

El problema de Stefan y aplicaciones

The Stefan problem and applications

Mauro Montealegre Cardenas¹, Jasmidt Vera Cuenca²,
Edgar Montealegre Cardenas³

Resumen

En este trabajo analizamos el problema Stefan de dos fases permitiendo irregularidades en la frontera libre, el cual requiere el tratamiento implícito de la interfase a través de formulaciones débiles de la entalpia, para construir funcionales de costos $J(u, n(u), v(u))$ sujetos a un control externo u en un dominio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), el cual tiene borde suave $\partial\Omega$, y para $0 < T < \infty$ fijo, $Q \equiv \Omega \times [0, T]$, $\Sigma \equiv \partial\Omega \times [0, T]$.

Palabras claves: Ecuación del calor, problemas con frontera libre, control óptimo, bifurcaciones, funcionales de costo, entalpia, crecimiento de tumores, segregación espacial.

Abstract

In this paper we analyze the two-phase Stefan problem allowing the free boundary irregularities, which requires implicit treatment of the interface through weak formulations of the enthalpy to construct cost functional $J(u, n(u), v(u))$ subject to external control u in a limited domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), that has soft edge $\partial\Omega$ and to for $0 < T < \infty$ fixed, $Q \equiv \Omega \times [0, T]$, $\Sigma \equiv \partial\Omega \times [0, T]$.

Keywords: Heat equation, problems with free boundary, optimal control, bifurcations, cost functional, enthalpy, tumor growth, spatial segregation.

1 Director Grupo de investigación DINUSCO. Universidad Surcolombiana. E-mail: mmonteal@usco.edu.co
2 Integrante Grupo de investigación DINUSCO. Universidad Surcolombiana. E-mail: jveracuena@hotmail.com
3 Integrante Grupo de investigación DINUSCO. Universidad Surcolombiana. E-mail: mmonteal@usco.edu.co

1. Introducción

Este estudio se refiere al conocimiento de los modelos matemáticos en los cuales la dinámica dispersiva sobre la frontera afecta su ubicación espacial, son los llamados problemas con frontera libre, una área de la matemática aplicada con intercepciones en ecología, biología celular, físico - química y economía.

El método para abordar estos estudios, una vez concretado el modelo con sus condiciones iniciales, de frontera y la llamada condición de Stefan, consiste en conocer la función que describe el intercambio de energía en esa frontera libre, hasta el cambio de la forma en su frontera; y el estado del calor, entendido en términos de la energía que evoluciona en el dominio espacio - temporal.

Pero es conveniente describir los cambios estructurales de las soluciones, esto es, las bifurcaciones que surgen en estas soluciones y el control que se pueda ejercer en todo este proceso. Por ello el proceso de solución cae en el contexto del control óptimo a funcionales de costo, cuyo mínimo restringido es relevante para la descripción del proceso en busca de resultados deseados.

En términos de los procesos matemáticos necesarios para este tipo de estudios realizamos: análisis de estabilidad lineal en torno de estados de reposo, con buenas aproximaciones a la estabilidad no lineal.

2. Caso unidimensional lineal

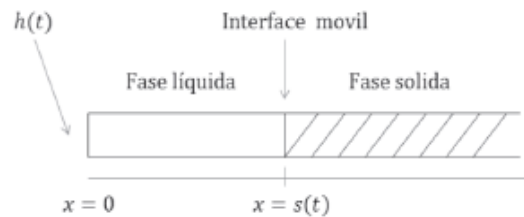


Figura 1. Interface para una frontera libre.

Sea la interface, ver figura 1, entre dos estados de la materia, la cual se coloca a través de los siguientes subconjuntos del espacio - tiempo:

$$Q_{s,t} \equiv \begin{cases} Q_1 = \{ (x,t) \mid 0 < x < s(t), 0 < t < T \} \\ Q_2 = \{ (x,t) \mid s(t) < x < d, 0 < t < T \} \end{cases}$$

permitiendo que la frontera libre alcance uno de los extremos $x = 0$ y $x = d$, en este contexto el modelo matemático sobre el problema de Stefan unidimensional lineal esta constituido por el siguiente sistema,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } Q_{s,T}, \\ -u_x(0,t) = h(t) > 0, & 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & 0 < x < b, \\ u(0,0) = u_0(0), \\ -u_x(s(t),t) = \dot{s}(t), & 0 < t < T, \\ u(s(t),t) = 0, & 0 < t < T, \\ s(0) = b. \end{cases} \quad (1)$$

