hay una ventana por minorista por periodo. Además, se considera despreciable el tiempo de descargue y de cargue. Finalmente, las restricciones (14) a (17) indican la naturaleza de las variables de decisión.

Con el ánimo de estudiar el impacto que tienen las diferentes configuraciones de ventanas de tiempo para las decisiones de ruteo, inventarios y sus costos, se realizan tres experimentos con el objetivo de validar dicho supuesto usando un ejemplo numérico. Se selecciona una instancia de 3 periodos y 5 clientes disponible en Coelho (2007). Posteriormente, se modifica la instancia adicionando ventanas de tiempo duras de manera aleatoria usando una distribución uniforme. En total se construyen tres clases de instancias con variaciones en la amplitud de los rangos de las ventanas de tiempo. Las características que diferencian las tres clases de instancias son las siguientes: 1. *Ventanas amplias*, donde el rango de la ventana varía entre 0 y 2000 min; 2. *Ventanas estrechas*, donde el rango varía entre 190 y 1700 min; 3. *Ventanas variadas*, donde el rango varía entre 0 y 1859 min. Para la construcción de las instancias nos inspiramos en el sector portuario donde las ventanas de tiempo equivalen a la disponibilidad de muelles para anclar embarcaciones y las reservaciones pueden durar más de un día y un periodo de planeación equivale a una semana con días de 16 horas. Las 3 instancias se resolvieron a través de un enfoque exacto. Los rangos generados para las ventanas de tiempo en cada instancia descrita anteriormente, son seleccionados debido a que permiten mostrar adecuadamente un impacto sobre los costos totales, sin quitarle factibilidad a la solución.

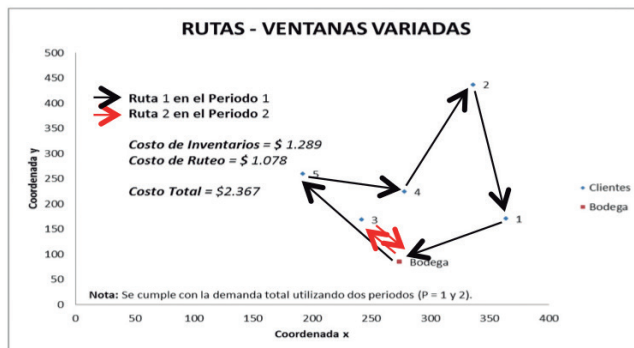
En la tabla 1 se muestran los datos de los parámetros usados en la instancia del ejemplo de manera detallada con las diferentes configuraciones de ventanas de tiempo, costos de almacenamiento, coordenadas de los nodos y capacidades. En las figuras 1, 2 y 3 se ilustran las rutas de entrega óptimas para cada una de las instancias. De la figura 1 se concluye que tener ventanas amplias permite visitar todos los clientes en un sólo periodo con una sola ruta. Los costos de inventarios y ruteo son de 1302 y 868 **dólares** respectivamente; el costo total fue 2170 **dólares**. En la figura 2 se observa el efecto que tiene las ventanas estrechas en los costos, incrementando el costo de ruteo en 32,83%; reduciendo el costo de inventario en 0,99% e incrementando el costo total en 12,53% con respecto a la solución mostrada en la figura 1. Los clientes se visitan en dos rutas en periodos diferentes.



**Figura 1.** Ruteo obtenido para el IRPTW con una instancia de 3 periodos, costos altos de mantenimiento de inventario y ventanas amplias.



**Figura 2.** Ruteo obtenido para el IRPTW con una instancia de 3 periodos, costos altos de mantenimiento de inventario y ventanas estrechas.



**Figura 3.** Ruteo obtenido para el IRPTW con una instancia de 3 períodos, costos altos de mantenimiento de inventario y ventanas variadas.

De la figura 3 se analiza el efecto de combinar los dos tipos de ventanas de tiempo (Amplias y Estrechas) en una misma instancia. El resultado es un incremento en el costo de ruteo del 24,19% y una reducción del costo de inventario de 0,99%; comparado con la solución lograda para el problema de la figura 1. Estas variaciones afectan el costo total en -9,08%. Esto demuestra que las decisiones óptimas de ruteo de vehículos con inventarios se ven afectadas por los diferentes rangos de las ventanas de tiempo.

**Tabla 1.** Detalle de la instancia usada en el ejemplo numérico con 5 clientes, 3 periodos y diferentes configuraciones de ventanas de tiempo (Amplias, Estrechas y Amplias).

Cliente	Coordenada x	Coordenada y	Nivel de inventario inicial $B_i$ e $I_{i,t}$ [Unid]	Nivel máximo de inventario $U_i$ [Unid]	Demanda por periodo $(r_{i,t})$ [Unid]	Costo unitario de mantener inventario $h_0$ [\$]	Capacidad del Vehículo C [Unid]	Cantidad de producto fabricado por el proveedor $(r_{0,t})$ [Unid]	VENTANAS AMPLIAS			VENTANAS ESTRECHAS			VENTANAS VARIADAS									
									Inicio de la ventana para cada Periodo t $(e_{i,t})$ [min]	Fin de la ventana para cada Periodo t $(l_{i,t})$ [min]	Inicio de la ventana para cada Periodo t $(e_{j,t})$ [min]	Fin de la ventana para cada Periodo t $(l_{j,t})$ [min]	Inicio de la ventana para cada Periodo t $(e_{i,t})$ [min]	Fin de la ventana para cada Periodo t $(l_{i,t})$ [min]	Inicio de la ventana para cada Periodo t $(e_{j,t})$ [min]	Fin de la ventana para cada Periodo t $(l_{j,t})$ [min]								
0	274	85	621	2363	N/A	0.30			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
1	364	171	38	67	19	0.33			0	0	1920	1928	1936	316	776	238	1011	1475	896	0	0	965	1852	252
2	338	437	94	141	47	0.41	351	234	0	0	1053	1914	1931	313	798	241	965	1483	874	0	0	851	908	50
3	242	169	144	216	72	0.47			0	0	1915	1905	1991	312	1008	220	922	1693	835	0	0	168	89	282
4	278	224	81	162	81	0.36			0	0	1930	1948	1951	293	799	210	917	1407	827	0	0	960	278	981
5	192	260	30	45	15	0.48			0	0	1913	1928	1992	287	740	193	875	1378	848	0	0	191	172	1859



## MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Siendo el IRPTW una generalización del VRPTW al incluir las decisiones de gestión de inventarios, Qin *et al.* (2014) y Coelho *et al.* (2012a) muestran que el IRPTW es un problema NP-Completo. Por lo tanto, proponemos a continuación dos métodos de solución para el IRPTW en instancias de tamaño razonable y posteriormente se presentan las pruebas computacionales que muestran su desempeño.

### Métodos basados en programación entera mixta: *Optimización Simultánea*

Esta investigación se desarrolló usando el optimizador CPLEX y el lenguaje GAMS para encontrar la solución óptima a los problemas del IRPTW. Los experimentos se ejecutaron en un procesador AMD Athlon® 64x2 Dual Core 2.7 GHz y 3 GB de RAM, ejecutando el modelo IRPTW presentado en la sub-sección *problema y formulación matemática*.

Coelho *et al.* (2013) logran determinar valores cercanos al óptimo para las instancias de prueba, ignorando las ventanas de tiempo, usando un Procesador Intel Xeon™ de 2.66 GHz, y memoria RAM superior (más de 48 GB de RAM). Sus resultados muestran tiempos computacionales competitivos (hasta 76 segundos). Los resultados logrados por la implementación del enfoque exacto propuesto usando GAMS y con las características de hardware expuestas en el párrafo anterior, se obtienen soluciones que en promedio no difieren estadísticamente a las encontradas por Coelho *et al.* (2013). Con respecto a los tiempos de cómputo, se puede concluir que no son directamente comparables, puesto que los equipos utilizados para resolver las instancias difieren. En la sección *pruebas computacionales y análisis* se presentan con mayor detalle los resultados obtenidos por cada uno de los métodos aplicados.

### Métodos basados en programación entera mixta: *Optimización Secuencial*

Se estudian dos versiones del método heurístico propuesto para resolver el problema de ruteo de vehículos con inventarios y ventanas de tiempo duras de forma secuencial. Las versiones planteadas son: 1) Heurística Secuencial (SEQ-H) y 2) Heurística Secuencial con Ventanas de Tiempo (SEQ-H (TW)).

El método SEQ-H consiste en encontrar una solución resolviendo a optimalidad dos sub-problemas de forma separada. Cada uno de los sub-problemas se resuelve mediante un modelo matemático basado en programación entera mixta. En esta versión (SEQ-H) se ejecutan dos modelos matemáticos en dos fases: El primer modelo soluciona un problema de inventarios, ignorando las restricciones de ruteo con el objetivo de encontrar el costo mínimo de gestión de inventarios y las cantidades a enviar a cada uno de los minoristas. Para este sub-modelo se consideran las restricciones de la (2) a la (10) y de la (14) a la (17) expuestas en la sub-sección *problema y formulación matemática* del modelo IRPTW usando el optimizador CPLEX para la experimentación.

En una segunda fase, se resuelve otro modelo basado en programación lineal entera mixta que optimiza las decisiones de ruteo fijando las variables de decisión asociadas al problema de gestión de inventarios encontradas en la primera fase. Para esta fase se aplican las restricciones de la (9) a la (17) expuestas en la sub-sección *problema y formulación matemática* del modelo IRPTW. Finalmente se calcula el costo total de la solución como la suma del costo de inventario y ruteo encontrada por cada sub-problema. Nuevamente, se usa el optimizador CPLEX para la experimentación.

La segunda versión del método propuesto, llamada SEQ-H (TW), incluye las ventanas de tiempo duras dentro del sub-problema de ruteo de la fase 2 y se realiza un procedimiento análogo al método SEQ-H. La ventaja de usar estos métodos secuenciales es la disminución de complejidad computacional y en consecuencia los tiempos requeridos para encontrar las soluciones se reducen en promedio en 74% (tabla 6). Sin embargo, para algunas instancias,

la heurística SEQ-H (TW), presenta dificultad en encontrar soluciones factibles debido a las ventanas de tiempo duras que restringen el conjunto de posibles soluciones y que no se tienen en cuenta en la fase 1 de la heurística. Esto ocurre al optimizar las decisiones de inventario sin considerar la restricción de las ventanas de tiempo. Además, el fijar las decisiones de inventario no garantiza que las cantidades logren ser distribuidas de forma factible dentro de las ventanas de tiempo. Para solucionar este problema, se propone una relajación de las ventanas de tiempo, asignando una penalización elevada donde se afecta la función objetivo por el incumplimiento de las mismas. Esta penalización se aplica en la fase 2 y se conoce como ventanas de tiempo “blandas”. Es decir, se permite al vehículo llegar antes o después de la ventana asignada para cada cliente. La ecuación (18) muestra la nueva función objetivo:

$$\text{Min } \hat{Z} = \sum_{t \in \mathcal{T}'} h_0 \cdot B_t + \sum_{s \in \mathcal{M}} \sum_{t \in \mathcal{T}'} h_s \cdot I_{st} + \sum_{i \in \mathcal{M}'} \sum_{j \in \mathcal{M}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} C_{ij} \cdot y_{ijt} + \sum_{i \in \mathcal{M}'} \sum_{t \in \mathcal{T}} CI_{it} \cdot TI_{it} \quad (18)$$

