

Modelo de flujo de diferencia finita de ejes simétricos para simular caídas de presión dentro y alrededor de un pozo fluyendo*

*Fidel Orlando Méndez Montealegre***

Resumen

El presente estudio desarrolló un modelo de diferencias finitas de ejes simétricos, para simular caídas de presión en tres dimensiones dentro y alrededor de un pozo fluyendo. Las propiedades del pozo que se pueden simular incluyen: el almacenamiento en el revestimiento del pozo; pérdidas en cabeza hidráulica a través de la malla del pozo y la variación de la cabeza hidráulica por medio de la longitud interior del pozo, debido a la fricción del flujo en la tubería y a la velocidad no uniforme. El modelo admite penetración parcial del pozo y múltiples intervalos monitoreados. La fracción del flujo interno total hacia el pozo que es aportado por cada capa acuífera, es una variable que se calcula en cada paso de tiempo. Las propiedades del acuífero que pueden ser simuladas incluyen condiciones confinadas (con o sin filtración), condiciones no confinadas, no isotropía horizontal-vertical y variaciones verticales en la conductividad hidráulica.

El flujo horizontal es calculado de una integración de la ley de Darcy que permite la variación del área de la sección transversal de una celda de diferencia finita a la siguiente. La capa más alta de celdas de diferencias finitas, la cual representa la parte más alta de la zona saturada, contribuye con una producción o rendimiento específico aparente de agua almacenada, mientras que otras celdas contribuyen un almacenamiento específico de agua almacenada. Esta representación permite la simulación del efecto de "rendimiento o producción retrasada". El cálculo del flujo horizontal en la capa más alta de celdas admite la reducción del área de la sección transversal (y de la transmisibilidad) causada por la disminución del nivel de agua freática.

El modelo requiere uniformidad horizontal de la conductividad hidráulica, rendimiento específico y almacenamiento específico. Así mismo, exige que la capa superior de las celdas deba ser más gruesa verticalmente que la máxima caída de presión del nivel de agua freática, y que el frente de filtración, no sea simulado. La configuración geométrica implica que la entrada de la bomba, esté encima del tope de la malla del pozo. También es necesario un límite de paso de tiempo bajo, ya que pasos de tiempo grandes hacen que el método explícito resulte en tiempo de ejecución muy

* Freddy Humberto Escobar M. Director Proyecto de Grado. Ph.D. Ingeniería de Petróleos. Vicerector de Investigación y Proyección Social. Universidad Surcolombiana. fescobar@usco.edu.co

** Ingeniero de Petróleos Universidad Surcolombiana.



largo o que no converja. Varias propiedades diferentes del acuífero y numerosas complejidades en el sistema de flujo que son causadas por las características del pozo, pueden ser simuladas. Todas las características pueden ser simuladas simultáneamente.

El modelo fue probado mediante la comparación de sus resultados con los resultados de las soluciones analíticas publicadas y otros modelos matemáticos. Los resultados estuvieron generalmente en un buen grado de concordancia.

Palabras clave: Ejes simétricos, producción retrasada, rendimiento específico aparente, rendimiento específico, almacenamiento específico.

Abstract

An axisymmetric finite-difference model was developed that can simulate drawdown in three dimensions in and around a pumped well. Well properties that can be simulated include well-casing storage, hydraulic head loss across the well screen, and hydraulic-head variation along the length of the well bore due to pipe-flow friction and nonuniform velocity. The model allows for partial well penetration and for multiple screened intervals. The fraction of total inflow to the well that is allocated to each aquifer layer is a variable that is calculated in each time step. Aquifer properties that can be simulated include confined conditions (leaky or non leaky), unconfined conditions, vertical-horizontal anisotropy and vertical variations in hydraulic conductivity. Horizontal flow calculated from an integration of Darcy's law to allow for the variation in cross-sectional area from one finite-difference cells, which represents the upper part of the saturated zone, contributes stored water from specific yield, whereas other cells contribute stored water from specific storage. This representation allows for simulation of the "delayed yield" effect. Calculation of horizontal flow in the uppermost layers of cells allows for the reduction in cross-sectional area (and transmissivity) caused by lowering of the water table.

The model requires horizontal uniformity of hydraulic conductivity specific yield and specific storage. The model also requires that the upper layer of cells must be thicker vertically than the maximum drawdown of the water table, and that the seepage face is not simulated. The geometric configuration requires the pump intake to be above the top of the well screen. An upper limit on time-step length required by the explicit method can result in lengthy execution time. Several different aquifer properties and numerous complexities in the flow system that are caused by well characteristics can be simulated. All characteristics can be allowed for simultaneously. The model was tested by comparing its results with results of published analytical solutions and other mathematical models. The results were generally in good agreement.

Key words: Axisymmetric, delayed yield, apparent specific yield, specific yield, specific storage.