Para esta función $s \in C([0, T])$, notamos el siguiente subconjunto,

$$Q_{s,T} = \{ (x,t) \mid 0 < x < s(t), 0 < t < T \},$$

y la solución de este problema (1) es el par de funciones (s, u) que tiene las siguientes propiedades,

$$s \in C^1((0, T]) \cap C([0, T]), \quad s(0) = b, \quad s(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$u \in C(\overline{Q_{s,T}}) \cap C^{2,1}(Q_{s,T}), \quad u_x \in C(\overline{Q_{s,T}} - \{t = 0\}).$$

La solución explícita del sistema (1) se obtiene en términos de la siguiente función v ,

$$v(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz, \quad x, t > 0,$$

$$v(x, 0) = 1, \quad x > 0.$$

Aquí erf denota la función de error. Para cada $C > 0$ arbitrario y $\alpha > 0$ tenemos la siguiente expresión para $u(x, t)$:

$$u(x, t) = C \left\{ \operatorname{erf} \alpha - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right\},$$

y además $s(t) = 2\alpha\sqrt{t}$. Así $u > 0$ en $Q_{s,T}$, además verificamos que,

$$u_x(x, t) = -\frac{C}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Por ello,

$$u_x(s(t), t) = u_x(2\alpha\sqrt{t}, t) = \frac{C}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha^2} = -\dot{s}(t) = -\frac{\alpha}{\sqrt{t}}$$

si y solo si

$$C = \sqrt{\pi} \alpha e^{\alpha^2}.$$

Observe que en el contorno fijo $x = 0$ podemos seleccionar una de las condiciones

$$u_x(0, t) = -\frac{C}{\sqrt{\pi t}}, \quad \text{o} \quad u(0, t) = C \operatorname{erf} \alpha.$$

Así hemos demostrado que cuando $\alpha > 0$ se tiene,

$$u(x, t) = 2\alpha e^{\alpha^2} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\alpha} \alpha e^{-z^2} dz,$$

es la solución del problema (1), lo cual se resume en la siguiente figura (2):

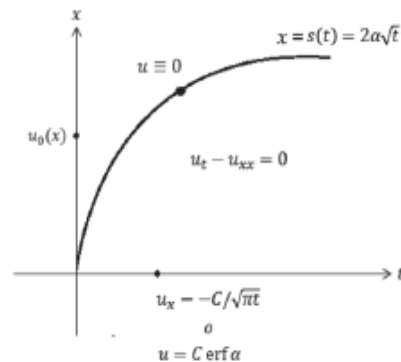


Figura 2. Diagrama para la solución del problema de Stefan lineal.

3. Problema Inverso Para El Caso Unidimensional No Lineal

En [1] se presenta el siguiente problema: Sean $u(x, t)$ la temperatura del líquido, $s(t)$ la posición de la interface entre dos estados de la materia en un tiempo t . El problema inverso consiste en dado $s(t) \in C^\infty[0, T]$ hallar $u(x, t) \in C(D_T \cap B_T)$ acotada, con $u_{xx}, u_t \in C(D_T)$; dado que $h(t), u_0(x)$ las temperaturas en $x = 0$ para $t > 0$, cuando $t = 0$ para todo x , que satisfice:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - vu_x - \rho u^2, & v, p \geq 0, T > 0; \\ \forall (x, t) \in D_T = \{ (x, t) : 0 < x < s(t), 0 < t \leq T \}, \\ u(0, t) = h(t) \geq 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & 0 \leq x \leq s(0), \\ u(s(t), t) = 0, u_x(s(t), t) = -\dot{s}(t), & 0 < t \leq T : \text{es la condición de Stefan.} \end{cases} \quad (2)$$

Donde el dominio D_T tiene la siguiente frontera:

$$\partial D_T = B_T = \{(0, t) : 0 < t \leq T\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq s(0)\} \cup \{(y(t), t) : 0 < t \leq T\} \equiv B_T^1 \cup B_T^2 \cup B_T^3,$$

tal como se ilustra en la figura 3.

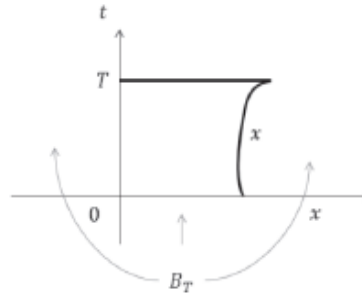


Figura 3. Dominio D_T y su frontera B_T .