Donde cada cliente  $i \in \mathcal{M}$  en el periodo  $t \in \mathcal{T}$ ,  $CI_{ij}$  representa el costo unitario de incumplimiento a la restricción de ventana de tiempo y  $TI_{it}$  representa la variable auxiliar igual al número de unidades de tiempo de llegada tardía o espera al cliente  $i$ . A continuación, las tablas 2 y 3 muestran el impacto que tiene el incumplimiento de las ventanas de tiempo en los costos para las instancias con solución factible, aplicando la heurística secuencial con ventanas de tiempo duras (SEQ-H (TW)). La columna “Instancia” es el nombre del problema analizado. Las columnas “N” y “P” indican respectivamente la cantidad de minoristas y periodos contemplados en cada instancia. Las columnas “Tiempo de Espera Max” y “Tardanza Max” registran los tiempos de incumplimiento de las ventanas para cada cliente en un periodo específico. Las columnas  $C$ ,  $P$ ,  $H_0$  y  $H_f$  son respectivamente el cliente, el periodo, la hora de inicio y la hora fin de la ventana incumplida. En la columna “Promedio - Rango Ventana” se muestra el promedio entre la hora de apertura y hora de cierre de la ventana para cada cliente  $C$ . La columna “Promedio Tardanza/Espera” indica la media entre el tiempo de espera máximo y la tardanza máxima para el cliente  $C$ . La columna “Error relativo de Incumpli.” muestra el porcentaje de incumplimiento de la ventana de tiempo para el cliente  $C$  en el periodo  $P$ . La columna “Costo Penalidad” registra el producto entre la cantidad de minutos por fuera de la ventana y el costo por minuto incumplido, que en nuestro caso es de \$10 como se muestra en la columna “Costo Penalidad”, y el costo total se calcula sumando el costo de ruteo y de inventario. Dentro del análisis sólo se contemplan las instancias con soluciones factibles, penalizadas en la función objetivo por incumplimiento de las ventanas de tiempo con fines demostrativos.

En la tablas 2 y 3 se observa que en promedio el incumplimiento de las ventanas es de 19% cuando el costo de mantener inventario es bajo y 21% para costos de mantener inventario más elevados. Además, se evidencia que entre más amplia sea la ventana, menor es el error de incumplimiento.

## RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para evaluar el desempeño de los métodos de solución expuestos en la sección anterior, se consideraron 80 instancias de la literatura compuestas por 3 y 6 periodos con 5, 10, 15 y 20 clientes y se encuentran disponibles públicamente en Coelho (2007). Estas instancias han sido estudiadas por Archetti *et al.* (2007), Coelho *et al.* (2012) y Guerrero *et al.* (2015). Estas consideran una demanda constante para cada periodo pero diferente para cada minorista, una matriz de distancia simétrica y costo de almacenamiento constante. Adicionalmente, las instancias son clasificadas en dos tipos: “Low Cost” (bajo costo de mantener inventario en los minoristas y depósito) y “High Cost” (alto costo de mantener inventario en los minoristas y el depósito). Estas instancias no contemplan ventanas de tiempo. Por lo tanto, fueron modificadas para el problema en estudio. Para nuestra experimentación, un periodo corresponde a una

semana de 5 días laborando 24 horas al día y suponemos que se trabajan 16 horas al día. Se agregan las ventanas de tiempo con una distribución aleatoria discreta uniforme entre 0 y 4000 minutos, con rangos específicos de acuerdo al tipo problema (e.g. Problemas con 6 periodos y hasta 20 clientes el rango aplicado es de 3500 min a 4000 min). Además, se calculó la matriz de tiempos de viaje asumiendo una velocidad del vehículo constante e igual a 30 km/h; los tiempos de los recorridos y ventanas están dados en minutos (min).

### Resultados de los enfoques basados en programación entera mixta

Las tablas 4 y 5 muestran los resultados promedios obtenidos para cada una de las instancias estudiadas según su tipo de costo de inventario. Se presentan los tiempos de cómputo y las diferencias porcentuales entre la mejor solución conocida para la versión sin ventanas de tiempo (IRP) y la solución resultante de cada modelo. La columna "N" indica la cantidad de minoristas, la columna "P" indica la cantidad de periodos, la columna "BKS" (Best Known Solution) muestra las mejores soluciones conocidas y la columna "CPU" muestra los tiempos de cómputo para cada uno de los problemas en segundos.

Para el modelo que incluye las ventanas de tiempo (IRPTW), en las tablas 4 y 5 en la columna 6, se presentan las mejores soluciones encontradas por el método de optimización exacto presentado en la sub-sección *métodos basados en programación entera mixta aplicando optimización simultánea*. En la columna 8 se presenta el tiempo de cálculo (CPU - segundos) y en la columna 9 el incremento porcentual (Gap - %) en el costo de la solución por incluir ventanas de tiempo duras. El Gap en esta columna se calcula como el error relativo entre la mejor solución encontrada por el IRP y por el IRPTW.

Para la heurística SEQ-H, se presenta en las tablas 4 y 5 en la columna 9 y 11, el costo promedio de la mejor solución encontrada y su tiempo computacional. En la columna 10 se presenta la diferencia porcentual entre el costo del método SEQ-H y del modelo matemático IRP de la columna 4. El Gap de esta columna se calcula como el error relativo entre la mejor solución encontrada por el SEQ-H y por el IRP.