Introducción

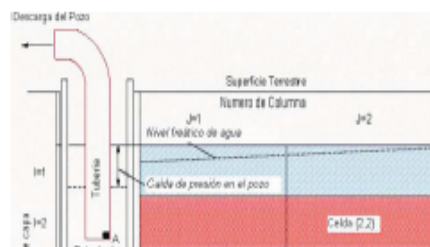
Un sin número de modelos para agua subterránea, que simulan el flujo en ejes simétricos alrededor de un pozo fluyendo se describen en la literatura. Cooley y Cunningham (1979), describieron un modelo de elemento finito que calcula las pérdidas de la cabeza hidráulica a través de la malla del pozo y a lo largo del diámetro del pozo. Un modelo construido por Davis y Neuman (1983),

permite la simulación del almacenamiento en el diámetro del pozo y del frente de la filtración. Reilly (1984), describe un modelo de elementos finitos que simula condiciones limitadas y acuíferos múltiples.

Debido a que los métodos analíticos usados para interpretar los datos de caída de presión de pruebas en acuíferos requieren una o más suposiciones acerca del pozo fluyendo y del sistema acuífero que pueden no ser reales, los

modelos numéricos pueden probar que son más útiles. Este trabajo describe un modelo numérico que puede simular:

1. Los efectos de las propiedades del pozo, como la penetración parcial y los múltiples intervalos monitoreados.
2. Los procesos en el pozo, como la producción de agua almacenada en la tubería de revestimiento del pozo, las





generalmente conceptualizado como el flujo entre la sección media de una celda y la sección media de la siguiente (Formulación de Celdas Centradas), donde ambas secciones medias son perpendiculares a la dirección del flujo para ser calculadas y donde las secciones medias definen áreas enteras de la sección transversal de las celdas. Las variaciones leves en esta conceptualización general para flujo cerca al pozo y para flujo cerca al nivel freático de agua se explicarán más adelante.

En la forma más sencilla, el flujo de una celda de diferencias finitas a otra puede ser expresado mediante una adaptación de la ley de Darcy (dado que cero caída de presión en todos los puntos del sistema puede ser comparado con cero gradiente en todo el sistema):

Ecuación 1

$$Q = (K)(A) \frac{d(DD)}{dX}$$

Donde,

Q = Caudal ($L^3 T^{-1}$);

K = Conductividad hidráulica en la dirección del flujo ($L T^{-1}$);

A = Área de la sección transversal de las celdas perpendicular a la dirección de flujo (L^2);

DD = Caída de Presión (L); y

X = Distancia en dirección del flujo (L).

Si el área de la sección transversal de flujo y la conductividad hidráulicas, son constantes en el espacio, entonces el gradiente $d(DD)/dX$ puede ser considerado uniforme entre las dos celdas, y, considerando esto se tiene una formulación de celda centrada, el flujo puede ser obtenido por sustitución de la diferencia en la caída de presión entre los puntos del centro de las dos celdas por $d(DD)$, y la distancia entre los puntos del centro de las dos celdas por dX .

Flujo horizontal. En el modelo de ejes simétricos, el flujo horizontal, es un flujo radial y el área de

la sección transversal de flujo (A) varía de una celda a la otra. (Figura 2.). El flujo radial entre las celdas adyacentes puede ser visto como el flujo de un extremo de un prisma trapezoidal a otro, donde los extremos opuestos del prisma trapezoidal representan las secciones medias (líneas punteadas en la Figura 2.) de las celdas y donde el área de la sección transversal de flujo varía linealmente con X (Figura 2.). Para derivar una expresión para el flujo de una celda a la siguiente, se considera X=0 a la sección media de la celda 1 y X=L a la sección media de la celda 2. También se considera DELDD como la diferencia entre la caída de presión en el centro de la celda 2 menos la caída de presión en el centro de la celda 1. Debido a que las propiedades hidráulicas son uniformes horizontalmente en este modelo, la conductividad hidráulica (K) es la misma en las dos celdas. Sustituyendo y reemplazando de la ecuación 1, e integrando entre X=0 a X=L se tiene:

Ecuación 2

$$Q = \frac{(DELDD)(K)}{\int_{X=0}^{X=L} \frac{dX}{A(X)}}$$

Donde,

L = La distancia horizontal entre la secciones medias de las dos celdas (L); y

A(X) = Una expresión matemática para el área de la sección transversal como una función de X;

Ecuación 3

$$A(X) = A1 + \frac{(A2 - A1)}{(L)} X$$

Donde,

A1 = Área de la sección transversal de flujo en la sección media de la celda 1 (L^2); y

A2 = Área de la sección transversal de flujo en la sección media de la celda 2 (L^2);