La condición de Stefan dice que la energía calórica que aparece en la interface es totalmente utilizada en el proceso de fusión.

Solución: Como x^{2n} es denso en L^2 , consideremos una solución para el problema (2) análoga a la siguiente serie,

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^n(t)x^{2n}}{(2n)!},$$

en particular asumimos soluciones del siguiente tipo

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_n(t)}{n!} [x - s(t)]^n, \quad (3)$$

de lo cual se obtienen las siguientes fórmulas de recurrencias,

$$a_n = \dot{a}_{n-2} - a_{n-1} \dot{y} + va_{n-1} + \rho \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-2}{k} a_{n-2-k} a_k$$

Para $n \geq 2$, $a_0 = 0$ porque $u(s(t), t) = 0$, $a_1 = -\dot{s}$.

Estas conclusiones son necesarias y suficientes, esto es dados $s(t)$, $h(t)$, $u_0(x)$ existen unívocamente a_n y $u(x, t)$.

Observamos que el radio de convergencia de (3) tiene el siguiente acotamiento:

Teorema 1. Si $\dot{s} \in C^\infty([0, T])$ tiene el orden de Gevrey $(\alpha - 1)$, lo que significa que si $1 \leq \alpha \leq 2$ implica $\exists M, R > 0: |s^{(l+1)}(t)| \leq M \cdot \frac{l!^\alpha}{R^l}$, $\forall l = 0, 1, 2, \dots \forall t \in [0, 1]$, entonces el radio de convergencia de (3) tiene cota inferior la raíz positiva η^* de $(\rho \frac{M}{2})\eta^3 + (\frac{1}{R})\eta^2 + (\frac{v+M}{2})\eta - 1 = 0$.

En cuya prueba se usa el siguiente Lema técnico,

Lema 1. $\forall a, b, c > 0$ la única raíz positiva η^0 de $a\eta^3 + b\eta^2 + c\eta - 1 = 0$ es acotada inferiormente por $\eta^0 > \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4(\frac{a}{c} + b)}}{2(\frac{a}{c} + b)} = \eta^+$.

Sobre la convergencia de la serie (3), tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 2. Dados $v, \rho > 0$; $\dot{s} \in C^\infty([0, T])$ de orden de Gevrey $\alpha - 1$ con $1 \leq \alpha \leq 2$, entonces el radio de convergencia de la serie (3) es mayor que η^+ .

4. Un problema de control óptimo

En esta sección consideramos el problema de control que consiste en maximizar la cantidad de mezcla en la superficie de contacto de la mezcla en el problema de Stefan donde el flujo de calor total en la frontera es la variable de control.

Si $u_0(x) > 0$, $\delta(x) > 0$, $h(t) > 0$ consideremos el problema de Stefan con una fase que consiste en encontrar (u, s) satisfaciendo,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } 0 < x < s(t), 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \text{en } 0 < x < b(b = s(0) > 0), \\ -u_x(0, t) = h(t) + \varepsilon\delta(t) > 0, & \text{si } 0 < t < T, \\ u(s(t), t) = 0, \\ \frac{ds}{dt} = -u_x(s(t), t) & \text{en } 0 < t < T \end{cases} \quad (4)$$

Para $u_x(s(t), t)$, proponemos soluciones perturbadas $(u_\varepsilon, s_\varepsilon)$ para el parámetro $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon v(x, t) + O(\varepsilon^2) & \text{en } 0 < x < h(x), \\ \frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon(x, t) = u_x(x, t) + \varepsilon v_x(x, t) + O(\varepsilon^2), \\ s_\varepsilon(t) = s(t) + \varepsilon\gamma(t) + O(t^2), \\ \frac{d}{dt} s_\varepsilon(t) = s'(t) + \varepsilon\gamma'(t) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (5)$$

En (5) si $\delta(x) > 0$, entonces $\gamma(t) > 0$, funciones medibles con $\int_0^T g(t) dt < \infty$ y $\int_0^T \gamma(t) dt < +\infty$ y a (5) le asociamos el siguiente problema π_ε de control óptimo:

Problema π_ε : En \mathbb{A} las funciones medibles $\delta(t)$, $0 < t < T$ con $\delta(t) \geq 0$, para un $C > 0$ se tiene $\int_0^T \delta(t) \leq C$; resolver este problema consiste en encontrar $\delta \in \mathbb{A}$, tal que

$$\gamma_\delta(T) = \max_{\delta \in \mathbb{A}} \gamma_\delta(T).$$

Se puede probar que:

Teorema 3. Existe un control δ que resuelve π_ε .

y además,

Teorema 4. δ el control óptimo es único, el coincide con C veces la medida de Dirac en $t = 0$.