Para la heurística SEQ-H (TW) se presenta en las tablas 4 y 5 en la columna 12, el costo promedio de la mejor solución o una cota superior con un límite máximo de tiempo de ejecución de 35000 s. La columna 13 presenta la diferencia porcentual entre el costo del método SEQ-H (TW) y por el método IRPTW contemplando ventanas de tiempo duras mostrada en la columna 6. El Gap se calcula como el error relativo entre la mejor solución encontrada por el SEQ-H (TW) y por el modelo matemático IRPTW.

En la tabla 4 se observa lo siguiente: El método de optimización simultáneo sin considerar ventanas de tiempo (IRP), logró encontrar soluciones óptimas para la mayoría de instancias, excepto para los tipos de problemas 4, 7 y 8. El tiempo promedio computacional es de 5884,6 s. Segundo, el método de optimización simultáneo, considerando ventanas de tiempo logró encontrar soluciones óptimas a los problemas de tipo 1, 2 y 5; para los demás tipos de problemas encontró una cota superior. El tiempo promedio computacional es de 13506,5 s con un sobre costo en promedio del 20,4% comparado con las soluciones óptimas para el problema sin ventanas de tiempo.

**Tabla 2.** Impacto por incumplir ventanas de tiempo duras al problema de ruteo de vehículos con inventarios. Low Cost.

Instancia	N	P	Rango de la Ventana					Rango de la Ventana					Promedio - Rango ventana (min)	Promedio Tardanza/España (min)	Error Relativo de Incumplij	Costo Inventario (\$)	Costo Ruteo (\$)	Penaliziación x Tardanza/España (\$)	Costo Penalidad (\$)	Costo Total (\$)	
			Tiempo de Espera Max (min)	C	P	Ho (min)	Hf (min)	Total (min)	Tardanza Max (min)	C	P	Ho (min)									Hf (min)
abs2n5	5	3	253	1	2	672	1349	677	178	2	2	815	1423	608	216	34%	86,7	5389	10	4310	5475,7
abs4n5	5	3	208	4	2	487	1115	628	0	0	0	0	0	314	33%	64,4	3888	10	2080	3952,4	
abs5n5	5	3	174	2	2	910	1563	653	0	0	0	0	0	327	27%	131,4	2720	10	1740	2851,4	
			329	1	2	437	1343	906	0	0	0	0	0					10	3290		
abs2n10	10	3	402	5	2	611	1602	991	0	0	0	0	0	760	33%	254,5	15163	10	4020	15417,5	
			450	7	2	527	1474	947	0	0	0	0	0					10	4500		
			79	8	2	500	1457	957	0	0	0	0	0					10	790		
			236	1	2	1044	2039	995	0	0	0	0	0					10	2360		
abs4n10	10	3	428	3	2	1040	1965	925	0	0	0	0	0	716	60%	242,0	19030	10	4280	19272,0	
			1044	7	2	1080	2022	942	0	0	0	0	0					10	10440		
			10	13	2	332	2281	1949	0	0	0	0	0	1285	5%	378,8	4737	10	100	5115,8	
abs1n15	15	3	195	15	2	329	2235	1906	0	0	0	0	0					10	1950		
			136	1	2	535	2524	1989	0	0	0	0	0	1317	7%	365,2	5631	10	1360	5996,2	
abs2n15	15	3	156	8	2	563	2525	1962	0	0	0	0	0					10	1560		
abs1n20	20	3	151	18	2	1193	4189	2996	59	10	2	1017	3863	2846	105	4%	507,3	3860	10	2100	4367,3
			75	4	2	653	3219	2566	70	1	2	880	3638	2758	250	8%	514,9	9254	10	1450	9766,9
abs2n20	20	3	545	5	2	969	3876	2907	0	0	0	0	0	1950	10%	423,9	9429	10	5450		
			483	6	2	995	3928	2933	0	0	0	0	0					10	4830	9852,9	
abs4n20	20	3	81	15	2	1061	3997	2916	0	0	0	0	0					10	810		
			96	5	5	531	1192	661	0	0	0	0	0	331	15%	257,3	3763	10	960	4020,3	
abs2n5	5	6	93	2	2	765	1419	654	0	0	0	0	0	436	7%	236,1	3272,0	10	930	3508,1	
abs5n5	5	6	247	4	5	694	2398	1704	0	0	0	0	0	832	14%	471,9	6960,0	10	2470	7431,9	
abs1n10	10	6	17	4	4	154	2993	2839	354	8	2	1387	4333	2946	188	7%	822,4	13419,0	10	3710	14241,4
abs3n15	15	6	15	13	2	1322	4203	2881	364	15	2	1648	4455	2807				10	3790		

**Tabla 3.** Impacto por incumplir ventanas de tiempo duras al problema de ruteo de vehículos con inventarios. High Cost.