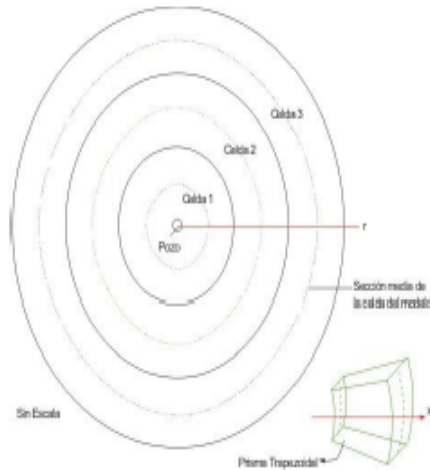


Figura 2. Conceptualización del flujo horizontal desde el centro de una celda al centro de la siguiente celda.

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2, la solución general de la ecuación 2 es la siguiente, la cual es similar a la ecuación Thiem (Lohman, 1972):

Ecuación 4

$$Q = \frac{(DELDD)(K)(A2 - A1)}{(L)[\ln(A2) - \ln(A1)]}$$

Si el flujo entre una celda en la columna 1 (Figura 1) y el pozo está siendo calculado, el flujo es conceptualizado para ser de la sección media de la celda en la columna 1 a la pared del pozo y A2 es igual al área de la sección transversal de flujo en la pared del pozo, para esta parte del yacimiento.

Flujo vertical. En el flujo vertical entre dos celdas, el área de la sección transversal es una constante, pero el cálculo del flujo puede ser complicado por variaciones en la conductividad hidráulica vertical de una celda a la siguiente (Figura 3.). Considerando que el flujo en un instante de tiempo debe ser el mismo en ambas celdas, el flujo de una celda a la siguiente puede ser calculado usando la media armónica de espesor compensado (\bar{K}) de dos valores de conductividad hidráulica:

Ecuación 5

$$\bar{K} = \frac{L}{\frac{La}{Ka} + \frac{Lb}{Kb}}$$

Donde,

- L = Distancia total vertical entre las secciones medias de las dos celdas (L);
- Ka = Conductividad hidráulica vertical de la celda a (LT^{-1});
- Kb = Conductividad hidráulica vertical de la celda b (LT^{-1});
- La = Un medio del espesor vertical de la celda a (L) y;
- Lb = Un medio del espesor vertical de la celda b (L).

Los cálculos del flujo vertical entre las celdas adyacentes se derivan de:

Ecuación 6

$$Q = (\bar{K})(A) \frac{(DELDD)}{L}$$

Donde A es el área de la sección transversal de flujo. Si la conductividad hidráulica vertical es cero en cualquiera de las dos celdas, el modelo falla en ambas ecuaciones 5 y 6; y el flujo vertical a colocar será igual a cero.

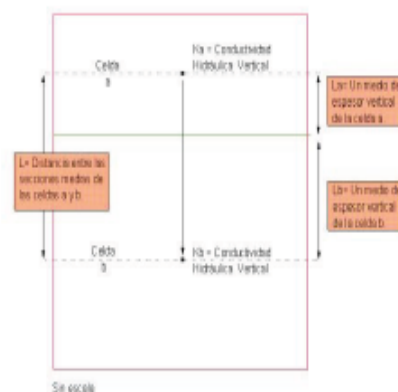


Figura 3. Variables necesarias en el cálculo de la media armónica de espesor compensado de valores de la conductividad hidráulica para dos celdas adyacentes, usadas para calcular el flujo vertical entre dos celdas.

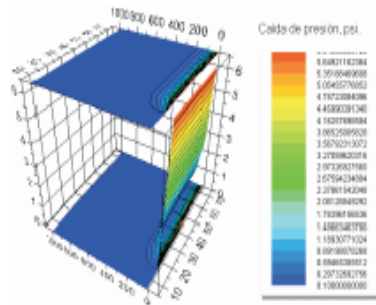


Figura 4. Gráfica de Caída de presión en un acuífero a 10000 segundos, para el caso 1(Caída de presión en estado estable en un acuífero confinado), en barras.

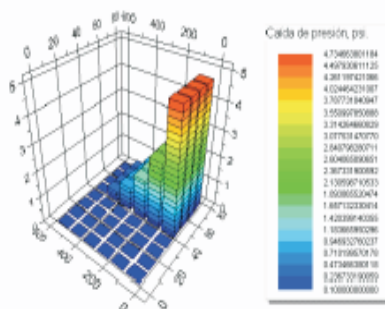


Figura 5. Gráfica de Caída de presión en un acuífero a 500 segundos, para el caso 2(Caída de presión en estado inestable en un acuífero confinado sin filtración), en contornos.