Prueba: Usamos funciones del siguiente tipo,

$$w(x, t) = \int_0^t \delta(s) ds - \int_0^x v(y, t) dy, \quad (6)$$

Es fácil ver que $v(x, t)$ satisface las siguientes condiciones,

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \text{ en } 0 < x < s(t), 0 < t < T; \\ v(x, 0) = 0 \text{ en } 0 < x < b, \\ -v_{x(0,t)} = \delta(t) \text{ en } 0 < t < T, \\ v(s(t), t) = \gamma(t) s'(t) \text{ en } 0 < t < T, \text{ donde} \\ \gamma(t) = \int_0^t \delta(s) ds - \int_0^{s(t)} v(x, t) dx \end{cases} \quad (7)$$

y por ello (6) tiene las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \text{ en } 0 < x < s(x), 0 < t < T; \\ w(x, 0) = 0 \text{ en } 0 < x < b, \\ w(0, t) = \int_0^t \delta(s) ds \text{ en } 0 < t < T, \\ w_x(s(t), t) + s'(t)w(s(t), t) = 0 \text{ en } 0 < t < T, \\ \gamma(t) = w(s(t), t). \end{cases} \quad (8)$$

Expresamos w en términos de su función de Green $G(x, t; \xi, \tau)$, $\tau < t$, en el dominio

$$\Omega : 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T;$$

esto es, $w(x, t) = \int_0^t w(0, \tau) G_x(x, t; 0, \tau)$ resultando que $G(x, t; \xi, \tau) \rightarrow \delta_x(\xi)$ cuando $\tau \uparrow t$, donde $\delta_x(\epsilon)$ es la medida de Dirac centrada en $x = \epsilon$.

$\gamma(t) = w(s(t), t)$, esto es,

$$\gamma(t) = \int_s^t \left[\int_s^t G_\xi(s(t), t; 0, \tau) d\tau \right] \delta(s) ds \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_s^t G_\xi(s(t), t; 0, \tau) d\tau \right] = G_\xi(s(T), T, 0, s) < 0,$$

puesto que $G(x, t; 0, \tau) = 0$, el principio del máximo dice que $G_\xi(x, t, 0, \tau) < 0$ en $0 < x \leq s(t)$, $\tau < t$; entonces $\gamma(T)$ es el máximo si y solo si $\delta(s)$ es la medida de dirac centrada en $s = 0$ veces A .

El Problema General de control es el siguiente:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \text{ en } 0 < x < s(t), 0 < t < T; \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 \text{ en } 0 < t < b, \\ -u_x(0, t) = h(t) \text{ si } 0 < t < b, (b = s(0) > 0) \\ \frac{ds}{dt} = -u_x(s(t), t) \text{ si } 0 < t < T. \end{cases} \quad (9)$$

En (9) función de control $h(t)$ la podemos considerar variando en el conjunto siguiente,

$$h(t) \in K = \left\{ h(t) \text{ estándar de control, } \int_0^T h(t) dt \leq C \right\}.$$

Si hacemos $u = u_h, s = s_h$, se propone resolver el siguiente problema π :

Problema π : Encontrar $h \in K$ tal que $s_h(T) = \max_{h^* \in K} s_{h^*}(T)$, para el cual se tiene,

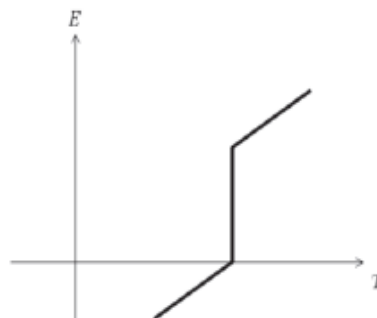
Teorema 5. Existe $h(t) = C\delta_0(t)$ que resuelve el problema π .