Instancia	Rango de la Ventana					Rango de la Ventana					Promedio - Rango Ventana (min)	Error Relativo de Incumpli.	Costo Inventario (\$)	Costo Ruteo (\$)	Penalización x Tardanza/Esperanza (\$)	Costo Penalidad (\$)	Costo Total (\$)		
	N	P	Tiempo de Espera Max (min)	C	P	Ho (min)	Hf (min)	Total (min)	Tardanza Max (min)	C								P	Ho (min)
abs1n5	5	3	556	4	2	939	1608	669	242	2	2	1028	1687	659	967,3	9305	10	7980	10272,3
abs2n5	5	3	455	1	2	883	1498	615	0	0	0	0	0	0	865,1	5629	10	4550	6494,1
abs4n5	5	3	195	2	2	465	1111	646	0	0	0	0	0	0	648,1	3758	10	1950	4406,1
abs5n5	5	3	165	2	2	796	1483	687	26	3	2	1008	1693	685	1302,0	2901	10	1910	4203,0
abs1n15	15	3	251	6	2	284	2203	1919	0	0	0	0	0	0	3812,8	5263	10	2510	9075,8
abs2n15	15	3	38	1	2	917	2865	1948	0	0	0	0	0	0	3647,5	2966	10	380	6613,5
abs4n15	15	3	60	13	2	326	2229	1903	0	0	0	0	0	0	3117,7	3773	10	600	6890,7
abs2n20	20	3	196	5	2	743	3565	2822	0	0	0	0	0	0	5035,0	5396	10	1960	10431,0
			280	7	2	881	3841	2960	0	0	0	0	0	0			10	2800	
abs4n20	20	3	99	9	2	1052	3782	2730	0	0	0	0	0	0	5035	5396	10	990	10431,0
			313	14	2	888	3427	2559	0	0	0	0	0	0			10	3130	
abs3n5	5	6	327	1	5	1047	2068	1021	0	0	0	0	0	0	2381,8	9593	10	3270	11974,8
			157	2	4	885	1901	1016	0	0	0	0	0	0			10	1570	
abs5n5	5	6	41	2	2	757	1390	633	26	1	2	1014	1688	674	2346,7	4175	10	670	6521,7
			131	3	4	315	924	609									10	1310	
			56	4	2	553	2024	1471	0	0	0	0	0	0			10	560	
abs1n10	10	6	197	4	5	573	2001	1428	0	0	0	0	0	0	4757,1	8450	10	1970	13206,9
			135	10	5	807	2290	1483	0	0	0	0	0	0			10	1350	

**Tabla 4.** Estudio comparativo de los modelos y métodos de optimización para instancias aleatorias del problema de ruteo de vehículos con inventarios y ventanas de tiempo duras. Low Cost

Tipo de Problema	N	P	IRP		IRPTW			SEQ-H			SEQ-H(TW)		
			BKS [\$]	CPU[s]	BKS [\$]	gap[%]	CPU[s]	SOL [\$]	gap[%]	CPU[s]	SOL [\$]	gap[%]	CPU[s]
1	5	3	<b>12759**</b>	3,5	<b>1804,3**</b>	36,8	1,0	1482,1	12,9	6,6	4093,2	201,4	6,9
2	10	3	<b>1910,9**</b>	10,4	<b>2746,9**</b>	44,8	1369,4	2345,4	22,8	6,3	17344,7	469,4	4594,8
3	15	3	<b>2207,8**</b>	16,0	2704,0	22,4	14089,2	2796,4	27,5	17,0	4601,1	79,9	1206,4
4	20	3	2665,6	14728,7	3392,3	25,9	15382,1	3004,1	11,5	4621,6	10362,5	232,6	2596,2
5	5	6	<b>3136,9**</b>	10,1	<b>3564,4**</b>	13,3	27,5	3433,2	8,9	9,6	3764,2	40,3	5,6
6	10	6	<b>4612,5**</b>	3273,3	5470,9	17,7	28032,0	5168,2	12,1	10,7	9014,6	67,1	3021,9
7	15	6	5477,2	12947,5	5625,9	2,5	24936,9	6225,0	13,9	3728,7	8109,6	40,2	1627,2
8	20	6	6949,5	16087,3	6900,2	-0,7	24213,8	7789,4	12,7	7699,3	8744,3	30,3	6377,0
<b>Promedio</b>			3,529,5	5884,6	4026,1	20,4	13506,5	4030,5	15,3	2012,5	8254,3	145,1	2429,5

**Notas:**  
 \* Cada tipo de problema está compuesto por 5 instancias con diferentes configuraciones de costos.  
 \*\* Los resultados que se encuentran resaltados en negrita son los valores óptimos demostrados.  
 \*\*\* Los resultados que se encuentran en cursiva son mejores soluciones encontradas con penalización, es decir, aplicando ventanas de tiempo débiles.  
 \*\*\*\* NS - No Solución hallada con un límite máximo de tiempo de ejecución de 35000 s.

**Tabla 5.** Estudio comparativo de los modelos y métodos de optimización para instancias aleatorias del problema de ruteo de vehículos con inventarios y ventanas de tiempo duras. High Cost

Tipo de Problema	N	P	IRP		IRPTW			SEQ-H			SEQ-H(TW)		
			BKS [\$]	CPU[s]	BKS [\$]	gap[%]	CPU[s]	SOL [\$]	gap[%]	CPU[s]	SOL [\$]	gap[%]	CPU[s]
1	5	3	<b>2199,9**</b>	1,2	<b>2584,6**</b>	16,3	4,3	2360,1	6,7	9,4	6343,9	181,4	18,1
2	10	3	<b>4338,0**</b>	3,3	<b>5000,4**</b>	15,6	629,4	4817,8	10,8	9,7	NS	NS	9290,7
3	15	3	<b>5435,8**</b>	12,2	5939,4	9,2	24906,6	6008,6	11,0	28,6	7029,5	22,7	2268,7
4	20	3	<b>7235,5**</b>	5473,2	7625,3	5,3	20493,4	8001,7	10,6	4564,4	10973,5	45,5	3473,6
5	5	6	<b>5354,2**</b>	24,9	<b>5738,6**</b>	7,3	25,9	5632,5	4,9	9,3	9248,3	56,7	8,1
6	10	6	<b>8607,3**</b>	2654,9	9362,2	8,8	28491,5	9183,7	6,7	11,0	13279,1	46,5	4471,7
7	15	6	11676,0	12229,5	11717,6	0,3	17079,4	12374,7	6,0	3205,5	12663,2	5,7	1325,5
8	20	6	15791,0	15022,2	14726,3	-5,5	34794,2	15594,6	0,1	3264,4	15659,8	6,0	4367,0
<b>Promedio</b>			7579,7	4427,7	7836,8	7,2	15803,1	7996,7	7,1	1387,8	10742,5	52,1	3152,9