» Metodología

El desarrollo de la investigación se basa en un estudio de tipo deductivo, en donde se presentan e identifican las principales características del modelo que se aplicará para la realización del estudio de una simulación. En este caso, se utilizaran como base los siguientes modelos: el modelo de Cooley y Cunningham (1979), los cuales descubrieron un modelo de elemento finito que calcula las pérdidas de la cabeza hidráulica a través de la malla del pozo y a lo largo del diámetro del pozo. El modelo construido por Davis y Neuman (1983), que permite la simulación del almacenamiento en la cara del pozo y el frente de filtración; el de Reilly (1984), el cual describe un modelo de elemento

finito que simula condiciones confinadas, no confinadas y acuíferos múltiples.

La información recopilada de los diferentes documentos y libros relacionados con el tema de la predicción del comportamiento de la caída de presión dentro y alrededor de un pozo fluyendo que contengan elementos teóricos y prácticos se compiló en el programa de cómputo. Además, a cada metodología de predicción se le desarrolló su algoritmo. De este modo, se obtuvo un programa de cómputo aproximado a la realidad y basado en la experiencia y en los modelos teórico – prácticos desarrollados por otros autores.

» Resultados

- Los métodos matemáticos de simulación coincidieron con los datos reales, lo cual fue comprobado por cada autor al desarrollar cada ecuación matemática.
- Los resultados obtenidos fueron comparados con los respectivos métodos analíticos y en todos los casos fueron los mismos.
- La simulación numérica es aplicable a distintos tipos de sistemas acuíferos, y reemplaza muy bien a los métodos analíticos los cuales son más complejos y difíciles de resolver.
- La simulación de caída de presión en y alrededor de un pozo fluyendo, utilizando los métodos numéricos es la forma más rápida, exacta y práctica para evaluar caídas de presión.
- Con este modelo numérico propuesto para predecir caídas de presión en y alrededor de un pozo fluyendo es posible analizar los datos de salida para estimar como será el comportamiento futuro del sistema pozo-acuífero.

»» **Bibliografía**

1. BOUWER, Herman, 1978, GROUNDWATER hydrology: New York, MacGraw-Hill, 480 p.
2. COOLEY, R.L., and CUNNINGHAM, A.B., 1979, Consideration of energy loss in theory of flow to wells: Journal of Hydrology, v.43, p.161-184.
3. DAVIS, L.A., and NEUMAN, S.P., 1983, Documentation and user guide-UNSAT2- Variably saturated flow model: U.S. Nuclear Regulatory Commission, NUREG/CR-3390.
4. FREEZE, R.A. and CHERRY, J.A., 1979, Groundwater: Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 604 p.
5. HANTUSH, M.S., Analysis of data from pumping test in leaky aquifers: Transactions of American Geophysical Union, 1956. v.37, p.702-714.
6. JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, Modification of the theory of leaky aquifers: Journal of Geophysical Research, 1960. v.65, no. 11, p. 3713-3725.
7. HANTUSH, M.S., and JACOB, C.E., 1955, Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer: Transactions of American Geophysical Union, v. 36, no.1, p.95-100.
8. JACOB, C.E., 1947, Drawdown test to determine effective radius of artesian well: Transactions of the American Society of Civil Engineers, v. 112, p. 1047-1070.
9. LOHMAN, S.W., 1972, Ground-water hydraulics: U.S. Geological Survey Professional Paper 708, 70 p.
10. MCWHORTER, D.B., and SUNADA, D.K., 1985, Ground-water hydrology and hydraulics: Fort Collins, Colorado, Water Resources Publications, 290 p.
11. NEUMAN, S.P., 1974, Effect of partial penetration on flow in unconfined aquifers considering delayed gravity response: Water Resources Research, v. 10, no. 2, p. 303-312.
12. PAPADOPULOS, I.S., and COOPER, H.H., 1967, Drawdown in a well of large diameter: Water Resources Research, v. 3, p. 241-244.
13. REILLY, T.E. 1984, A Galerkin finite-element flow model to predict the transient response of a radially symmetric aquifer: U.S. Geological Survey Water-Supply Paper 2198, 33 p.
14. RORABAUGH, M.I., Graphical and theoretical analysis of step-drawdown test of artesian well: Proceedings of American Society of Civil Engineers, 1953. v.79, no.362, 23 p.
15. RUSHTON, K.R., and REDSHAW, S.C., Seepage and groundwater flow—Numerical analysis by analog and digital methods: New York, John Wiley and Sons, 1979. 339 p.
16. STREETER, V.L., Steady flow in pipes and conduits, in Rouse, Hunter, ed., engineering hydraulics: New York, John Wiley and Sons, 1950. p. 387-443.
17. THEIS, C.V. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage: Transactions of American Geophysical Union, 1935. v.16, p.519-524.
18. WANG, H.F., and ANDERSON, M.P., 1982, Introduction to groundwater modeling-Finite difference and finite element methods: San Francisco, W.