5. Formulación General Problema del Control Óptimo a Través de la Entalpia

El modelo da respuesta al siguiente problema: Sea el dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), con frontera acotada $\partial\Omega, 0 < T < \infty, Q \equiv \Omega \times]0, T[, \Sigma \equiv \partial\Omega \times]0, T[$, donde buscamos un par (η, ϑ) que satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \Delta \vartheta \text{ en } Q, \\ \eta \in \gamma(\vartheta) \text{ en } Q, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = h(\vartheta, u) \text{ en } \Sigma, \\ \eta(\sigma_u(x)) = \eta_0 \text{ en } \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Aquí $\vartheta = \vartheta(x, t)$ representa la temperatura, $\eta = \eta(x, t)$ representa la entalpia y γ es un gráfico maximal y monótono como el siguiente,

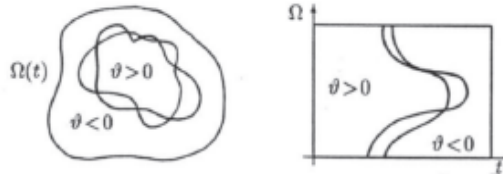


$$\gamma(\vartheta) = b(\vartheta) + \lambda H(\vartheta),$$

con $H(\vartheta) = 0$ si $0 < \vartheta, H(\vartheta) = [0,1]$ si $\vartheta = 0; H(\vartheta) = 1$ si $\vartheta > 0, \lambda > 0$ representa el calor latente y $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente y suficientemente suave.

La condición inicial no está bien definida y la condición de contorno Neumann en (10) contiene la variable de control $u = u(x, t)$ que corresponde al flujo de calor en la frontera. El control puede representar un coeficiente de calor o la temperatura exterior y es elegido en un subconjunto admisible U de $L_1(\Sigma)$.

La interface se ubica en el conjunto de nivel $\Phi \equiv \{\vartheta = 0\}$, que separa la zona de fase líquida $\{\vartheta > 0\}$ con la zona de fase sólida $\{\vartheta < 0\}$ y es controlada implícitamente.



Específicamente consideramos la frontera libre controlada del tipo

$$\phi_u = \{(x, t) \in Q : t = \sigma_u(x), \text{ para cada } u \in U \text{ y } \sigma_u \text{ del tipo Lipschitz}\}.$$

El funcional para el costo se construye con la temperatura $\vartheta = \vartheta(u)$ y en la mayoría de los casos que contiene cantidades de uno de los siguientes tipos:

$$\int_Q |\vartheta - \vartheta_*| dx dt, \int_\Sigma |\vartheta - \vartheta_*|^2 dx dt, \int_\Omega |\vartheta(T) - \vartheta_*|^2 dx, \text{ ó } \int_Q p(x)\vartheta(x, t) dx dt.$$

Donde ϑ_* denota una función prescrita y p una función de peso apropiado. Por ejemplo, un principio big-bang para el problema de una sola fase acostumbrada para el control a través de la condición de Neumann.

6. Formulación variacional del control óptimo

Asumimos $\eta_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $h = h(x, t, \vartheta, u)$ es una función Caratheodory, es decir, continua en las variables ϑ y u , para casi todo $(x, t) \in \Sigma$ y $L_2(\Sigma)$ para cada (ϑ, u) y satisface una condición de signo compatible con el principio del máximo débil, a saber,

$$\vartheta h(x, t; \vartheta, u) \leq 0 \text{ para } |\vartheta| > \mu \text{ y } |u| \leq \rho,$$

para algunas constantes positivas grandes $\mu, \rho > 0$. En particular, esto es válido para el flujo lineal

$$h(x, t; \vartheta, u) = \alpha(x, t)(u - \vartheta), \text{ con } \alpha \geq 0.$$

En estas condiciones tenemos la siguiente proposición,

Proposición 1. Para cada $u \in L_\infty(\Sigma)$, $\|u\|_{L_\infty} \leq \rho$, entonces existe una única solución débil $\{\eta, \vartheta\}$ para el problema Stefan (10), satisfaciendo,

$$\begin{cases} \eta \in L^\infty(Q), \eta = b(\vartheta) + \lambda \chi \text{ con } \chi \in H(\vartheta) \text{ en } Q, \\ \vartheta \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \cap C^0(Q), |\vartheta| \leq M \text{ en } Q, \\ \int_Q \left(\nabla \vartheta \cdot \nabla \zeta - \eta \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = \int_\Sigma h(\vartheta, u) \zeta + \int_\Omega \eta_0 \zeta(0), \forall \zeta \in H^1(Q); \zeta(T) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Por otra parte, si $\{\eta, \vartheta\}$ y $\{\eta_n, \vartheta_n\}$ denotan las soluciones correspondientes a diferentes datos, u y u_n respectivamente, entonces

$$\text{si } h \text{ es lineal en } u \text{ y } u_n \rightarrow u \text{ en } L^1(\Sigma) \text{ - débil, ó} \quad (12)$$

$$\text{si } h \text{ es no-lineal en } u \text{ y } u_n \rightarrow u \text{ en } L^1(\Sigma) \text{ - fuerte,} \quad (13)$$

se tiene que $\eta_n \rightarrow \eta$ en $L_\infty(Q)$ -débil y $\vartheta_n \rightarrow \vartheta$ en $L^p(Q)$ -fuerte ($\forall p < \infty$) y en $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ - débil.