**Notas:**  
 \* Cada tipo de problema está compuesto por 5 instancias con diferentes configuraciones de costos.  
 \*\* Los resultados que se encuentran resaltados en negrita son los valores óptimos demostrados.  
 \*\*\* Los resultados que se encuentran en cursiva son mejores soluciones encontradas con penalización, es decir, aplicando ventanas de tiempo débiles.  
 \*\*\*\* NS - No Solución hallada con un límite máximo de tiempo de ejecución de 35000 s.

**Tabla 6.** Cuadro comparativo de los Tiempos de Computo según el método de optimización

	Promedio - CPU [s]		Promedio [s]	Diferencia Relativa (%)
	Low Cost	High Cost		
<b>IRP</b>	5884,6	4427,7	5156,2	-
<b>IRPTW</b>	15803,1	13506,5	14654,8	184,2%
<b>SEQ-H</b>	1387,8	2012,5	1700,1	-67,0%
<b>SEQ-H(TW)</b>	3152,9	2429,5	2791,2	-81,0%

Adicionalmente, la heurística SEQ-H logró encontrar soluciones factibles a una gran cantidad de problemas, excepto los problemas de tipo 4, 7 y 8. El tiempo promedio computacional es de 2012,5 s con un sobrecosto en promedio del 15,3% comparada con las soluciones encontradas por el IRP. La heurística SEQ-H (TW) logró encontrar únicamente soluciones factibles para los problemas tipo 1 y 5, pero penalizando la función objetivo por incumplimiento de las ventanas de tiempo. El tiempo promedio computacional es de 2429,5 s con un sobrecosto en promedio del 145,1% comparado con las soluciones encontradas por el IRPTW. Nos damos cuenta también que ningún método logró encontrar soluciones factibles para los problemas tipo 4, 7 y 8 luego de 25000 s. Al aumentar el tiempo computacional, para el problema tipo 8, el modelo IRPTW encontró una mejor solución promedio con respecto a la solución promedio encontrada por el modelo IRP, debido a que este último no logra encontrar la solución óptima.

Por otro lado, en la tabla 5 se observa que el enfoque exacto para el modelo IRP logra encontrar soluciones óptimas para la gran mayoría de instancias, excepto para los problemas tipo 7 y 8 con un tiempo computacional promedio de 4427,7 s. El enfoque exacto para el modelo IRPTW logra encontrar soluciones óptimas a los problemas tipo 1, 2 y 5. El tiempo computacional promedio es de 15803s con un sobrecosto en promedio del 7,2% comparado con las soluciones encontradas por el IRP. Además, la heurística SEQ-H logra encontrar soluciones factibles a una gran cantidad de problemas, excepto los problemas tipo 4, 7 y 8. El tiempo computacional promedio es de 1387,8s con un sobrecosto en promedio del 7,1% comparado con las soluciones encontradas por el IRP.

La heurística SEQ-H (TW) logra encontrar soluciones factibles para los problemas tipo 1 y 7. La solución encontrada para el problema tipo 1 se logra a través de la penalización de la función objetivo por el incumplimiento de las ventanas de tiempo; para el problema tipo 7 no se penaliza la función objetivo. El tiempo computacional promedio es de 3152,9 s convirtiéndose en una ventaja frente a los demás métodos que invierten mucho más tiempo computacional. Sin embargo, se debe contemplar que existe un sobrecosto en promedio del 52,1% comparado con las soluciones encontradas por el IRPTW.

El problema tipo 2 con la heurística SEQ-H (TW) no logra encontrar ninguna solución factible luego de 9290,7 s. Finalmente, para el problema tipo 8, ningún método logra encontrar una solución factible luego de 34794,2 s. Sin embargo, el método IRPTW encuentra una mejor solución en comparación al IRP, donde reduce el costo en 5,5% debido a que no se logra encontrar la solución óptima para el IRP. La tabla 6 se muestra un cuadro comparativo de los tiempos de cómputo empleados por cada método propuesto.

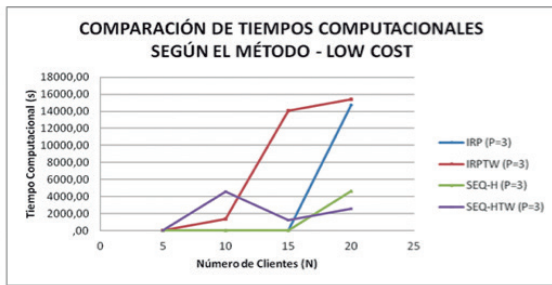
A partir de estos resultados, se analiza que incluir ventanas de tiempo al problema produce un incremento promedio en los costos del 13,8% (Low Cost y High Cost) con respecto al costo promedio de las soluciones encontradas para el IRP y un incremento promedio en los tiempos de ejecución del modelo IRPTW del 184,2% con respecto a los tiempos computacionales obtenidos para el IRP como se observa en la tabla 6. Este incremento es razonable, puesto al incluir este tipo de restricciones de ventanas de tiempo duras restringe que el vehículo entregue pedidos a los clientes a cualquier hora, generando más rutas de abastecimiento con el objetivo de cumplir con las entregas dentro de los rangos establecidos. En las figuras 1 y 2 se ilustra el comportamiento de los tiempos computacionales para cada método analizado.