Observación: Como consecuencia inmediata de esta proposición hay dependencia continua con respecto al control óptimo u de un funcional de costo semicontinuo inferiormente $J(u, \eta(u), \vartheta(u))$, u en conjuntos admisibles $U \subset L_\infty(\Sigma)$.

En general, el conjunto de nivel $\{\vartheta = 0\}$ puede tener medida de Lebesgue distinta de cero. Llamamos como región blanda al conjunto medible,

$$M = \{(x, t) \in Q: 0 < \eta(x, t) < \lambda\} \text{ y } M(t') = M \cap \{t = t'\} \quad (14)$$

y denotamos por $|A|$ la medida de Lebesgue N -dimensional de $A \subset \Omega$. Inicialmente se considera s'olo el caso en que se puede evitar la region blanda, y consideramos los siguientes conjuntos admisibles para controles:

$(L)U_L \subset \{u \in L^\infty(\Omega): \|u\|_{L^\infty(\Sigma)} \leq \rho\}$ cerrado para la L^1 - convergencia ,

$(NL)U_{NL} \subset U_L$ compacto para la $L^1(\Sigma)$ - topología.

Sea $\Lambda \subset Q$ cualquier subconjunto medible de la zona líquida y χ_Λ su función característica, para ello consideramos el siguiente funcional para el costo

$$J(u) = \int_Q |\chi(u) - \chi_\Lambda| dxdt, \quad (15)$$

Donde $\chi(u) = \chi\{\vartheta(u) > 0\}$ es la función característica de la zona líquida para $u \in L^\infty(\Sigma)$, y el siguiente teorema de control:

Teorema 6.

- i. Si $|\{x \in \Omega: 0 < \eta_0 < \lambda\}| = 0$, entonces $|\{(x, t) \in Q: 0 < X(x, t) < 1\}| = 0$ para todo $t > 0$ y $\frac{1}{\lambda}[\eta - b(v)] = X\{v > 0\}$ en casi todo Q , y
- ii. Existe $u^* \in U$ con $J(u^*) \leq J(u)$, $\forall u \in U$ según sea de U_L o de U_{NL} .

7. Casos Particulares

7.1. El problema clásico de Stefan para la difusión de calor

Sea $u \equiv 0$ la temperatura de solidificación y fusión representada en la siguiente ecuación de difusión no lineal:

$$c_i \frac{\partial u}{\partial t} - k_i \Delta u = g \quad (16)$$

en

$$Q_i \equiv \{(t, x) \in Q; (-1)^i u(x, t) > 0\}, \quad i \in \{1, 2\},$$

Donde $Q =]0, T[\times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotada con frontera regular Γ .

Si $\Gamma(t)$ es la superficie que separa las dos fases en el momento $t \in [0, T]$, esto es la frontera libre y la condición de Stefan para la siguiente ley de conservación de energía,

$$k_1 \cdot \text{grad } u|_{Q_1} \cdot \text{grad } s - k_2 \cdot \text{grad } u|_{Q_2} \cdot \text{grad } s = \rho L \frac{\partial s}{\partial t},$$

Con ρ la densidad y L el calor específico latente. Adicionamos condiciones iniciales y de frontera. La solución débil de este problema es,

$$\int_Q \left(y \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \Delta \phi \right) dx dt = - \int_{\Omega} y_0 \phi(x, 0) dx - \int_Q g \phi dx dt + \int_{\Gamma \times [0, T]} v \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma, \quad \forall \phi \in F,$$

Donde

$$F = \left\{ \phi \in C^1(Q): \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\bar{Q}), \phi(x, T) = 0, \phi(x, t) = 0 \text{ en } \Gamma \times [0, T] \right\}.$$

$v = u|_{\Gamma}$ y $y \in \beta(u)$ es la entalpia con valor inicial y_0 ,

$$\beta(u(x, t)) \equiv \beta(u) = \begin{cases} c_1 u & \text{si } u < 0 \\ [0, L] & \text{si } u = 0 \\ c_2 u & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

Es un gráfico maximal monótono.

Este F.B.P se puede expresar con desigualdades variacionales, que conducen al siguiente problema de optimización:

$$\min J(\alpha, u(\alpha)) = \begin{cases} \min_D \left\{ V(D) = \int_E |\nabla y - y_a|^2 dx \right\} \\ \text{Sujeto a } \begin{cases} \Delta y = f \text{ en } D, \\ y = 0 \text{ en } \partial D \end{cases} \end{cases}$$

En dos dimensiones esta restricción es

$$\begin{cases} (\nabla u(\alpha), \nabla \varphi)_{L^2(\Omega(\alpha))} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega(\alpha))} \\ \Omega(\alpha) = \{ [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 / 0 < x_1 < \alpha(x_2), x_2 \in [0, 1] \} \end{cases}$$

Con $y_a \in L^2(\Omega)^N$, $f \in L^2(\Omega)$, $E \subset \Omega$ y D dominio variable tal que $E \subset D \subset \Omega$.

7.2. El modelo de crecimiento de tumores

El crecimiento de tumores localizados básicamente se describe mediante el siguiente modelo:

$$\begin{cases} c \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \Delta \sigma - \lambda \sigma \text{ en } \Omega(t), t > 0 \\ \Delta \rho = -\mu(\sigma - \hat{\sigma}) \text{ en } \Omega(t), t > 0 \\ \sigma = \hat{\sigma} \text{ en } \partial\Omega(t), t > 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial v} = -V_n \text{ en } \partial\Omega(t), t > 0 \\ p = \gamma \kappa \text{ en } \partial\Omega(t), t > 0 \end{cases} \quad (17)$$

Donde κ es la curvatura de la superficie de contacto, σ es la concentración del nutriente y ρ la presión interna que causa el movimiento del material celular. La versión más simplificada es la siguiente:

$$\begin{cases} \Delta\sigma - \sigma = 0 & \text{en } \Omega \\ \Delta\rho = -\mu(\sigma - \hat{\sigma}) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (18)$$

Sujeto a,

$$\begin{cases} \sigma = \bar{\sigma} & \text{en } \partial\Omega \\ \frac{\partial\rho}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \rho = \gamma\kappa & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (19)$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada normal, κ es la curvatura de $\partial\Omega$; $\bar{\sigma}, \gamma$ son constantes positivas. Se puede verificar que si $0 < \hat{\sigma} < \frac{1}{2}\bar{\sigma}$ existe una única solución de (17)-(18) que es radialmente simétrica:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0(\gamma) = \bar{\sigma} \frac{I_0(\gamma)}{I_0(R)}, & \gamma < R \\ \rho = \rho_0(\gamma) = -\mu\sigma_0(\gamma) + A + \frac{\mu}{4}\sigma\gamma^2, & \gamma < R \end{cases} \quad (20)$$

donde $-\mu\bar{\sigma} + A + \frac{\mu}{4}\bar{\sigma}R^2 = \sigma\frac{1}{R}$, además $\int_{\gamma=R} \frac{\partial\rho_0}{\partial n} = 0$ en $\Omega = \{\gamma < R\}$ y existen las siguientes soluciones no radiales $(\sigma_\epsilon, \rho_\epsilon, \Omega_\epsilon, \Gamma_\epsilon)$ que bifurcan de (σ_0, ρ_0) :

$$\begin{cases} \gamma = R_0 + \epsilon f_1(\theta) + \epsilon^2 f_2(\theta) + \dots \equiv R_0 + f(\theta, \epsilon), \\ \sigma_\epsilon(\gamma, \theta) = \sigma_0(\gamma) + \epsilon\sigma_1(\gamma, \theta) + \epsilon^2\sigma_2(\gamma, \theta) + \dots \\ \rho_\epsilon(\gamma, \theta) = \rho_0(\gamma) + \epsilon\rho_1(\gamma, \theta) + \epsilon^2\rho_2(\gamma, \theta) + \dots \\ \gamma_\epsilon = \gamma_0 + \epsilon\gamma_1 + \epsilon^2\gamma_2 + \dots \end{cases} \quad (21)$$

La cual son convergentes y son soluciones analíticas en $(\gamma, \theta, \epsilon)$, esto es en (x, y, ϵ) para (x, y) en una vecindad de $\{\gamma \leq R_0\}$ y $|\epsilon|$ pequeña. En particular si $f_1(\theta) = \cos(l\theta)$, $l \geq 2$ y el punto de bifurcación es determinado unívocamente por $\{\mu, \bar{\sigma}, \hat{\sigma}, l\}$, $\gamma_0 = f(R_0)$.