En las figuras 4, 5, 6 y 7 se muestra una tendencia creciente en los tiempos computacionales cuando se incrementa el tamaño de la instancia. Sin embargo, para el método IRPTW cuando soluciona instancias de bajo costo, 6 periodos y más de 10 clientes los tiempos computacionales decrecen (Figura 6), porque se alcanza el límite máximo de almacenamiento en memoria del computador. Se observa el mismo comportamiento con el método para las instancias de alto costo, con 3 periodos y más de 15 clientes (Figura 5).

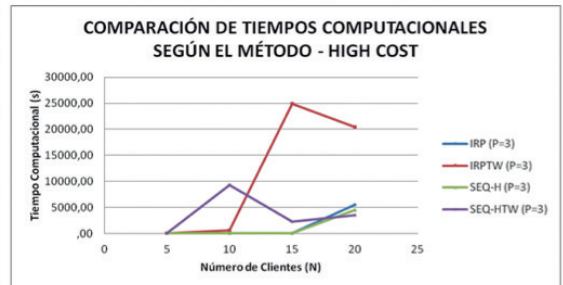
Analizando la heurística secuencial sin ventanas de tiempo (SEQ-H), se muestra un incremento promedio en los costos del 11,2% con respecto a la soluciones encontradas por el modelo IRP. Por otro lado, se observa en promedio que los tiempos de cómputo del modelo SEQ-H son menores en 67% con respecto a los tiempos de cómputo del modelo IRP como se observa en la tabla 6. Por lo tanto, la heurística SEQ-H presenta una oportunidad para el cómputo de soluciones iniciales factibles.

La heurística SEQ-H (TW) muestra en promedio un aumento en el costo del 98,6% comparado con el IRPTW. Este resultado se debe a las penalizaciones en la función objetivo aplicadas por la violación de las restricciones de ventanas de tiempo, cuando el método SEQ-H (TW) no logra encontrar soluciones factibles. Por lo tanto, se propone relajar la restricción como fue explicado en la sub-sección *métodos basados en programación entera mixta aplicando optimización secuencial*. En total se resolvieron 80 instancias, de las cuales 65 no cumplieron con la restricción.

Finalmente, observamos que las ventanas de tiempo duras también tienen impacto en los tiempos de ejecución, es decir, entre más estrecha sea la ventana mayor es el tiempo requerido para encontrar una solución. Los tiempos computacionales del modelo IRPTW son considerablemente elevados en comparación a la heurística secuencial con ventanas de tiempo. Además, se experimentó con instancias de 30 y 50 clientes. En estos casos se requiere en promedio más de 80 h para encontrar una solución factible, y en algunas instancias, el solver no logró encontrar ninguna solución por falta de memoria. El uso de métodos heurísticos y meta-heurísticos se propone como investigación futura para este tipo de instancias.

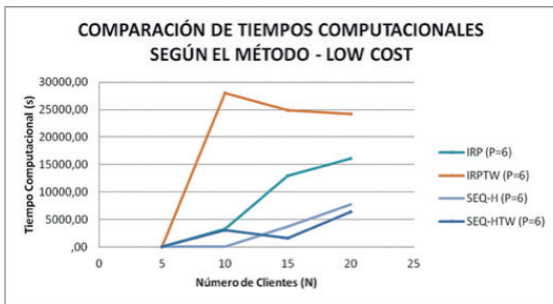


**Figura 4.** Comparación de tiempos computacionales por método de solución para 3 periodos con costo bajo de inventario (Low Cost)

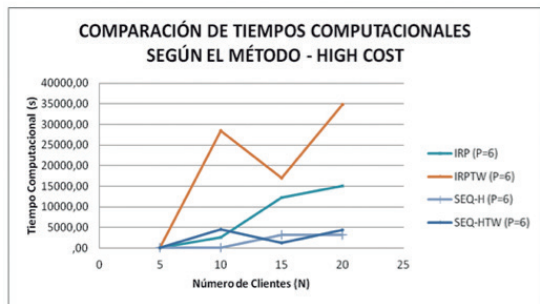


**Figura 5.** Comparación de tiempos computacionales por método de solución para 3 periodos con costo alto de inventario (High Cost)





**Figura 6.** Comparación de tiempos computacionales por método de solución para 6 periodos con costo bajo de inventario (LowCost)



**Figura 7.** Comparación de tiempos computacionales por método de solución para 6 periodos con costo alto de inventario (High Cost)

## CONCLUSIONES

Este trabajo de investigación presenta una formulación matemática para el problema de ruteo de vehículos con inventarios y ventanas de tiempo duras, demanda determinística, y un sólo vehículo. Se presentan dos métodos de optimización basados en programación entera mixta. El primero considera las decisiones de forma simultánea, y el segundo es una heurística que considera las decisiones de forma secuencial. Además se aporta al desarrollo de la investigación en logística interna y de transporte, donde tradicionalmente se han desarrollado modelos de inventarios y ruteo de vehículos de forma separada. Recientemente se han estudiado los problemas de ruteo de vehículos con inventarios. Estos optimizan conjuntamente el transporte y las decisiones de gestión de inventarios con el objetivo de reducir los costos logísticos asociados y se ha demostrado que integrar estas dos decisiones reduce de manera importante los costos comparado con el enfoque tradicional. Nuestros resultados demuestran que la consideración de ventanas de tiempo en la optimización conjunta de decisiones es pertinente puesto que existe un impacto significativo de las mismas en los costos logísticos.

El algoritmo de solución exacto propuesto logra encontrar soluciones óptimas para instancias de hasta 10 clientes con 3 períodos de tiempo y de hasta 5 clientes con 6 períodos. Esto evidencia de forma empírica la complejidad del problema y la necesidad del uso de heurísticas para instancias de mayor tamaño.

Adicionalmente se estudia el impacto de diferentes configuraciones de ventanas de tiempo en el IRPTW. Los resultados muestran que los costos de ruteo y de gestión de inventarios sufren variaciones. El costo total mínimo se incrementa en promedio 12,53% para las instancias estudiadas cuando se tienen ventanas estrechas y disminuye en promedio 6,08% cuando se presentan ventanas amplias.

Como investigación futura se plantea el desarrollo de algoritmos de cálculo de cotas inferiores y el desarrollo de meta-heurísticas para obtener cotas superiores. Adicionalmente se puede plantear un problema con flota heterogénea o demanda estocástica.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al profesor Ignacio Pérez Vélez, Ph.D. y a los revisores anónimos por sus valiosos comentarios a la investigación y al documento.

## REFERENCIAS

ANDERSSON, H., HOFF, A., CHRISTIANSEN, M., HASLE, G., and LØKKETANGEN, A. Industrial aspects and literature survey: Combined inventory management and routing. *Computers & Operations Research*, 2010, vol. 37, no. 9, pp. 1515-1536.

ARCHETTI, C., BERTAZZI, L., HERTZ, A., and SPERANZA, M.G. A Hybrid Heuristic for an Inventory Routing Problem. *INFORMS Journal on Computing*, 2012, vol. 24, no. 1, pp. 101-116.

ARCHETTI, C., BERTAZZI, L., LAPORTE, G., and SPERANZA, M.G. A Branch-and-Cut Algorithm for a Vendor-Managed Inventory-Routing Problem. *Transportation Science*, 2007, vol. 41, no. 3, pp. 382-391.

BAÑOS, R., ORTEGA, J., GIL, C., MÁRQUEZ, A.L., and DE TORO, F. A hybrid meta-heuristic for multi-objective vehicle routing problems with time windows. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, vol. 65, no. 2, pp. 286-296.

BARD, J.F., and NANANUKUL, N. Heuristics for a multiperiod inventory routing problem with production decisions. *Computers & Industrial Engineering*, 2009, vol. 57, no. 3, pp. 713-723.

BERTAZZI, L., BOSCO, A., GUERRIERO, F., and LAGANÀ, D. A stochastic inventory routing problem with stock-out. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2013, vol. 27, pp. 89-107

BRÄYSY, O., and GENDREAU, M. Vehicle Routing Problem with Time Windows, Part II: Metaheuristics. *Transportation Science*, 2005, vol. 39, no. 1, pp. 119-139.

CALVETE, H.I., GALÉ, C., OLIVEROS, M.J., and SÁNCHEZ-VALVERDE, B. A goal programming approach to vehicle routing problems with soft time windows. *European Journal of Operational Research*, 2007, vol. 177, no. 3, pp. 1720-1733.

CHANG, T.S., WAN, Y., and OOI, W.T. A stochastic dynamic traveling salesman problem with hard time windows. *European Journal of Operational Research*, 2009, vol. 198, no. 3, pp. 748-759.

COELHO, L.C. Instance set proposed by Archetti *et al.* (2007) for the single vehicle single commodity inventory-routing problem. 2007. [Disponible en]: <<http://www.leandro-coelho.com/instances/inventory-routing>>[Acceso 9 de Diciembre 2015].

COELHO, L.C., and LAPORTE, G. The exact solution of several classes of inventory-routing problems. *Computers & Operations Research*, 2013, vol. 40, no. 2, pp. 558-565.

COELHO, L.C., CORDEAU, J.F., and LAPORTE, G. Consistency in multi-vehicle inventory-routing. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2012(a), vol. 24, pp. 270-287.

COELHO, L.C., CORDEAU, J.F., and LAPORTE, G. The inventory-routing problem with transshipment. *Computers & Operations Research*, 2012 (b), vol. 39, no. 11, pp. 2537-2548.

DONDO, R., MÉNDEZ, C. A., and CERDÁ, J. The multi-echelon vehicle routing problem with cross docking in supply chain management. *Computers & Chemical Engineering*, 2011, vol. 35, no. 12, pp. 3002-3024.

GRONHAUG, R., CHRISTIANSEN, M., DESAULNIERS, G., and DESROSIERS, J.A. Branch-and-Price Method for a Liquefied Natural Gas Inventory Routing Problem. *Transportation Science*, 2010, vol. 44, no.3 pp. 400-415.

GUERRERO, W.J., PRODHON, C., VELASCO, N., and AMAYA, C.A. A relax-and-price heuristic for the inventory-location-routing problem. *International Transactions in Operational Research*, 2015, vol. 22, no. 1, pp. 129-148.

LIU, S.C., and LEE, W.T. A heuristic method for the inventory routing problem with time windows. *Expert Systems with Applications*, 2011, vol. 38, no. 10, pp. 13223-13231.

QIN, L., MIAO, L., RUAN, Q., and ZHANG, Y. A local search method for periodic inventory routing problem. *Expert Systems with Applications*, 2014, vol. 41, no. 2, pp. 765-778.

QURESHI, A.G., TANIGUCHI, E., and YAMADA, T. A Microsimulation Based Analysis of Exact Solution of Dynamic Vehicle Routing with Soft Time Windows. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2012, vol. 39, pp. 205-216.