Las ecuaciones de bifurcación se obtiene mediante la siguiente función parametrizada de Lyapunov-Schmidt,

$$F(u, \lambda): X \rightarrow Y \subset X$$

$$F(\lambda, u) = 0; u \in X \text{ Banach}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } F(\lambda, 0) \equiv 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Un punto de bifurcación $(\lambda_\epsilon, 0)$ es un punto en el cual existe una o múltiples soluciones no triviales $\lambda = \lambda(\epsilon), u = u(\epsilon)$ con $\lambda(0) = \lambda_0$ y $u(0) = 0$.

Con operador linealizado $L_0 = \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda_\epsilon, 0)$, resultando que L_0 es un operador Fredholm con índice cero, con espacio nulo \mathcal{N} ($n = \dim \mathcal{N} < \infty$) y rango R_0 .

Sea P la proyección de Y en \mathcal{N} , $Q = I - P$ es la proyección de Y en R_0 . Si descomponemos $u \equiv Pu + Qu$ y proyectamos $F(\lambda, u) = 0$ en \mathcal{N} y R_0 , conseguimos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \mathcal{K}(\lambda, \vartheta, \psi) \equiv QF(\lambda, \vartheta + \psi) = 0 \\ PF(\lambda, \vartheta + \psi) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

donde $\vartheta = P(u)$, $\psi = Q(u)$.

Observamos que $\mathcal{K}(\lambda_0, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi}(\lambda_c, 0, 0) = QL_0$; lo que significa que \mathcal{K} es un isomorfismo de QX en QY , y por el teorema de la función implícita, $\psi = \psi(\lambda, \vartheta)$, lo que sustituimos en (22) para alcanzar la siguiente ecuación de bifurcación:

$$PF(\lambda, \vartheta + \psi(\lambda, \vartheta)) = 0 \quad (23)$$

la expresión (23) resulta ser un sistema de n ecuaciones.

Este método para obtener la ecuación de bifurcación no se puede aplicar directamente a problemas de frontera libre pues se requiere un dominio fijo y un nuevo T.F.I.

Para ilustrar esta limitación tomemos $\mathcal{N} = \cos(l\theta)$, y como $Pu \perp Qu$, entonces,

$$(**) \int_0^{2\pi} f_j(\theta) \cos(\theta) d\theta = 0, j \geq 2$$

para infinitas traslaciones de $Y = R_0$.

Como
$$\int_0^{2\pi} \sigma_j(\gamma, \theta) \cos(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} P_j(\gamma, \theta) \cos(\theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} f_j(\gamma, \theta) \cos(\theta) d\theta = 0, j \geq 1$$

se excluyen soluciones pares en $\theta: (f_j(\theta), \sigma_j(\gamma, \theta), P_j(\gamma, \theta))$, las cuales son analíticas en variables espaciales y en $\epsilon = 0$. Además (**) implica $Y_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$, γ_{2n} son unívocamente determinadas por las condiciones consistentes que deben ser satisfechas por los coeficientes de $\cos(l\theta)$ y ϵ^{2n+1} .

Referencias

1. William B. Dumar and Nicolas Petis, Boundary control of and nonlinear stefan problem, Control, Optimization and calculus of variations, 2003, vol. 9.
2. Yri A. Kuznetsov; Elements of applied Bifurcation Theory, Springer 2010.
3. Nonlinear optimal control problems in heat conduction, SIAM J. Control and optimization, vol. 21 No. 6, November 1983.
4. A. Dollmam and A. van Harter; Nonlinear dynamics and pattern formation in the natural environment, Longman, 1995.
5. Philip Holmes; Turbulence, Coherent Structures Dynamical Systems and Symmetry; Cambridge, Monographic on Mechanics, Cambridge, 1996.
6. J. F Rodriguez and B. Zaltzman; Free Boundary optimal control in the multidimensional Stefan Problem, Int. Ser. Num. Math., 88 (1996).
7. Peter Grindrod; The Theory and applications on Reaction-Difussion Equations, Patterns a Wave, Oxford 1996.
8. Fernando Reitich, Shape deformations and Analytic continuation in free Boundary Problems, International Series of Numerical Mathematics, vol 147, 265 - 286.
9. Rebecca Hoyle; Pattern Formation, Cambridge, 2006.
10. Martin Golubitsky, Dan Luss and Steven Strogatz; Pattern Formation Continuous and Coupled Systems, Springer 1999.